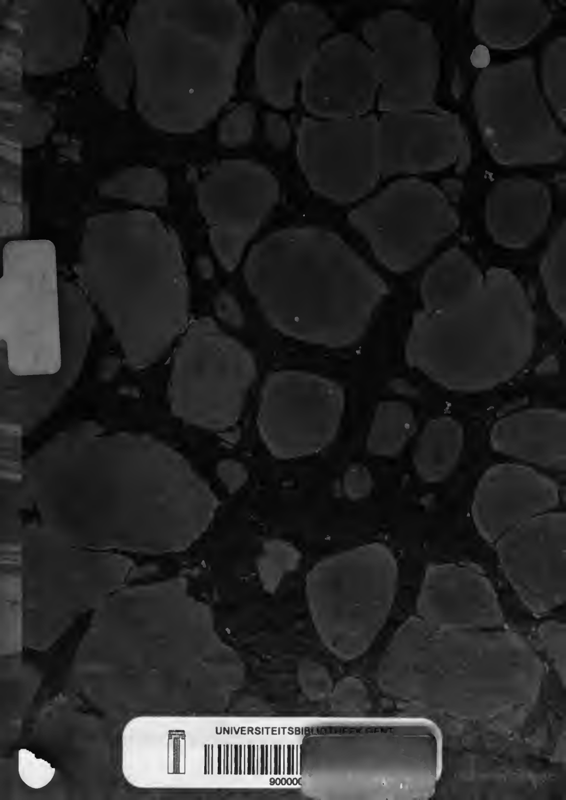
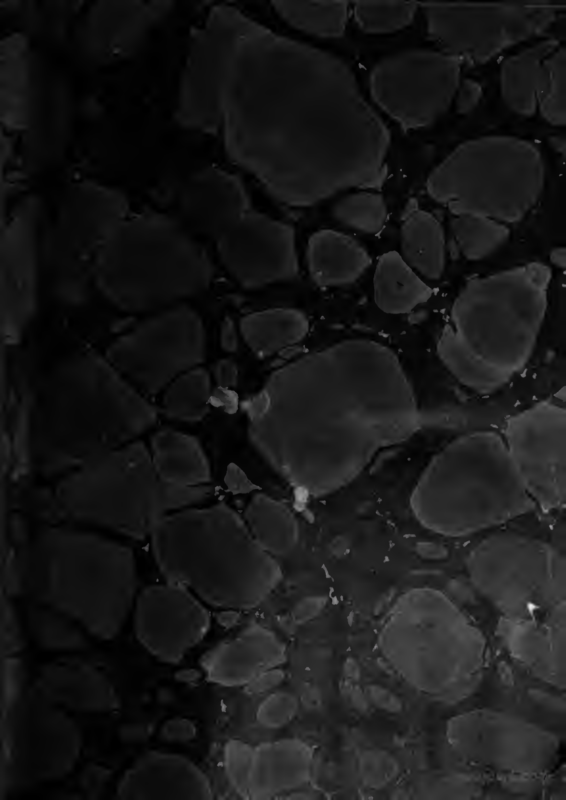



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000



MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS ALTER.

MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1760—1761.



A TURIN,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
AVEC PERMISSION.







TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.



ALBERTI

ALBERTI HALLER

EMENDATIONES ET AUCTARIA

A D

STIRPIUM HELVETICARUM

HISTORIAM.

INvitatione Sociorum praestantissimorum gratus utens, CIGNA *celeberrime, quae ad classes naturales Tetrapetalarum, siliquosarum, Papilionacearum, Didynamiarum utriusque generis, Dipsacearum, floreque composito corrigenda & addenda visa sunt, breviter expono, dum quae ex incerta spe senii mei pendet, majoris operis editionem secundis curis praeparo. Aliqua nova, multa emendatiora hic reperiuntur, postquam plantarum rariorum in locis natalibus lectarum mihi abunde copia facta est. Certo carptiones aliquas vitavero, si quae minus recte olim scripsi, ipse non monitus correxero. Rupe d.* 24. *Decembris* 1759.

PLANTAE SILIQUOSAE, TETRAPETALAE TETRADYNAMIAE Linn.

1. RABA *foliis hirsutis incanis, radicalibus ovatis Enum. helv. n. 2. p.* 539.

Rarior reliquis in *Chaux ronde vallis Ormond dessus*, & in M. *Fouly* reperta. Folia rosulas ad terram efficiunt, fere ut *Aretia villosa*, pariter ovata, integerrima, hirsuta, peculiari modo flaccida. Caulis, ut in *Draba vulgatissima*, unum, duo, tria folia, aut nullum etiam producit, prima ovato lanceolata, deinde longiora. Flores in singulo caule, sex & ultra, calycibus hirsutis, petalis incisis albis fructus similis vulgari, glaber, in utroque loculo 10. & 11. semina continet, & tubam conservat, sed brevem, & capitatam.

2. Clypeola *perennis foliis ovatis, scabris, calyce deciduo.*

Jonthlaspi luteo flore incanum discoides umbellatum montanum Columň. *Ecphras. p.* 281. *ic. p.* 280.

Non vulgarem in Helvetia plantam abunde legi ad pedem rupium arenosi lapidis *Gysenau* prope pontem Emmae fl. Descriptionem, quae in *Enum. helv. p.* 540. *n.* 2. nulla est, nunc addo.

Ex una radice, quae fibrosissima est, prodeunt caules innumerabiles, semierecti, simplices, dodrantales, hirsuti. Folia in petiolo folioso dilatata, obtusa, ovatis longiora; alba, scabra, hirsutie tecta. Flores secundum caulem in petiolis semiuncialibus, spicati. Calycis folia quatuor, ex ovatis lanceolata, deorsum paullum turgida, pallide flava, decidua. Petala multo majora, quam in vulgari specie, ex ungue latescunt, ambitu cordiformi, flava. Stamina eminentia majora quatuor, duo breviora lateralia. Ad istorum originem interior haeret squama bidentata, brevis alias,

alias

alias stamini pene aequalis, petalodes. Siliqua ovata, emarginata, utrinque turgens, hirsuta. In ea semen utrinque unum, lenticulatum, quorum alterum saepe abortit.

3. NAUSTURTIOLUM *alpinum folio alato* RAI *p.* 826. nunc crediderim, ex ipsius nominis vi, esse plantulam a *Nasturtiolo alp. tenuissime diviso* non diversam, quam ex praealto M. *Col de Ferry* habeo, foliis tamen potius ovatis, quam lanceolatis; petiolo, qui semper latus est, in hac herbula, etiam aliquanto latiori.

4. COCHLEARIA I. LINN. *foliis angulosis*. Utique sponte in *Helvetia* nascitur, abunde quidem in paludosis inter marmoris varii venas, & scaturiginem rivi *Furet* prope *Roche*: Dicitur etiam in valle *Moutier-Grand-val aux roche de Moutier près de la grande cascade de la Birse* nasci, sed planta ex ea valle missa majus fuit *Cardamines vulgatissimae* exemplum.

5. LEPIDIUM *latifolium* non tantum circa Urbam, & in Vaudensi agro ad vias sponte provenit, sed omnino, ut veram indigenam plantam esse constet, in altissimo, & *ferissimo* (ut solent vocare) M. *Prapioz*.

6. *Iberis* MATTH. *Lepidium* 12. LINNAEI p. 675. non est *diandria*. Stamina quatuor majora, parva duo habet; petala ovata; fructum ex lata basi contractum, ex angusti finis fissura eminentem tubam; semen in utrovis loculo unicum.

7. Ad *Lepidia* addatur elegans species *Thlaspi saxatile flore rubente* J. R. H. 5. *Lepidium foliis pulposis subrotundis antheris lateralibus Enum. Gott.* p. 245. Ad rupes prope *Ruchenette* reperit Cl. NEUHAUS.

Est *Iberis saxatilis* LINN. *Cent.* II. *n.* 171.

8. DRABIS, ut recte Cl. ALLIONIUS noster conjicit, utcumque vicina est planta, quam ipse, nobiscum *Lepidium caule repente foliis ovatis amplexicaulibus* vocavit *l. c. p.* 27. *T. IV*. Siliqua enim pene quadrangula est, utique marginibus

magis,

magis, media linea, quae septo respondet, minus conspicua; sed tamen eminente. Septum ipsum non latitudini, & majori axi, sed commissurae acutae siliquae parallelum est. Quando tamen siliqua aperta semina dejecit, tunc septum perinde, ut in Alyssis, planum persistit, videturque valvis fructus parallelum fuisse. Inaequalitatem petalorum, ut inter Iberides reponi mereatur, neque ego observavi, aut nunc observo, neque Cl. amicus noster. In saxosis vicinarum alpium abunde nascitur.

9. *Alysson myagri folio n.* 3. *p.* 538. omnino *a cochlearia* differt, fructu quidem pene rotundo, non tamen transversum lato, valde convexo, sed cujus septum huic convexitati parallelum persistit. Foliis penitus pinnatis reperi in periculosa via *les ruines*, qua itur ad M. *Tompey*.

10. Denique ALYSSON *foliis pinnatis multiformibus floribus racemosis luteis* ALLIONE p. 40. T. 7. utique a Cl. LACHENAL p. 6. inter *Cliben*, & *pontem Wiesae*, tum inter *Neuhaus*, & *Haltingen* reperta est, nova civis, & nova planta.

11. HESPERIDIS secundae Enum. nomine tres plantae continentur, Helveticae omnes. Prima alpina a summarum rupium M. *Chasseral* pede a DD. SCHUH, & GAGNEBIN, & in *Creux du Vent*, *au pertuis de la Bise* a Cl. DIVERNOI lecta est. Et humilior omnino, & dodrantalis statura est, folia omnia oblonga, rariter dentata, dentibus saepe profundis; caulis non ramosus est nisi ex radice, idem in summa parte spicatus. Petioli florigeri sex linearum, robusti, ad grandem angulum de caule exeunt. Flos uncia paullo brevior. Calyx tubulosus, albidus, duobus foliis deorsum gibbis. Petala longo ungue, bractea pene orbiculari, sulfurea, venosa. Siliqua subhirsuta, cornu longum sine emarginato.

Hoc est *Leucojum angustifolium alpinum flore sulfureo* ALLIONE p. 44. T. 9. f. 3.

12. Al-

12. Altera in planitie Valesiae passim crescit supra *Leucam*, ubi & ipse legi, & Cl. Ricou, tum circa *Diedenheim* alsatiae vicum Cl. Risler. Huic caulis ramosus, altior, cubitalis. Folia ad terram plurima, petiolata, longe lanceolata, scorzonerae similia, non dentata, glauca, tota subtiliter hirsuta, quae priori glabra sunt, ad caulem gracilia, linearia. Flos multo minor, caetera similis. Siliqua hirsuta quadrangularis. Stigma crassum globosum. Haec est *Leucojum sylvestre* Clus. *p.* 299.

13. Ab hac specie modice differt planta Germanicae prosapiei, & sibiricae, quae abunde in rupibus M. *Altenstolberg*, & in muris rupibusque circa *Kelbra* a me decerpta est, & circa *Jenam* etiam nascitur. Huic caules bicubitales, valde ramosi, folia subhirsuta, dentata sed rariter, ut sint quae dentibus destituantur. Flos minor quam priorum, stigma emarginatum. Siliquae etiam quadrangulares, hirsutae. *Erysimum est foliis serratis lanceolatis* Linn. *Cent.* 1. *p.* 18. *flor. suec. n.* 602., sed hirsuta omnino siliqua est, quam Linnaeus glabram fecit. Etsi possit videri statura, foliisque caulinis omnibusque serratis, differre, non tamen ausim a priori *n.* 12. separare, cui fructus ferat simillimos.

14. Turritis *foliis hirsutis amplexicaulibus siliquis nutantibus*.

Leucojum sylvestre angustifolium flore albido parvo Rai *p.* 786.

Magna copia provenit in rupestribus circa *Roche*, *à la Marbriére*, *Agauni*, circa *Bonne-ville*, & alibi.

Verno tempore haec planta pedalis & cubitalis, tota foliis, & caule molliter hirsuta est. Folia radicalia petiolata, hirta, cum mollitie tamen, longe petiolata, obtusa, ex ovatis lanceolata, paucis sed magnis dentibus serrata sunt. Caulem eadem amplectuntur, & lente diminuta latitudine, denticulis minoribus per marginem exasperantur. Versus summum caulem petioli florigeri exeunt, ut in hac classe solent, racemosi. Calyx coloratus, albicans, deorsum

fum non gibbus, caryophyllaeus. Sic petala ex albis fublutea; longe petiolata, leviter emarginata. Duae glandulae ad originem ftaminum breviorum. Siliqua hirfuta, cornu brevi, fine rotundo, longiffima trium quatuorve unciarum, per maturitatem nutans, compreffa, oris undulatis. Semina plana, ovata, hilo incifa, ala foliaceà cincta. Calyces noftris non rugofi, fed modice utique pilofi, ut cum Ammeniana conveniant LINN. *fpec. p.* 665. *n.* 6. A *Monfpelienfi* planta differt caeterum fimillima, quod ei Calyces deorfum gibbi fint. Ita enim in fpeciminibus reperio a praeftantiffimo COMMERSON miffis.

15. ERYSIMUM 10. Bernae nunc defideratur, cum tota ea ruderofa area, in qua crefcebat, magnificis aedificiis repleta fit.

16. *Sifymbrium* 11. 12. & 13. nunc denique paullo rectius licet conftituere, plurimis undique, & ex locis natalibus collectis fpeciminibus. Omnia autem ex nectariis aut finnapia erunt, aut Braflicae; huic propiora, qualis a Cl. LINNAEO definitur.

17. SINAPI adeo *foliis levibus glaucis pinnatis, pinnis linearibus rariter dentatis Enum. n.* 11. *p.* 551.

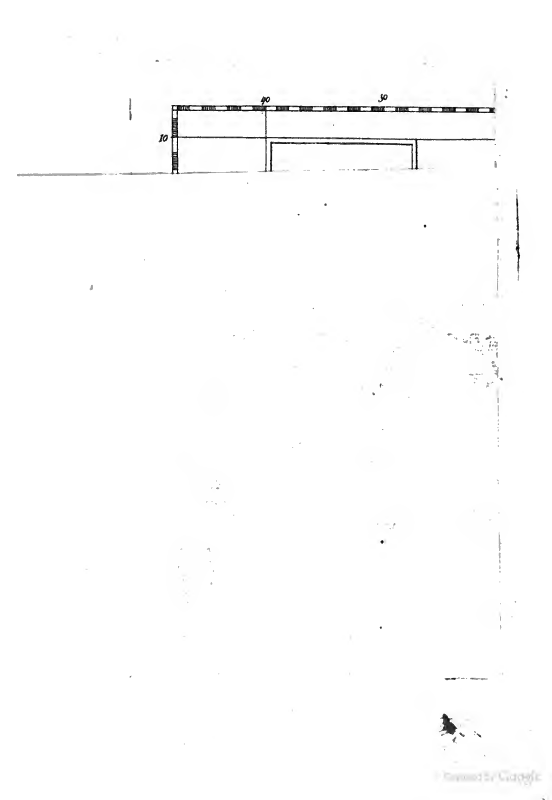
Eruca tenuifolia perennis flore luteo C. B.

Sifymbrium tenuifolium LINN. Cent. 1. p. 1. 8. n. 50.

Genevae provenit ad portam *Cornevin*, & Bafileae in arenofis ad *Wiefam* fl. *Badae* in arce diruta. *Aux allées de Colombier*. Frequens etiam in *Alfatia*, *Spirae*, *Manhemii*.

Concinnae plantae folia longe petiolata, fere polypodium imitantur. Nervus nempe a foliofa latitudine augetur, pinnafque accipit alternas, aut oppofitas, ipfeque in fimilem, aliquanto majorem, lanceolam exit. Pinnae fimplices rariffime dentatae, fed incerta & alternante latitudine, primae breviores, acutum cum nervo angulum faciunt. Ad caulem faepe integerrima, *linariae* fimilia folia. Caulis fubhirfutus, firmus pedalis, cubitalis. Calyx deorfum non gibbus, ad lentem




40
30
10

lentem vitream visus subhirsutus, deciduus. Petala ex petiolo lente dilatantur, bracteis flavis, rotundis, patentibus, calyci duplo longiora. Stamina longiora brevia bina magna portione superant. Inter ea majora stamina, & calycem, tum inter stamen minus, & germen glandulae quatuor rotundae, virides sedent. Cornu siliquae breve, sine globoso. Maturescens eadem erigitur sescuncialis, compressa, paullum articulata, lata ultra lineam, cornu persistente, seminibus compressis, ovatis, cum hilo, non alatis.

18. Sinapi altera planta est *foliis semipinnatis rotunde dentatis hirsutis Enum.* n. 12. p. 552.

Eruca inodora J. B. II. *p.* 862.

Eruca lutea sylvestris caule aspero C. B.

Haec priori vulgatior *Ebroduni* abunde in fossis provenit: tum ad Arolam inter *Aarberg*, & *Worben*, in Valesia. Inter *Lausannam*, & les *Croisettes* ad viam. Basileae prope curiam Naviculariorum ad Rheni pontem. In arenosis *Wiesae*, & *Rheni*. Bernae etiam circa *un Stukhof* nascebatur, nunc destructa.

Huic caulis hirsutus, angulosus, caeterum sulcatus, parum firmiter erectus tripedalis, ramosus & brachiatus. Folia Jacobeae vulgaris similia, qualia Linnaeus *lyrata* vocat, longe petiolata, semipinnata, pinnis angulosis sensim majoribus, ultima impare maxima obtusa, omnibus angulosis, & maximis paucioribusque dentibus incisis. In caule haec omnia angustiora sunt, dentesque tanti, ut folia semipinnata sint. Tota cum nervis hirsuta sunt. Calycis folia patula, duo modice deorsum gibba, omnia subhirsuta, decidua. Petala longo petiolo, bractea rotunda, de calyce duplo longiora se efferunt, colore ochroleuco. Glandulae quatuor, positae, ut in priori planta 17. Fructus subhirsutus, tetragonus, cornu brevi, capitato, obtuso. Siliquarum petioli ad magnum angulum de caule recedunt, ipsae sursum recurvae, cauli pene parallelae, obtuse tetragonae, turgidae, sescunciales. Semen oblongum.

 Eadem

Eadem in *Arve* fl. alveo, inque veragrico agro, & in Valesia fere flavo flore nascitur.

Haec est *Sinapi sylvestre Genevense* J. B. II. *p.* 858. in alveo *Arve* lectum; uti ex plantis video, quas ex loco natali Cl. le CLERC ad me misit.

19. *Eruca Tanaceti folio* MORISONI. Pari jure, ut pleraeque Basileenses, & Genevenses pro Helvetica haberi potest, quam Cl. CLARET ad pedem montis S. Bernhardi in valle Augusta legerit.

20. *Brassica perfoliata* potest helveticis accenseri, quae circa Mulhusiam proveniat.

21. CARDAMINE *foliis pinnatis pinnis laciniatis*, saepe quidem apetala est, atque solis suis staminibus albis, de calyce eminentibus, florem mentitur, sed eadem tamen, in ipsa Suecia, alias petala alba calyce majora produxit (LINN. *flor. suec. nov. ed. p.* 464.).

22. CARDAMINEN *trifoliam* raram civem foliis hederaceis angulis in argutos denticulos exeuntibus, habuit inter suas Cl. le CLERC.

CARDAMINE *alpina bellidis folio*, *glabra*, quidem nuper a me in M. *Enzeinda* lecta est, & in summo *Pennino* a Cl. CLARETO.

23. Sed alia, neque a nobis dicta planta, & ex M. *Baldo* cum eo nomine mihi missa est, & lecta in M. *Sur champ* agri Aquilegiensis, penitus omnino diversa. Huic folia integerrima, ovata, radicalia, hirta & aspredine scabra. Caulis trium quatuorve unciarum, uno alterove folio ovato lanceolato ornatus, simplex, habitu omnino Turritidis ramosae vulgaris, sed flore toto differt, & fructu. Flos enim grandis, triplo ejus plantulae florem superat, idemque petalodem album calycem habet, deorsum insigniter gibbum. Petala lactea, ovata. Siliquas grandes latissimas ad lineam unciales, cornu brevissimo simplici, erectas praefert, & cauli parallelas. Num elasticae resiliant, seque convol-

vant,

vant, non rescivi. Videtur ex loco natali esse *Cardamine* 5. SEGUIER *veron.* p. 387. Nomen meretur, si glandulas habet, quod nunc quidem expedire nequeo, ARABIDIS *foliis radicalibus ovatis integerrimis scabris, caule subnudo*. A *Turritide minori* flore grandi separatur, latisque siliquis, & caule non folioso.

PAPILIONACEAE.

24. ASTRAGALORUM primum genus oportet expedire in quo ob specimina imperfecta, & fructus potissimum defectum multa mihi, dum majus opus scripsi, dubitatio, neque absque errore fuit. Nunc copia collecta exemplorum, & fructubus maturis conquisitis, haec possunt expediri.

Removere vero oportet ab Astragalis, primum Tragacantham, quae *alpina sempervirens flore purpurascente* J. R. H., & GARIDEL in ic.

In M. *Jeman*, *Cheville*, & inter *Javernaz*, & *Ovannaz* montes, a D. RICOU primum reperta, tum a D. des *Coppets*, aliisque

Radix lignosa, maxima, ramosa, multiceps. Caules pedales, foliosi, ramosi. Petioli foliorum in spinulam terminantur, eorumque petiolorum reliquiae superstites, acuminatae, caulem circumstant. Folia subhirsuta, ovatis angustioru, pinnarum septem ad decem. Flores fructusque ad basin caulium congesti. Fructus hirsuti, turgidi, teretes, duri, breves. Calyx hirsutus, cylindricus, quinque longis & hirsutis dentibus. Flos longus, strictus, albidus. Vexillum emarginatum, venis saturati purpurei coloris pictum. Alae petiolum habent capillarem, hamum brevem & obtusum. Carina brevior, quam alae, hamis brevibus, obtusis, rostrello purpureo, mucrone perbrevi. Caeterum flos pallide carneus est. Stamina novem connata, unum singulare. Tuba filiformis longa, sine paullum crassiori. Siliqua constanter unilocula-

cularis, in ea quatuor nigra, reniformosa semina, aliquibus membranulis & septulis interstincta, non parallelis ad valvas, sed oblique & transversim normalibus.

A Massiliensi Tragacantha, quam a variis amicis accepi, non videtur differre.

Sive velis generis tueri dignitatem, sive alteri alicui generi addere, certe ex nostris experimentis cum Astragalo non potest relinqui. Si omnino alii Cl. viri Tragacanthas biloculares viderunt, erit in ipso genere varietas loculorum. Nimis enim multos fructus aperui, ut potuerim in meis septum praetervidisse.

25. Porro aliquot ab Astragalis plantas oportebit removere, quas ignorata fabrica fructus pro astragalis habui.

Astragaloides sive *phaca* adeo similis est *Astragalo*, ut vulgo cum ea conjuncta fuerit. Neque tamen sola siliqua differt, quam astragali nonnulli perinde inflatam habent, & ovatam, sed praeterea partium floris proportione. Cum enim *Astragalis* flos fere strictus, & vexillum praelongum esse soleat, *Astragaloidi* multo brevior, & ejusmodi est quales in viciis, in iis certe quinque phacae speciebus, quas inter meas habeo, & quarum tres sunt helveticae.

I. PHACA *caule procumbente foliis ovato lanceolatis*

Astragalus quidam montanus, *vel onobrychis aliis* J. B. II. *p.* 339.

Astragalus montanus LINN. *spec. p.* 960. *n.* 24.

Post priora lectus ad pedem rupis glacialis *Steinbey* in M. *Chapuise*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Sur champ*, *Ovanna*, *Enzeinda*, *Prapioz*, *Breitlawenen*, *Stokhorn*, *Galanda*, plerumque in lapidosis deciduis. Haec planta Astragalos inter, & Astragaloides sive phacam ambigit. Habet enim siliquam teretem, ovatam, lanceolatam, inflatam, hinc convexam, inde cava linea sulco divisam. In ea linea commissio valvarum mediam superiorem partem siliquae valde breviter elevatam contingit, eique araneosis nexubus adaptatur; &

ex

ex receptaculo utrinque seminales funiculi exeunt. Semina in duos ordines disposita utrinque ad decem, compressa, reniformia. Adulta siliqua calvescit, & omnino absque vestigio bilocularis naturae est, unaque folia contracto margine lanceolata fiunt, ut alia tunc planta videatur. Eos tamen loculos non membranaceum adeo alicujus longitudinis septum, sed contiguitas receptaculi ad mediam superioris convexitatis siliquae sedem elevati dividit. Caeterum flores breviter spicati, ad angulos rectos, rectisque minores, tum ipsi, tum siliquae eriguntur: iidemque flores breviori sunt vexillo, quam in *Astragalis* solent & latiori, ut *Viciae* florem penitus referat. Folia incerta figura ludunt, ovata, & ex ovatis lanceolata. Caules foliosi, auriculis ovato lanceolatis, ad originem folii positis, spica florali terminati.

26. II. PHACA *caule procumbente; foliis ovatis, siliquis pendulis* Enum. n. 10.

Astragalus alpinus foliis viciae ramosus, & procumbens flore glomerato oblongo albo caeruleo SCHEUCHZER *itin.* VII. p. 509.

Astragalus alpinus minimus LINN. *fl. lapp.* p. 261. T. 9. f. 1.

Similibus locis, uti prior, sed aliquanto rarior. In lapidosis circa glaciales rupes *Steineberg*, *Stokhorn*, *Chapuise*, *Enzeinda*. Cl. RAMPSPEK in M. *Miirtschen*, *Galanda*.

Vere a n. 25. differt, floribus rarioribus, minus in eadem spica numerosis, petalis magis distinctis, vexillo striato, floribus, & siliquis pendulis, radicibus, quae priori pedales, huic minimis, etsi lignosae sunt. Caeterum fructus ejusdem naturae est, hirsutus, niger, & unilocularis, nullo septi vestigio, idemque in meis curvus: verum satis maturas siliquas non vidi. Ab Astragalis pariter, ut prior breviori flore differt.

27. III. PHACA *caulibus erectis, ramosis, foliis ovatis.*

Astragaloides alpina hirsuta erecta foliis viciae floribus dilute luteis TILLI *hort. Pisan. p.* 19. *T.* 14. *f.* 2.

Praeter

Praeter eos montes, quos in *Enum. Helv.* citavi, nascitur etiam in M. *Chapuise*, a nobis lecta, in *Prapioz*, in *Jeman*, *Ovanna*, *Sur champ*, *aux Nombrieux*. Adde descriptioni, radicem enormem, pedalem & cubitalem esse, caulem erectum ad pedem, & cubitum, foliorum paria quatuor, quinque, sex, mollia, hirsuta, ovata; ad eorum originem praegrandes stipulas, ovato lanceolatas; scapos floriferos ex alis prodire, spicasque ferre confertas, florum etiam retrorsum conversorum & pendulorum. Calyx cylindricus, compressus, pallens, nigris pilis hirsutus, denticulis quinque brevibus, nigro pilo totis barbatis. Flos ochroleucus, calyce duplo longior. Vexillum longe petiolatum plicatum, ovale & quasi mucronatum, album, dorso, & parte proxima flava: alae longe petiolatae, longe hamatae, ochroleucae, paullo carina breviores: carina unipes, hamis retrogradis obtusis, mucrone obtuso, curvulo, flavescente. Stamina novem connata, & decimum solitarium. Tuba filiformis. Siliquae pendulae, ovatae, mucronatae, styliferae, inflatae, intus glabrae, uniloculares, seminibus reniformibus.

28. Iterum ex fructus ignoratione mihi, & LINNAEO *spec. p.* 756., & ante nos SCHEUCHZERO accidit, ut inter Astragalos recenseremus HEDYSARUM *caule recto*, *ramoso*, *foliis ovatis*, *siliquis*, *levissimis*, *venosis*.

Hedysarum alpinum siliqua levi C. B.

Eam nunc plantam, multis locis, & diversis anni temporibus, repertam, utique rectius constituo.

Radix longa, crassa, lignosa, teres, nigra, multiceps. Caulis erectus, ramosus, dodrantalis, pedalis, etiam cubitalis. Sub foliis vaginae squalentes, siccae, longae, aristatae. Folia venosa, ovata, parium novem & ultra. Spicae in scapis ex foliorum alis prodeuntibus, floresque reflexi & penduli: calycis dentes subhirsuti, inferiori longissimo. Flores Hedysari, vexillo quam carina breviori, reflexo, plicato, emarginato. Alae carina breviores graciles, hamo lon-

go

go retrogrado. Carina pene normalis, obtusa, omnibus petalis major, ex caeruleo purpurea. Fructus articulatus constat quatuor, aut quinque, articulis ovatis, planis, nervosis, alatis, monospermis per graciles isthmos sibi continuatis. Sibirica planta non videtur diversa, fructu, flore, folio, habitu. Sola magnitudo floris nostras separat.

Nascitur in M. *Ovanna*, *Sur champ*, *Chapuise*, *Enzeinda*, *Fouly*, *Orgevaux*, *Neunenen*, *Stokhorn*, *Pilato*, *Breitlawenen*, *Wangenalp*, *Nombrieux*, *Schilt*, *montibus Switensium*.

29. Astragali veri praeter hos, quos nunc recensebo, in helvetia non sunt reperti. Quis sit *Astragalus II.* CLUS. *p.* CCXXXIIII., aut C. B. *helveticus* ignoratur, & difficile est conjecturam facere, quemnam potuerit cum *Orobo sylvatico purpureo verno* comparare CLUSIUS. Neque de Astragalo 12. 13. & 14. quidquam mihi ultra innotuit.

Vulgarem procumbentem omitto, & *Glaucem* RIVINI.

Qui sequuntur, veri sunt Astragali.

30. I. ASTRAGALUS *caule erecto*, *ex aliis spicifero*, *siliquis teretibus hirsutis Comm. Gott.* 1752. cum icone.

In Helvetia; circa castellum Octodurense, vetustate dirutum, in herbosis abunde nascitur, ibi lectus a me an. 1757.

An hic fuerit *Astragalus pilosus* LINN. *Spec. p.* 148.

Cicer montanum lanuginosum erectum C. B. *prodr. p.* 148.

Ad descriptionem alias datam remisisse liceat.

31. II. ASTRAGALUS *caule erecto*, *ramoso*, *foliis linearibus hirsutis*, *spicis erectis terminatricibus Enum. p.* 567. *n.* 7.

Onobrychis purpureo flore CLUS. *Pann. p.* 751.

Inter *Leucam* & *Siders* in herbosis abunde, etiam inter *Orsieres* & *Bovernier*.

Fructus, quem nunc demum vidi, brevis, vix trium linearum, subhirsutus, turgidus, curvo stylo instructus. Semina utrinque fere tria, nitida, reniformia, sed hilo eminente.

Hi

Hi astragali caulibus ramosis: qui sequuntur sunt scapis spiciferis de radice prodeuntibus, neque ramosis, neque foliosis.

32. III. ASTRAGALUS *caule diffuso, foliis ovatis subhirsutis, scapis radicalibus, vexillo longissimo, siliquis teretibus* Enum. n. 2.

Astragalus monspessulanus J. B. II. p. 338. (idem enim monspelio missus est) LINN. *spec. p.* 761. idemque *Astragalus alpinus magno flore* C. B. *Enum. l. c. n.* 3.

Abunde in via *Tombey*, proxime super *Olon*.

Radix cubitalis, lignosa, inmensum cespitem caulium fundit, & ipsos cubitalis diametri. Folia decem parium, eaque ovata, dum juniora sunt subhirsuta, & obtusa. Flos autem longus ad unciam, strictusque. Calyx longus, cylindricus, etiam roseo colore tinctus, superius excisus, longis rectisque segmentis. Vexillum, ut in praecedente, & in trifoliis, praelongum, strictum, plicatum, emarginatum, purpureum. Alae, quod in tota classe rarissimum, emarginatae in partem magnam & parvam divisae, pallidi coloris: Carina brevior, obtusa, saturate purpurea. Stamina novem connata, & unum singulare. Siliqua longa fine recurvo, tota gracilis, per maturitatem dura, uncialis, teres, paullum incurva, convexa, valvularum commissura latiori. Semina in utrovis loculo quinque & sex, nigra, reniformia, sed superiori parte super hilum crassiori.

33. IV. ASTRAGALUS *scapis aphyllis, siliqua turgida ovato lanceolata stylifera, foliis ovato lanceolatis serviceis Enum. n.* 5. *T.* 5.

Praeter scopulos *Neunenen* etiam nascitur inter *Charat* & *Saxen* Vallesiae.

Adde descriptioni folia sericea, splendentia, nonnunquam satis calvescere. Calycem pariter sericeum cum fructu superesse, qui nigro villo hispidus, ovalis inflata est siliqua, constanter acumine terminata. Semina in duobus loculis numerosa: matura non vidi.

14. V.

34. V. ASTRAGALUS *ſcapis aphyllis foliis lanceolatis hirſutis*, *ſiliqua villoſa*, *inflata*, *ovata*. *Enum. n.* 8. *ic. T.* 13.

Aſtragalus Pyrenaicus barbae joris folio non ramoſus, *flore ochroleuco glomerato* SCHEUCHZER *It. alp. IV. p.* 330.

Aſtragalus campeſtris LINN. *ſpec. p.* 761. *n.* 30. Nobis utique alpinus eſt, neque in humiliores montes, aut *Juram* deſcendit.

Praeter priora loca nuper in itineribus legi ad M. glaciales *Steineberg*, & in *Wangenalp*, *Prapioz*, *Enzeinda*, *Ovanna*, *Fouly*.

Deſcriptioni adde, radicem enormi ſaepe craſſitie, & pollicarem reperiri. Fructum brevem, hirſutum, vehementer turgidum, ovatum ſtyliferum, ſepto diviſum eſſe. In eo ſemina numeroſa compreſſa reniformia.

35. *Coronilla prima Enum. ſive minima* J. R. H. naſcitur *au Richard*, & *Sur champ*, tum in M. *Jeman*, & inter S. *Aubin*, & M. *Falconiarum* & alibi. A ferro equino inprimis ſiliquis diſtinguitur, quas pendulas habet incipientes ex petiolo nodo circulari, deinde articulis conſtantes tribus, quatuor, & ultra. Ovati ſunt articuli, utrinque acuminati, & complanati, cum acie utrinque. Facies plana linea eminente ſeparatur. Acies habet alas membranaceas eminentes duas, interque eas duas lineas pariter paullum, ſed brevias elevatas. In articulo ſemen phaſeoli forma, longius, parum inciſum. Tamen etiam folia huic coronillae magis perfecte ovata, & craſſiora ſunt, parium fere quatuor & quinque in noſtris, cum extremo impare. Stipulae fuſcae, argute lanceolatae, gemellae. Longiſſima & craſſiſſima radix.

Haec eſt, quam Cl. GAGNEBIN reperit au *Rocher de la Chage des Corbeaux*, *Milledeux*, & à *Refrein*. Certo cum nomine *minimae* ex Gallia & Pedemontio amici miſerunt. Sed etiam Hiſpanica planta, in horto culta, noſtrae ſimilis eſt, diverſa tamen ſtipulis rotundis, aut nullis.

36. Ab ista *Coronilla* diverſiſſima eſt *quarta Enum. p.* 574. *erecta*, *foliis maximis*, *ovatis retuſis in acumen exeuntibus*, ſiliquis neque alatis, neque aciem habentibus, abitu minus duro. Conf. *Enum. Gott. p.* 268. Cl. GAGNEBIN reperit au *val de Ruz*. Ego maxima copia in M. *Kunisberg* prope Jenam, tum in ſylva *Welmeſen*. Cl. MIEG circa *Farnſpurg*.

Neutram, quod mireris, habet LINNAEUS, quarum utraque multis locis proveniat, & paſſim deſcripta ſit.

37. OROBUS *caule erecto*, *ramoſo*, *foliis ovato lanceolatis Enum. Helv. n.* 2., *qui Orobus alpinus latifolius* C. B. *Prodr. p.* 149.

An *Orobus* 8. LINN. *ſpec. p.* 729.?

In M. *Luan*, in *Ovaille* ſylva, in M. *Nombrieux* & alibi in Aquilegienſium montoſis abunde naſcitur.

Ex ſpecioſiſſimis papilionacearum. Caulis erectus bicubitalis, & ultra, ſulcatus & anguloſus: folia numeroſa, adſcendentia; ſtipulae ſub ramis grandes, deorſum hamatae, ex ovatis lanceolatae, ſerratae. Foliorum paria quatuor, parum ovato lanceolata, glabra. Ex alis foliorum perpetui ſcapi florigeri, foliis nudi, anguloſi, dodrantales. Florum ſpica laxa, iidemque, quando matureſcunt, retroverſi, penduli, heteromalli. Calyx cylindricus compreſſus: ejus ſegmenta ſuperiora brevia, lata, curvula, ſe mutuo reſpiciunt; inferiora recta, & triangularia ſunt. Flos longus, ochroleucus. Vexillum anguſtum, replicatum, conduplicatum, quaſi emarginatum, dorſo flavo. Alae obtuſae, mucronatae, carinae longitudine, hamis binis obtuſis. Carina petiolo fiſſili, bractea recta modice roſtrata. Stamina novem connata & unum ſolitarium. Tuba fine latiuſculo. Siſiliqua praelonga glabra, polyſperma; ſemina matura nondum vidi.

Orobi caule ramoſo nomen nunc reformare oportet, ut ſit *Orobus caule ramoſo erecto*, *foliis ellipticis obtuſis*.

38. VI-

38. VICIAE nova in Helvetia species nostris addita est a Cl. CLARETO, circa octodurum lecta, quam, quia multa habet vulgaris multiflorae similia, eo accuratius oportet definire.

Caulis in radicem annuam, exiguam continuatur, debilis idem, pedalis & cubitalis, ramosus, foliosus, striatus, subhirsutus. Stipulae peculiares bipartitae, portione superiori majori, utraque striata, lanceolata, aristata, saepe serrata: duobus inferior inprimis dentibus, superior etiam quinque & septem ita magnis notata, ut pene semipinnata sit. Foliorum paria ad octo, dura ea, nervo conspicuo, linearia, ut tamen latescant ad finem, qui obtusus est, & arista distinguitur, lata ad lineam. Scapi florigeri quatuor & ultra unciarum. Spica rara, flores in pedicellis vix lineam longis, ipsi 9. ad duodecim numerantur. Calycis duo segmenta superiora brevissima, ad se invicem curva, tria inferiora majora triangularia, omnia subhirsuta. Vexillum reliquis petalis multo majus, sature caeruleum, fere totum coloratum, petiolo brevi, elevatum, emarginatum. Alae carina longiores, hamis obtusis, bractea rotunda caerulea. Carina bipes fissilis hamis obtusissimis, tum mucrone, qui caeruleus est; cum reliqua carina alba sit. Siliqua glabra plana, lata, & in medio latior. Semina ad duodecim: maturam non vidi.

Cum descriptione *Viciae onobrychidis flore* convenit C. B. *Prodr. p.* 149., & cum nomine *angustifoliae purpuro violaceae filiquis latis glabris* ex Delphinatu missa est, sed ea, cum semina tantum quatuor habeat, nostra non est. Erit adeo *Vicia* 6. LINN.

A *multiflora* segetum floribus multo grandioribus, paucioribus, stipulis serratis, siliquis pro portione longioribus, & magis polyspermis, toto habitu duriori differt.

39. *Clymenum Parisiense* passim in Helvetia nascitur. Reperi abunde in pratis ad lacum Lemanum prope *Ebro*, tum

 ad

ad *Broyam* fl. inter la *Sauge* & *Sugy*, & in pratis paluſtribus inter *Chambon* & *Cheſſel*. Cl. GAGNEBIN circa *Landeron*.

40. Inter plantas THORELLII helveticus omnes, & circa *Vevai* inque Aquilegienſi ditione lectas, fuit *Anagyris foetida*: locus autem natalis nullus additus eſt.

41. Inter Geniſtas certo diverſa eſt ab ea, quae eſt *hyperici folio*, ſpecies a Cl. GAGNEBIN reperta à la *chaux de fond dans la grande pature la Breche*, & in Burgundiae Ericetis; tum a D. CHATELAIN a *Roulier mairie de la Brevine*. Haec ſtirps & a me, & a Cl. GARCIN pro varietate habita *Geniſtae* 2. *Enum.*, vere differt, mereturque novum nomen GENISTAE *caule decumbente ramoſo*, *foliis ovatis*, *floribus longe petiolatis*. Comparavi ſollicite cum Geniſta foliis hyperici, cui propior eſt, & multa reperi ſimilia, etiam anguloſos caules & ramoſos. Folia non valde differunt, niſi quod piloſa magis ſunt, neque ſericea; caeterum ovatis longiora, obtuſa. Petioli florigeri incipiunt differre: hi enim in *hyperici-folia*, germanica & monſpelienſi, breves ſunt, linea paullum longiores, ut flores ſeſſiles videantur: in noſtra unciam aequant. Porro flos proportione multo major eſt, & plus duplo. Calyx, qui *hyperici-foliae* ſtrictus, ſuperiora duo ſegmenta aequalia lata triangula & acuta habet, inferiora tria connata, huic campaniformis eſt, bilabiatus & ſegmenta duo ſuperiora connata curvula, breviter ſeparata habet. Vexillum ex breviori proportione petiolo, amplum eſt, & emarginatum, venis pictum. Alae evidentiori hamo, proportione latiores. Carina, quae illi obtuſiſſima, huic roſtrum habet, modice acutum. Porro vexillum & carina *hyperici-foliae* exterius ſericeae ſunt, in noſtra glabrae. Totus denique habitus mollior noſtro eſt, & folia minime aut dura, aut plicata, minorque pars ramorum indureſcit.

42. *Me-*

42. *Medicae* 3. *Enum.* in colore varietas fere ejusmodi est, ut exterior vexilli pars ex violaceo in flavum langueat; unde, dum clausus flos a vexillo fere totus continetur, idem violaceus apparet, explicatus autem ochroleucum colorem expedit, qui in nostris flavo frequentior est.

43. TRIFOLIUM *pratense purpureum minus foliis cordatis Enum. helv. n.* 13. *p.* 585. nunc, utrisque speciminibus comparatis, conjungo cum *Trifolio caule hirsuto, scabro, foliis mollibus, integerrimis spicis subvillosis ochroleucis* Cl. LACHENAL *p.* 2., quod Cl. vir in M. *Vogelberg*, & versus *Schaumburg* & *Prattelen*, & D. BERDOT *in monte Beligardo* reperit. Folia ima saepe cordata, emarginata; superiora sub floribus stricta & linearia sunt, omnia dentibus destituuntur, & ea nota ab *albo* pratensi distant. Ad originem foliorum caulinorum vaginae venosae, bicaudes, caudis ex latiusculo principio longe subulatis. Spicae brevi petiolo super folia se efferunt, floresque longos & strictos habent, ochroleucos. Dentes calycis quatuor graciles, aequales, imus latior & longior, omnes ex lateribus molliter pilosi.

Non habet LINNAEUS.

44. TRIFOLIUM *flosculis albis in glomerulis asperis cauliculis proxime adnatis* VAILL. *T.* 37. *f.* 1., & a Cl. LACHENAL in arenosis ad Birsam, & a me an. 1757. in arcis S. *Triphon* area, cum *medica echinata*, maxima copia repertum paullo accuratius nunc describo. Ex una radice, numerosi caules nascuntur, secundum terram prostrati, semipedales & aliquanto longiores. Folia firma, subhirsuta venosa, obtuse rhomboidea, ex angulo initio facto, fine in arcum. Capitula parva, sessilia ad foliorum alas, subaspera ob calyces grandiusculos. Ii campaniformes, contracti pene globosi, dentibus quinque triangularibus, quorum duo superiores minimi, medii mediocres sunt, imus minimus. Flos paullo calyce longior, strictus, inapertus, albus. Vexillum plicatum, sursum flexum, alarum hamus brevis, & quatuor petala distincta.

45. In

45. In Anonide 5. five *fpinofa lutea minore* C. B. funt quae emendes. Adfinis *pufillae glabrae anguftifoliae*, quae monfpelio cum nomine *minutiffimae* LINN. *n.* 3. *p.* 717. miffa eft, tamen differt foliis totoque habitu hirfutis. Caulis humilis vix fex unciarum ramofus, parum erectus, totus obductus foliis & ftipulis ficcis lineatis, lanceolatis, ariftatis, & dentatis. Folia hirfuta, & aliquantum vifcida, in forti petiolo ternata, pene ovata, argute circumferrata. Flos feffilis: calyx patulus, profunde in quinque lanceolatas, lineatas, longe ariftatas, partes fiffus. Vexillum pallidum, purpureis lineis pictum, peramplum, ovale, plicatum. Alae faturatius flavae, quam carina longiores, hamatae. Carina ad obtufum angulum flexa, mucrone obtufo, in lato, breviffimo petiolo. Tuba filiformis. Fructus brevis, ovatus, fub-conicus, turgidus, niger. Semina quatuor flava, phafeoli fimilia, fed breviora. Abunde fecundum viam le *Tombey* & circa *Bex*, & in M. *Fouly*.

RINGENTES ROYEN.

46. LENTIBULARIA *minor* in paludofis à la *Chètelaz* vallis minoris Monafterienfis reperta eft a Cl. GAGNEBIN. Eam Cl. LINNAEUS in *flor. fuec. p.* 10. defcriptam dedit.

47. *Euphrafiam tenuiffime difsectam* vere a vulgari minori flore differre vehementer dubito. Abundat circa *Bex*, *Agaunum*, etiam verfus fontem *Furet*.

48. Pedicularibus nullam novam fpeciem addo, plerafque aliis in locis repertas confirmo.

In mucronatis illis fructibus fpeciei I., ultimae, & procul dubio aliarum etiam alpinarum, loculi fepto imperfecto diftinguuntur, quod paullatim verfus apicem fructus evanefcit, ut in fummo cornu loculus unicus fit.

49. *Pedicularis* 3. Enum. ab eo tempore a nemine in Helvetia reperta, neque a LINNAEO repetita, tamen ab omnibus nostris differt, adfinis quidem primae, sed rostro floris multo breviori, foliorum etiam pinnulis brevioribus & obtusis.

50. Contuli etiam cum Cl. virorum plantis meas. *Pedicularis* I. J. Fr. SEGUIER est omnino nostra 8. Non autem *Pedicularis foliis bis pinnatis, calyce non cristato, floribus ochroleucis in spicam nudam congestis* Cl. ALLIONE *p.* 50. *T.* 11., quae quidem non foliorum longiorum de spica eminentium defectu a nostra differt, sed foliis multo minus profunde bipinnatis.

51. *Pendicularis foliis alternis, pinnis semipinnatis floribus rostratis ochroleucis dense spicatis* ALLIONE *p.* 51. *T.* 11. differt a nostra *atrorubente* nervo non folioso, atque adeo ad eam pertinere nequit: adque nostram certe PEDICULARIS *foliis alternis pinnis semipinnatis floribus laxe & longissime spicatis* EJUSD. Cl. viri p. 54. T. 12. ob eam notam potius accedit.

PEDICULARIS EJUSD. p. 52. T. 12. f. 1. ab omnibus nostris differt.

PEDICULARIS *caulibus reflexis spica laxa purpurea* SEGUIER p. 125. est omnino nostra 2.

Pedicularis alpina lutea EJUSD. p. 126. habet multo tenuiora folia, & minus repetito pinnata, quam nostra ejus nominis.

52. Cymbalariam hybridam esse, & ex utraque Elatine adulterio provenisse dicitur a Cl. Auctore *plant. hyb.* n. 30. Glabritie fabrica, foliis, sede natali ab utraque differt, nam segetales sunt, cymbalaria autem est muralis; & nascitur iis locis, quos nulla Elatine frequentat; ab iis vero perpetuo abest, in quibus utraque abunde provenit, segetibus nempe etiam frigidioribus Germaniae Septentrionalis & Helvetiae.

VER-

53. Nova civis est Cassida *procumbens*, *foliis ovatis*, *crenatis subhirsutis*, *spicis foliosis*.

Nisi a Scheuchzero forte cum nomine *Teucrii inodori magno flore*. *Itin. V. p.* 428. describitur, non addito loco natali. Certe fructus, eo loco dictus, ad *Cassidam* utcunque pertinere videtur, cum *quatuor* ei *loculamenta* tribuat Scheuchzerus. Sed *atropurpureus flos*, quem dicit *Itin. VII. p.* 519. & nigredo, quam in foliis supervenire addit Idem *Itin.* I. p. 50. & IV. l. c. & locus, quem in alpium saxosis ponit, tanquam plantae vulgo notae; denique, quod *Staeheliniae* nunquam meminit, quam multo minus quam nostram, raram certe stirpem, praetervidere non potuit, haec faciunt omnia, ut eum Cl. Virum *Staeheliniam* teucrii nomine voluisse persuadear. Nostra enim Cassida unico hactenus loco in Helvetia certo visa est, in M. *Fouly*, secundum lacum.

Speciosa planta radicem habet sesquipedalem, ramosam, teretem; caulem procumbentem, ramosissimum, ramis dodrantalibus & pedalibus. Folia petiolata, ex ovatis obtusa, mucronata, & obtuse pariter dentata. Bracteae ovales, subhirsutae, integerrimae. Flores spicati, congesti. Spica dum floret uncialis. Calyx, qualem character generis requirit, brevioris calcei similis. Flos speciosa magnitudine: labium superius caeruleum, subhirsutum: segmenta lateralia duo subrotunda: pars inferior palato contra galeam tumet; barba obtusa emarginata, parva parte caerulea, reliqua alba & pallente.

A *Cassida spicis foliosis* praeter colores differt foliis glabris, bracteis pro portione floris minoribus, caetera valde similis.

54. Salviam helveticis addo.

SALVIA *foliis petiolatis, cordiformibus, obtusis, verticillis nudis.*
Horminum sylvestre III. CLUS. *p. XXIX.*

Nascitur in M. *Luan*, in ipso pago *Leisin*, in pratis circa *Escharpigny*, & in rupestribus prope *Roche* versus scaturiginem le *Furet*.

Folia longe petiolata, circa petiolum emarginata, circumserrata, hirsuta. Ima saepe duas auriculas habent, petiolo sub ipso folio adnatas, exiguas, serratas, a CLUSIO minime neglectas. Caulis longe nudus, frequentibus, nudis, densis, florum verticillis ambitur, qui breves, aequales, in circulum non longum, multoque foliis minorem congesti caulem ambeunt. Flores in hoc genere ex minimis, quos recte *lavandulae* flores non superare CLUSIUS monet. Calycis dentes superne tres, inferius duo, triangulares, majores. Flos sature caeruleus. Vexillum cavum, simplex, integrum, cochlearis similitudine. Alae laterales ad perpendiculum longiores, barba profunde excisa. Antherae duae in bifidi filamenti altero cornu sessiles.

55. HORMINUM *foliis cordato obtusis, caule nudo*, LINN. spec. p. 590.

Melissa pyrenaica caule brevi plantaginis folio J. R. H. MAGNOL *hort. Monsp.* cum icone.

Cl. SCHINZIUS legit in alpe *Teuri* & *Alveney*, & mecum communicavit Cl. GESNERUS.

Folia ad terram petiolata, perfecte ovata, circumserrata. Caulis dodrantalis, pedalis, pene aphyllos, praeter bracteas aliquas, ex ovatis lanceolatas, integerrimas. Verticilli pauciflori, in meis plerumque ad alterum latus conversi, ad caulem sessiles. Calycis de more tres dentes sursum reflexi, duo alii deorsum, omnes aristati. Flos grandis, peculiariter latus, eminente tuba, quem recentem non vidi.

56. CATTARIA *hispanica betonicae folio* circa Rupem ubique provenit, in scopulis versus scaturiginem le *Furet*, in sepibus *aux Gauges*, passim etiam in via regia.

Sed aliam speciem Cattariae indigenis addidit Cl. le CLERC, ad pedem M. Jurae lectam, quam etiam circa *Wasen* SCHEUCHZERUS indicat.

CATTARIA *tomentosa*, *foliis longe acuminatis*, *acute crenatis*. *Cattaria angustifolia minor* J. R. H.

Cum *Cattaria vulgatissima* convenit, caeterum folia proportione multo longiora habet, & angustiora, tota cum caule albo tomento obducta, calycem perinde tomentosum. Flos violaceus: odor virulentus pulegii.

57. MELISSA offic. utique sponte provenit, passim circa *Rupem*, *Aquilegiam*, (*a Verpousaz*) Octodurum, a *fulleyn*.

58. LAVENDULA *angustifolia* in monte *Vully* super vineas maxima copia in sabuletis a me lecta est, tum a D. DIVERNOI in desertis montium.

59. HYSSOPUS ad rupes Valesiae & Delphinatus: *Rosmarinus* non vere quidem spontaneus, in rupibus supra *Ivorne*, tum ad pedem gypsariarum rupium prope *Bex*, & alibi se sponte propagat, atque arborescit.

MENTHA *angustifolia I. spicata* C. B. a D. GAGNEBIN haud longe a *Ferriere*, in Burgundia quidem a *Goumey* prope *Dubim* fl. tum à la *laiche*: a me in vallis Vaudensis viis publicis reperta est, haud longe Vivisco.

Mentha palustris verticillata ab *Arvensi* staminibus eminentibus *Enum. Gott.* diversa passim in Helvetia provenit, ut circa *Anet*.

60. *Marrubiastrum vulgare*, *quod stachys minima* RIV. circa *Bevieux* in segetibus legi, & in vineis *Mulhusiae* Cl. HOFER *Act. helvet.* T. II.

61. CALAMINTHA *pulegii odore* florem valde similem habet *montanae Germanicae*, cum qua frequentissima nascitur circa *Roche*. Sed quae pulegii odore est, florem habet multo minorem, dilute violaceum, tubam tamen proportione longiorem, folia rotundiora. Altera habet folia acuminata, grandiora multo, florem purpureum, duplo majorem, tubam breviorem.

62. MOL-

62. MOLDAVICA *foliis fasciculatis ellipticis, integerrimis, nervo divisis.*

Chamaepytis Austriaca RIVIN. T. 73.

Passim in montibus Aquilegiensibus provenit *aux Nombrieux*, *à Prapioz*, *Sur champ*, & in M. *Richard*.

Cum *Ruyschiana glabra foliis integris* AMMANNI omnino eadem planta est, ut specimine Gmeliniano cum alpinis collato facile confirmavi. A *Ruyschiana foliis cartilagineis*, pariter ex Sibiria missa, manifeste differt, foliis quidem tenuioribus, nervo medio eminente divisis, qui in Sibirica nullus est, foliis novi rami longis, quae isti brevia sunt, unde habitus fasciculatus; calycis aristis multo brevioribus: caeterum neutrum folia partita habet, aut spinarum quidquam. Nostrae calycis segmenta quinque, supremum triangulare latius, quatuor reliqua angustiora similia. Flos uncialis sature caeruleus, hirsutus, labium superius incisum, alae sive partes laterales ovatae lanceolatae. Barba bifida, circumserrata, maculata. Stamina quatuor, antheris nigris, albo polline.

DIPSACEAE.

63. VALERIANA *foliis integerrimis, radicalibus ovatis, caulinis linearibus obtusis.*

Nardus celtica J. B. *T. III. p.* 205. & omnium auctorum.

In tenui gramine altissimorum montium ad dextra lacus *Ferraire*, tum in montibus vallis Augustae, donec e regione sis vici *Estrouble*, & supra S. *Bernhardum* CLARETUS. In M. *Scheinberg* Switensium Cl. SCHINZ. Etiam a Cl. ALLIONE accepi.

Plantae characterem nunquam, quantum video definitum, ad recentes plantas designavi. Radix odore forte & stabili, Valerianae, multis squamis obnupta, fibras plurimas cylindricas, durasque, demittit, & multos caules producit. Cau-

lis triuncialis & ſemipedalis, erectus, ſimplex. Folia ex radice quatuor, aut paullo plura, petiolo unciali latiuſculo, ipſa elliptica, aut longe ovata, obtuſa, craſſiuſcula, pallida. In caule unicum par foliorum linearium obtuſorum. Caulem terminat ſpica nuda, duobus, tribus, quatuorve verticillis florum facta. Eorum verticillorum quilibet conſtat duobus petiolis trifloris, in ſupremo unifloris. Semina anulo ſtriato, deinde evoluto pappo terminata, ut in tota gente. Flos campanula lata, patula, quinqueffida, aequalis, extus purpurea, intus fere cinerea: ſegmenta lanceolata. Tuba flava, longe eminens, terminatur tribus clavis. Stamina in his exemplis nulla. In aliis vero floribus aliorum exemplorum tres antherae flavae, grandes, ſuis in filamentis extra florem elatae, bifidae, tum flos purpureus, & tamen ſemen. Explicat rem CLARETUS, ut vere non dioica planta ſit, ſed maſcula ſtamina prima prodeant, iiſque ſeneſcentibus piſtillum trifidum ſuccedat.

A Cl. MORENIO multo majora, caeterum ſimilia exempla accepi.

Si Valeriana vulgaris laudes meruit Cl. HILLII, majorem ſpem ab iſta ſpecie licet concipere, quae in altiſſimis montibus nata, multo acrioribus ſit viribus, odore vulgarem valde ſuperet.

Celticam vero ſpicam *Valerianae maximae cacaliae folio* radicem eſſe (HILL. *mat. med.* p. 580.), comparatis ſpeciminibus, non inveni, neque ea Valeriana in Germania alpina provenit, ex qua in Aegyptum mittitur HASSELQUIST p. 537.

De Scabioſa 2. 3. 4. valde dubito.

CAPITATAE.

64. CINARA *foliis petiolatis, lanceolatis, ad pediculum emarginatis.*

Rhapon-

Rhaponticum alterum angustiori folio LOBEL ic. p. 288.

Nobilis planta, neque cognita nuperis, etsi ad medicinariam rem pertinet, nascitur in M. *Jeman* altiori dorso.

Radix crassa, pollicaris, teres, longa, aromatica quando recens est, per siccitatem rugas longas agit, & corona foliorum siccorum terminatur. Folia ad radicem multa, longe petiolata, plerumque ad lapathorum morem longe lanceolata, ad pedunculum emarginata, per oram non profunde dentata, in parte aversa albo tomento obnupta. Non rarum est tamen, aliquot paria pinnarum acutarum & gracilium ad hunc petiolum accedere. Caulis latus, digitalis, cubitum altus. Ad caulem folia pauca, similia, sed breviter petiolata, aliquando pinnata. Flos semper unicus caulem terminat, maximus inter capitatas indigenas, ut soli cinarae cedat, biuncialis undique. Squamae calycis multorum ordinum siccae, petiolatae, fine dilatato, ora lacera & laciniata, ut in Rhapontico vulgari. Flosculi omnes fertiles, semine columnari longo pappo coronato, qualis etiam in placenta est. Flosculi tubo gracili, campanula inclinata, purpurea, tuba eminente.

JACCA *incana capite pini* non recedit, etiamsi folia pleraque pinnata & aliquanto, quam nostra planta, magis villosa habet, uti quidem solent in calidis regionibus tomenta foliorum augeri. Caput enim squamaeque calycis conveniunt. Folia semipinnata MILLERI T. 153. in nostra pariter reperiuntur.

65. Carduus γ, etsi multiflorum caulem habet, non differt a n. 4.

Carduus 3. *Acanthoides* J. B. T. III. p. 56. passim a me repertus est ad vias, etiam albo flore prope *Salzderhelden*.

Caulis ramosus, flavis robustis, eminentibus lineis, & alis foliosis percursus, serratis dentibus, in flavescentes fortes aculeos exeuntibus, quales etiam ex foliorum dentibus producuntur. Folia aliquantum *carduo turbinato* affinia, pinnata, nisi

nisi quod nervus foliosus est, pinnis retroversis, singulo nervo in similem fortem aculeum exeunte, subtus pilosa. Flores summos ramos terminantes minores quam nutanti, sessiles, absque petiolis, hinc minime nutantes, squamis numerosis, vagis, etiam reflexis, in similes aculeos, non fortissimos terminatis.

66. CIRSIUM 2. *Enum.* abunde reperi in adscensu des *iles d'Ormond à la Croix*, circa molendinum *arveja*, & alias in pratis vallis *Ormond dessus*, tum in pratis vallis Juranae. GAGNEBIN *à l'échelette sur l'Anvers de Renan, au Bugnenet, aux Convey, à la ronde de Chaux de fond*, circa Monpelgardum D. BERDOT. Cl. le CLERC aux environs *de la dole*, & in M. ad *Gex* pertinente, in adscensu a *Gex* ad *Misoux à la faucille*.

Idem est *Cirsium decimum Enum.*, & demum *Cirsium nonum ejusd. Enum.*, quas species expungere oportet.

Proprium huic plantae est, habere ima folia integra, dentata, superiora vero eo magis laciniata, quo altiora sunt, donec pinnata sint, ut in polypodio, a quo nomen habent, pinnis longis, aliquot praegrandes dentes emittentibus, ut in carduis *turbinatis*, per oram molliter spinosis, extrema tamen pinna semper longiori. Caulis profunde sulcatus, cubitalis & bicubitalis, parum foliosus, sub flore tomentosus. In summo caule, & in ramis, tres quatuorve flores brevibus in pedunculis. Flos conicus, quando floret, squamis plurimorum ordinum, glabris, sublividis, mollissimo mucrone, triangulis, & eo longioribus, quo sunt interiores. Pappus plumosus. Flosculi de more gentis, alias ochroleuci, alias purpurei, cum tuba insigniter eminente. Semina ovata, compressa, linea percursa.

Vicinum *cirsio pratensi acanthoidi* folia nulla floribus substrata habet.

Proliferum etiam reperit Cl. GAGNEBIN fere singulis calycis foliis in florem imperfectum exeuntibus in pratis *de Convey*.

67. CIR-

67. CIRSIUM *foliis triangularibus*, *lunate dentatis*, *subtus tomentosis Enum. Gott. n.* 16. in M. *Fouly* florens contemplatus sum. Flores in umbellam potius, quam spicam, septem vel octo. Calycis folia hic magis, quam in speciminibus circa pontem *Diaboli* olim a me lectis, lanata, triangularia, brevia. Flosculi omnes androgyni, violacei, tubo stamineo eminente, de quo tuba leviter incisa prodit.

Non repugno esse *Cynoglossi folio* HORTI ELTHAMENSIS, etsi in Anglia, ac suecia folia lata non habet (LINN. *flor. suec. n.* 714.). Serratula vero caule ramosissimo 6. ZINNII *p.* 387. differt *flosculis* carneis calycem non superantibus.

68. Cyanum 3. legit D. LACHENAL circa Basileam.

DISCOIDEAE.

69. TANACETUM *flore nutante* nascitur in *Goldey* prope *Underseen*, repertum a D. BERDOT, & circa Mulhausen a Cl. RISLER. Characterem dedi in *Enum. Gott. p.* 371. Ab astere omnino recedit cum semina pappo destituantur, & flosculi in ambitu feminini imperfecti sunt, & absque ligula.

70. *Absinthium Romanum* vera indigena est, & ad rupes circa *Lavey* abunde nascitur.

Sic & ARTEMISIA *foliis duplicato pinnatis*, *pinnulis parallelis tomentosis Enum. Gott. p.* 372. sive *Absinthium tenuifolium* in M. *Chetillon* circa scaturiginem torrentis *Grisonne* provenit, & in Rhaetiae M. *Beverin* a Cl. SCHINTZIO lectum est, tum *à Couvet*, *à Travers*, & *au cul des Roches* a Cl. GAGNEBIN.

Artemisiae 6. Enum. Helv. folia prima sericea & incana sunt, ut aliam omnino plantam promittant.

71. Artemisiae 3. nomine duas plantas Cl. viri conjunxerunt. Earum rarior est, ARTEMISIA *foliis sericeis*, *caulinis pinnatis*, *radicalibus bis tripartitis*.

Absin-

Absinthium alpinum spicatum foliis petiolatis bis trifidis, caulinis pinnatis Cl. ALLIONE *stirp. Pedem.* T. 1. p. 5. huc omnino pertinet.

Nascitur in M. *Fouly* Valesiae, nova planta. Folia ad terram petiolata, sericeo brevi & adpresso tomento obducta, incana, tripartita. Segmentum quodlibet ex petiolo tripartitum, laterale inaequaliter, medium aequaliter. Ultima segmenta lanceolata, obtusa, obtusiora etiam in caulinis foliis. Caulis dodrantalis & semipedalis, non ramosus. Folia ad caulem sessilia, pinnata, pinnarum paribus quatuor, extremo segmento maximo, & latiori, pariter sericea. Petioli florigeri solitarii ex alis foliorum, in longam foliosam spicam digesti, cujus pars summa densior est, & petioli breviores, erecti omnes. Calycis folia ovata, subhirsuta, ora fusca. Flosculi in ambitu feminini, sola cum tuba; semine plano, pene cordiformi, & absque staminibus. Interiores androgyni, cum lutea campanula, & staminibus. Placenta nuda.

Icon BARRELIERII n. 642. & sylvii BOCCONE T. 71. huic propior est.

72. ARTEMISIA *foliis sericeis caulinis pinnatis, radicalibus petiolatis pinnatis, pinnis trifidis & quinquefidis.*

Absinthium alpinum incanum C. B.

Haec multo vulgatior, in plerisque montibus editis & frigidis, alpium tamen, provenit, tum ad Rhenum superiorem & lacum Rivarium: in alpibus Uriensium, Angelimontanorum, Abbatiscellanorum J. GESNER. SCHEUCHZER in M. *Joch Tittisperg, Gemmi.* Ego in *Gemmii* meridionali descensu, in M. *Scheidek, Mettenberg, Grindel, Wangenalp*, in alpibus Aquilegiensium *Enzeinda, Prapioz, Chapuise, Jeman, Sur champ, Richard* legi; tum *ex valle de Bagnes, S. Bernhard* & aliunde habui.

Alia planta omnino, etsi leviter adspicienti eadem videri possit. Radix brachiata multiplex, lignea, teres, tuberculosa. Folia ad radicem petiolata, pinnata, pinnarum paribus duobus,

duobus, extrema impare: pinnarum quaelibet iterum trifida est & quinquefida, sericeae quidem omnes, sed angustiores, hinc acutiores quam priori, caulis pariter subhirsutus, purpurascens. Folia ad caulem pinnata, duorum, triumve parium, pinnis angustioribus, quam prioris, & simplicibus, lanceolatis; demum simplicia ex ovatis lanceolata. Flores in petiolis longioribus etiam sescuncialibus erecti, nisi quod imi, forte soli, in gracili pedunculo nutant. Calycis folia hirsutiora, quam priori, viridiora, ora minus fusca, aut omnino alba. Circulus caeterum similis flosculorum femininorum, imperfectorum, cum interiores androgyni sint, & campanulam quinquefidam, luteolam habeant. Placenta nuda. Tota planta priori minus dura, odorata, aromatica, uti prior, sed aliquanto diverso odore. Vocant *Genipì blanc* alpicolae, & ea pariter ut Achillea in pleuritide utuntur.

Inter sibiricas GMELINI haec est *Artemisia* 95. etsi alio cum synonymo, teste planta sicca MARTINIANA. *Absinthium V.* GMELINI *p.* 128. *T.* 62. alia omnino planta est, vel receptaculo teste, altiori etiam habitu.

73. Absinthium I. Enum. seu *alpinum candidum humile* a n. 72. non differt, cui perfecte convenit figura Cl. ALLIONII. Unice minora exempla sunt, floribus nullis petiolatis, iisque in summo caule congestis.

74. *Gnaphalium* 3. *seu Americanum latifolium* omnino totum collem late operit ad dextram villae *Drakau*, supra Arolam. Non repugno vero primordia ex horto habuisse.

75. *Gnaphalium* 7. ENUM. habet multo plures flores sessiles, congestos, breviores, calycibus villosis, squamis lanceolatis, ora fusca: flosculos in ambitu pariter feminas, minimo floris tubo, & eminente cum tuba: androgynos tamen etiam numerosos, campanulatos.

76. *Gnaphalium* 8. ENUM. habet flores tres quatuorve in summo caule congestos: squammas calycis lividas fuscas, subhirsutas, oris nigris, juniores tamen penitus albas. In

ambitu flosculi feminini pauci, tuba eminente facti, & tubo florali; interius androgyni numerosi. Iis campanula quinquefida pallens, de qua tuba bifida cum pappo longe eminet. Folia prima, subrotunda. In Montibus *Sur champ* & *Richard*. Vera & diversissima planta est. Erit FILAGO *caule simplici, floribus cylindricis, fuscis, in summo caule quaternis papposis*.

77. Alia iterum planta est FILAGO 6. Enum. *caule simplicissimo, paucifloro, calyce fusco, glaberrimo*.

Gnaphalium supinum Lavandulaefolio BOCCONI p. 107. T. 85. ut videtur.

In *Wangenalp*, *Jeman*, *S. Bernhard*, montibus vallis de *Bagnes* &c.

Huic caules simplicissimi, dum floret, vix erecti, aegre triunciales, postquam defloruit etiam semipedales. Flores in summo caule tres, duo, saepe etiam unicus congesti dum planta viget; postquam defloruit remoti: proportione plantae magni, cylindrici, sed breviores quam Filagini 7.: squamae calycis glaberrimae, fuscis oris. Flosculi in ambitu pauci imperfecti, plures androgyni, campanula flava in fuscum colorem degenerante. A filagine 8. calyce glaberrimo differt, a spicata, quae etiam in alpes adscendit, habitu paucifloro, flore non conico.

Hoc est ex descriptione *Gnaphalium* 29. LINNAEI, etsi alia habet synonyma. De flosculis vero androgynis non adtinet dubitare.

78. PETASITES *floribus spicatis, flosculis paucissimis androgynis, calycis foliis lanceolatis* abunde nascitur in sylva *Traversin*, ubi legi, qua itur au *Torrent des males pierres*, & à *Roulier mairie de la Brevine* a Cl. CHATELAIN lectus, tum in valle *Ormond dessus* passim, & alibi in frigidis alpium, *Breitlawenen &c.*

Cum Petasite 3. in multis convenit, diversa tamen, non solum multo foliorum, & caulis tomento, sed potissimum etiam spica brevissima, pauciflora, flore sexuplo majori, segmen-

ſegmentis calycis lanceolatis, quae in Petaſite 2. obtuſa ſunt. Character ſimilis, & duo, vel tres unice androgyni floſculi, cum multis femininis.

XERANTHEMUM, a me deſcriptum p. 709. omnino varietas eſt vulgaris *Xeranthemi* junioris, nondum explicati, valde ramoſi.

RADIATAE.

79. INter ERIGERONTIS ſpecies oportet conjungere duas, quas primo & ſecundo loco enumeravi. Nam vere omnino continua ſerie progredi licet ab exemplaribus caule unifloro calyce albo tomento obducto, quae ſpecies in M. *Enzeinda* abunde provenit, altioribuſque montibus vallis *Bagnes*; inde ad ſpeciem 2. ejuſque varietatem *minorem*, cui calyx & folia ſubhirſuta, & denique glabra ſunt, caulis etiam uniflorus, & quae *Conyza caerulea alpina minor* C. B. eſt: denique ad varietatem 3. altiorem, cubitalem, *foliis* etiam ad caulem ſubrotundis, caule brachiato, aliquot floribus terminato, quae *Conyza caerulea alpina major* C. B. Varietatem 2. albo flore reperi in *Enzeinda*, *Chapuiſe*, *Forclettaz*, & *Prapioz*. Varietas altior creſcit in M. *Danfex*, *Richard*, *Sur champ*, & *Ovannaz*. Nomen autem melius dici poteſt ERIGERON *foliis imis petiolatis ſubrotundis, ad caulem lanceolatis, petalis femininis ligulatis*.

80. ASTERIBUS oportet tres ſpecies addere, noviter in Helvetia inventas, flavo flore omnes.

ASTER *caule ramoſo, foliis ovato lanceolatis ſubtus incanis, odoratis, floribus luteis umbellatis*.

Helenium montanum ſalicis folio ſubtus incano VAILL., ut ex ſpecimine ſicco confirmor, quod a VAILLANTIO per STAEHELINUM ad me pervenit: ſynonima vero huc referri nequeunt, cum *Aſter III. Pannonicus* CLUSII diſerte ab Ill. Viro dicatur odore carere.

Passim circa Bernam a me lectus est inter arundines supra praedium *Inseli* ad *Arolam fl.*, deinde inter salices *ausm bodenaker*, inque insulis circa *Hunziken*, & in solitudine *die Eymatte*, autumnalis planta, parum nuperis cognita. Radix lignosa, teres, deorsum fibras numerosas demittit. Caulis bicubitalis, ramosus, superne brachiatus, valde multiflorus, rectus, firmus, lineatus, hirsutus, saepe purpureus. Tota planta odore conyzae est, & pene pulegii. Folia inordinata, sicca, ex ellipticis lanceolata, rariter dentata, rugosa, subhirsuta, subtus pene tomentosa, alba. Flores in umbellam planam dispositi, dense congesti ad quemlibet ramum aliquot: Calycis folia exteriora lata, lanceolata, reflexa, vaga, duorum ordinum: interiora erecta, & ad florem appressa pariter duorum ordinum. Petala plana 40. & ultra, obtusa, quinque dentata, aliquot ordinum, sibi fere paralla, flava. Flosculi copiosissimi, discus planus. Staminum aculei retrogradi, ut LINNAEO *Inula* sit. Seminis pappus longiusculus.

Odores & colores, qui sensibus percipiuntur, quando constantes sunt, in plantarum nominibus excludere, in animalibus admittere ejus est, qui leges nutu figat atque refigat.

81. II. ASTER *foliis radicalibus petiolatis ellipticis, ad caulem lanceolatis, sub caulis divisione laciniatis*.

Aster luteus major folio succisae RUPP. p. 180. *ed. meae*, non vero C. B., qui *Inula* 4. LINN. *spec. p.* 882. uti quidem suspicor.

In Germania legeram Jenae, locis a RUPPIO citatis, tum circa *Salzderhelden*, ad *Werram* fl. prope *Witzenhausen*, & alibi. In Helvetia abunde reperi ad oras lacus Lemani, aux *Grangettes*, haud longe *Noville*.

Satis adfinis Asterisco, ejusque iconi CLUSIANAE, & ab Astere 3. Enum. *Stirp. Helv.* diversissimus est. Radix exigua, dura, capillata, multifida. Caulis hirsutus, purpureus, cubitalis aut aliquanto altior. Folia prima utique cum Suc-

cisa conveniunt, petiolata, elliptica, mucronata, perpaucis denticulis notata, aut nullis, leviter utrinque hirsuta. Folia caulina evidentius serrata, ora saepe purpurea, principio angustiori, petioli simili; inferiora latiori basi quasi caulem amplexa, ex ellipticis lanceolata; superiora etiam plicata & laciniata. Flores in summo caule aliquot, grandes, uncia latiores. Folia calycis exteriora lata caulinorum similia, retrograda: interiora angusta, subhirsuta, apicibus longe lanceolatis, reflexis, laxa, neque sibi, ut in Aftere 4. adplicata. Petala semper numerosa, quinquedentata, angusta, *plurium* ordinum. Semiflosculi minimi, discus paullum convexus, pappus longus & copiosus.

82. Aster *foliis omnibus integerrimis, ovatis, tomentosis, caule unifloro.*

Aster montanus hirsutus Lobel p. 350.

Auf der Kandermatt Cl. Koch pharmacopola Thunensis. Circa *Kentzen* Cl. Rampsek. Ego nunquam reperi. Facile adgnoscitur foliis nitentibus, sericeis, crassulis, utraque superficie albo tomento obnupta, ora levissime serrata. Ima petiolata sunt, suprema amplexicaulia, lanceolata. Flos grandis uncialis. Calycis squamae imae nitidae, non ita reliquae, latae omnes, lanceolatae, in meis speciminibus per aetatem repandae. Semiflosculi lati, aurei, quinquedentati. Flosculi numerosissimi, pappus copiosissimus. Non omnino singulares, sed duo, tresve in uno caule flores sedent.

Asterem 9. nemo recentiorem reperit.

Inulae genus, ut a minuto, & in minoribus speciebus aegerrime percipiendo charactere sumtum, totum artificiale est.

Ad *Senecionem* II. *S. Chrysanthemum alp.* 1. Clus. *Pann.* p. 566. adde abunde nasci in M. *Jeman*, & popularibus dici *Genipi Jaune*, & in montibus etiam supra *Bagnes* lectum esse, & in *Bovinaz*, montibus vallis Augustae, atque supra *S. Bernhardi* M. Caly-

Calycis segmenta unius ordinis, obtusa, nigro margine finiuntur, cum paucissimis, aut omnino nullis squamis, ad basin floris accessoriis. Petala lata, lineata, obtusa, incisa, pauca, duo, tria. Flosculi grandes & ipsi pauci: pappus praelongus.

84. *Jacobeae vulgaris* specimina prope *Roche à la marbrière* mense Octobri reperi, quae perfecte absque radiis essent.

Sencionem 6. parum diversum a *vulgari Jacobaa*, cui & ipsi juniori calycem saepe lanuginosum reperi, legi ad lacum lemanum.

De *Senecione* 12. 14. 15. 16. 17. nihil porro inaudivi.

85. *Anthemis* MICHELI *Chamaemelum* quidem est VAILLANTII, sed eae plantae, quas nunc expono, facile possunt cum *Achilleis* manere, quarum semiflosculi breves sint latique. Difficillimum vero fuerit, tres, quatuorve sibi similes stirpes separasse, quas tamen separare, vel ob vires medicas oportet, quas habent diversissimas, aliae acres, aromaticas aliae, aliae omnino nullas, quae sensibus percipiantur.

86. I. ACHILLEA *foliis pinnatis, pinnulis acute trifidis, laxe dispositis*.

Parthenium alpinum CLUS. Pann. p. 262. *hist.* p. 336.

Anthemis alpina saxatilis umbellata perennis calyce nigricante MICHELI p. 33. Vetat huc referre Cl. SEGUIER, quod uniflora sit. Verum CLUSIANA multiflora huc MICHELANIANAM ducit.

Haec species reliquis multo vulgatior, passim rivos alpinos obsidet, ut torrentis *Avançon Scaturigines* in M. *Enzeinda*, aut saxa *Gemmii*, *Gotthardi*, *Grimsulae*, *furcae* M., *Ovanna*, *Prapioz*, *Sur champ*, *Richard*, & *Chapuise*.

Radix nigra, lignosa, ramosa, fibrosa, reptans, multos caules producit, eademque gustata fatua primum, demum igneum in lingua & durabilem pyrethri saporem relinquit. Caules dodrantales, pedales, duri, inferne glabri, superne hirsuti,

hirsuti, ut petioli denique tomentosi sint. Folia sature virentia, pinnata, petiolo plano, pinnis distinctis planis, decem, duodecimve parium, quarum primae simplices, quae sequuntur acute & saepissime inaequaliter trifidae sunt, ultimae simplices. Flores in umbellam, sex & duodecim etiam florum. Calyx inverse conicus, cujus folia prima viridia hirsuta, reliquis in ordinibus lutea, cum ora nigerrima, ut in cyano. Petala plana ovata, lata, obtusa, tridentata, alba, decem, duodecim. Squamae inter flosculos fuscae: ipsi flosculi albi, staminum tubus flavus. Planta tota inodora.

87. *II.* ACHILLEA *aromatica foliis pinnatis, pinnis simplicibus punctatis, glabris.*

Anthemis alpina saxatilis odorata minima perennis floribus exiguis umbellatim compactis MICHELI. p. 59.

Tanacetum alpinum odoratum C. B. SCHEUCHZER *Itin.* II. p. 242. T. 21. f. 3. I. VI. p. 462.

C. GESNERUS in M. *Braulio*; J. BAUHINUS in montibus Rhaeticis, SCHEUCHZERUS in Praegalliensibus, nos ex M. *Jeman*, *Fouly*, montibus supra *Bagnes*, & *S. Bernhardi.*

Véritable Genipi Medicorum circa alpes medentium.

Difficile judicium est, num a priori diversum sit, ut Cl. Viri senserunt, num varietas, ut ego in priori opere. Accurate vero rimando haec discrimina reperi. Radix non acris. Caules humiliores, minus sub floribus tomentosi. Folia pallidius viridia, pinnis plerisque simplicibus, parium pauciorum, fere sex & octo; eadem plenissima foveolarum, hinc pulposa, & ad microscopium reticulata. Squamae calycis proportione breviores, inprimis si extremas compares, levissime ad vitream lentem hirsutae, magis compactae, ora potius fusca quam nigra. Flores minores. Tota planta odore grato aromatico, penetrabili, quem etiam culta retinet. Vere adeo differt.

Haec planta ad pleuritides febresque antidotus est alpicolarum, & in theae modum pota sudorem movet *Journ helv.* 1758.

1758. M. Sept.: calida tamen, & nocitura, quoties non sanat.

Altitudo bicubitalis *Achilleae* GMEL. T. 83. f. 1. vix videtur admittere, ut nostrae eadem sit, cum praeterea Cl. noster amicus flores amplissimos, radicem parvam faciat, nec aromatici, gratissimi, odoris meminerit.

88. III. ACHILLEA *aromatica foliis pinnatis, pinnulis acutis, villosis*.

In M. *Fouly* Valesiae.

Multo subtilius huic a priori est discrimen, cum perinde odorata sit, perinde folia habeat reticulata, & punctata, pulposaque: alius tamen, etiamsi etiam gratus, odor est. Folia diversa, tota hirsuta, pinnis plurium parium, duodecim, sibi propioribus, magis aequalibus, latioribus proportione longitudinis, saepissime simplicibus, nisi in radicalibus foliis, quibus breviter bifidae pinnae sunt & trifidae. Hinc totum folium longius. Juniora, quae priori glabra, huic villosa sunt; adulta, in hac varietate, pene calvescunt, non tamen unquam penitus hirsuties deficit.

A floribus congestis non potest discrimen sumi, nam etiam in 1. & 2. saepe perinde congestos vidi.

89. Haec eadem 88. tomento penitus obvoluta in altissimis montibus nascitur, & est

Millefolium alpinum tomentosum BOCCONE T. 170. *odoratum nanum* p. 166., qui hoc ipsum vult dici *Genipi*; uti quidem dici meretur.

Achillea foliis pinnatis lanugine totis obductis floribus albis umbellatis ALLIONE *plant. pedem* p. 9. T. 2.

In eo statu, etsi summarum alpium, tamen vulgatius est. SCHEUCHZERUS in jugis *Aversanorum* & *Praegalliensium*, & in descensu *Furcae* M. versus *Valesiam*. Ibi & ego abunde legi: frequens etiam est in M. *Bernhardo*, in montibus vallis *Bagnes*. *Hinterrhein* Cl. SCHINZ.

Humi-

Humilius aliquanto eſt. Caulis ſaepe curvus, cum foliis totus albo tomento obnuptus, ut fere in Creticis ſtirpibus ſolet. Florum umbella compacta, calyce hirſuto, oris foliorum fuſcis, ſemifloſculis minoribus ſimiliter obtuſe inciſis. Folia proportione longa, pinnis vicinis brevibus, trifidis, quadrifidis, foveolis balſamicis minus conſpicuis, aut nihil quidquam. Non ob aetatem tomentum dejicit, nam utraque ſpecies perinde florens & perfecta reperitur. Sed ob loci natalis diverſitatem, villoſior, quo altiori loco naſcitur, cum in humilioribus villum dejiciat adulta. Separaſſem omnino, niſi omnes medios inter utramque gradus poſſiderem, a perfecta glabritie ad ſummam tomenti ubertatem.

90. Vereor, ut *Achillea* 10. a vulgari ſatis diverſa ſit, quam circa *Branſon* Valeſiae abunde legi an. 1757.; continuos enim hoc inter, & *vulgare millefolium* gradus mihi ſum viſus adnotaſſe. Idem de n. 7. metus eſt.

Achillea 11. ſeu *lutea* maxima copia circa *Branſon* in rupibus provenit.

PLANIPETALAE.

91. IN hac claſſe ea noſtra fortuna fuit, ut pluſculas addere cives; alias, in quibus haeſeramus dubii, nunc expedire poſſimus.

I. *Lampſana caule nudo indiviſo, foliis ſemipinnatis, pinnis retrogradis dentatis.*

Leontodoides alp. glaber, eryſimi folio, radice craſſa foetida MICHELI p. 31. T. 28.

Dens Leonis minimus C. B. ex fide horti ſicci.

Nihil vulgatius in ſylvis umbroſis & udis montium Aquilegienſium. Legi ſuper *Roche* in ſylva le *Traverſin* cis torrentem *des males pierres*, in adſcenſu M. *Enzeinda*. Miſerunt Cl. Viri SEGUIER & MORENI.

Folia ad terram peculiari habitu pinnata, pinnis retroversis, aliquot non multis dentibus incisis, saepe super se invicem reduplicatis & imbricatis. Caulis aphillus, semipedalis. Squamae ad calycis basim accessoriae capillares aliquae. Verae calycis squamae septem, nigricantes, lanceolatae. Flos, quam taraxacis, minor saturate flavus, petalis dentatis. Semina fusca, columnaria, neque squamis distincta, neque ullo modo coronata, nisi flosculo.

92. II. LAMPSANA *foliis ovatis dentatis, caule nudo, floribus nutantibus* Enum. hort. Gotting.

Hieracium VII. CLUS. *Pannon.* p. 649.

Abunde provenit in agris septentrionem spectantibus inter *Hindelbank* & *Rormooss* ad dextram viae, quae ducit ad oppidum *Burgdorf*.

93. TARAXACON 2. est varietas primi.

Quintum Enum. p. 741. misit etiam Cl. ALLIONIUS. Foliis glaberrimis a 6. differt, non tamen, ut vereor, satis diversum est.

Ad n. 6. omnino refero Taraxacon 7. *Enum.*, ut verae species supersint 1. 3. 4. 5. 8.

94. HIERACIIS accensere oportet.

I. HIERACIUM *foliis ovatis lanatis*.

Hieracium montanum tomentosum DILL. *hort. Elth.* T. 150. f. 180. MILLER T. 146.

Radix perennis, dura, squamis aspera. Ex ea & caules florescentes prodeunt, & alii, qui altero anno florebunt. Folia ad terram petiolata, ovata, & paullum lanceolata, margine integerrimo, crassa substantia, tota tomento albo villosa. Ad caulem unum alterumve folium simile, acutum, sessile. Caulis aliquoties brachiatus, triflorus, quadriflorus. Calycis folia albissimo longo tomento villosa. Flos flavus. Describit LINN. *Cent.* 1. *n.* 76.

Legit in rupibus ad *Saillon* CLARET, tum inter *Charat* & *Saxon* ad viam Sedunum ducentem.

95. II.

95. II. HIERACIUM *caule unifloro, foliis ad caulem ovato lanceolatis dentatis amplexicaulibus.*

Hieracium montanum rapifolium C. B. *Prodr. p.* 65. *Basil. p.* 38.

C. B. in M. *Wasserfall* legerat, ego diu desideratam plantam in M. *Luan* frequentissime legi. *Aux Nombrieux* rupestri loco *supra les plans* etiam nascitur.

Speciosa inter Hieracia magnitudine planta est, radice lignosa, terete, curva, pilis longis barbata, quae sunt petiolorum siccatorum reliquiae: foliis ex radice numerosis, longe petiolatis, ellipticis, lanceolatis, pedem longis, petiolo folioso: foliis vero ad caulem quatuor vel quinque, amplexi caulibus, auriculis obtusis, margine dentibus longis rariter serrato. Figura folii ex ovata lanceolata est, acuta, tota glabra sunt, nervo solo villoso. Caulis cubitalis, longe plerumque uniflorus, raro biflorus, crassus, lineatus, sub flore albo tomento barbatus. Flos grandissimus, fere in tota classe eminet. Calyx pilis & tomento nigro barbatus, caetera lignei coloris, segmentis latis, trium ordinum. Color flavus, & numerus semiflosculorum maximus.

LINNAEUS non habet Hieracium 24. GMELINI T. 10. a nobis in horto Gottingensi cultum, differt caule ramoso, multifloro.

An fuerit *Hieracium alpinum villosum pulmonariae foliis caulem ambeuntibus* Cl. GARCIN, lectum in sylvis supra *Vallangin*?

96. III. HIERACIUM *foliis lanceolatis, glaucis, caule brachiato multifloro.*

Hieracium VI. montanum CLUS. *Pannon.* p. 645. 646.

Hieracium montanum angustifolium nonnihil incanum C. B., sed nostrum non est uniflorum, neque scabrum LINN. *spec. p.* 799.

In rupibus, quibus eremitae Agaunensis cellulae subjiciuntur, maxima copia provenit, tum in arenosis *de la grande*

eau: & Octoduri; etiam Verona miſſum a Cl. MORENIO.

Radix perennis, lignoſa, fuſca, teretibus craſſis fibris capillata. Folia ad radicem plurima, ad caulem perpauca, glauca, longe lanceolata, acutiſſima, vix ſupra 8. lineas, rariſſime dentata, ad caulem nulla fere niſi ſtipulae. Caulis durus, ſtriatus, brachiatus & ramoſus, multiflorus, non tamen in umbellam, cubitalis. Flores multo, quam in hieraciis piloſellae ſimilibus grandiores, calyce nigro farinoſo, hirſuto.

Idem crediderim eſſe *Hieracium alpinum ſcorzonerae folio* SCHEUCHZER Enum. n. 27.

97. Ad Hieracium 10. ſive *radice praemorſa* adde, in calidioribus Helvetiae non ſolum viſcidum, ſed grate etiam odoratum naſci cum radice craſſa, lignoſa, teretibus radiculis capillata. Folia ei ima petiolata, ovato lanceolata, per marginem longis dentibus, fere ut *rapifolium*, ſerrata, ad caulem ovato lanceolata, vix dentata. Caulem hirſutum, habet cubitalem, aliquoties brachiatum, ſingulo ramo multifloro, petiolis villoſis unguentatis. Calyx obſcure viridis, pilis & ipſe capitatis, globuliferis villoſus. Meretur nomen HIERACII *foliis ovato lanceolatis, obiter dentatis, viſcidis, caule brachiato multifloro*.

LINNAEUS non habet; nam ejus *Hieracium praemorſum* a noſtro differre videtur calyce non hiſpido, odoris & viſcoris abſentia V. *flor. ſuec.* p. 273.

98. Emendare etiam oportet deſcriptionem Hieracii 10. ſive *foliis ad caulem amplexicaulibus piloſis, rariſſime dentatis, caule multifloro*, quod *Hieracium montanum majus latifolium* J. B. T. II. *p.* 1036.

Legi in paſcuis M. Jurae, in laetis pratis M. *Jorogne*, in adſcenſu *aux Granges* ad *Forclaz a Chapuiſe*.

A *Griesbachiano latifolio* differt omnino. Folia ovata acuminata, ex hora piloſa, pilis de nervis omnibus, totoque fere inferiori exeuntibus: ad caulem amplexicaulia, auricu-

lis

lis retrocedentibus, obtusis, dentibus ubique brevissimis: cubitali caule, floribus in summa planta numerosis, multo, quam in latifolio Griesbachiano, majoribus, calyce nigricante, duris & nigris pilis barbato. Non habet LINNAEUS.

99. *Hieracium latifolium montanum alterum Genevense folio conyzae majoris Monspeliensis* J. B. II. p. 1026.

Hieracium montanum alterum leptomacrocaulon COLUMN. *Ecphras.* p. 249. ic. p. 248. habet folia, nervis exceptis, glabra, longiora, angustiora, multo frequentius dentata, auriculis acutis aristatis caulis amplexa; florem quam sequenti grandiorem, nigris villis barbatum. Dixerim HIERACIUM *foliis amplexicaulibus serratis auritis, auriculis aristatis, calycibus villosis.*

100. Denique *Hieracium foliis ad caulem glabris serratis lanceolatis, supremis profunde dissectis.*

Hieracium latifolium glabrum ex valle Griesbachiana. J. B. T. II. p. 1023.

Hieracium 21. GMELIN T. IX. omnino, ex foliis & calyce nigris pilis hirto.

In sylvis nostris humidis pratisque familiare, ab utroque diversum est. Cum proxime priori convenit foliorum nervis insignibus, foliorum crebris denticulis, auriculis acutis, foliis etiam magis glabris absque pilis. Differt dentibus multo grandioribus, floribus exiguis, calyce nigro paullum, & multo minus quam priori barbato, dentibus folii grandioribus, & sub caulium brachiis adeo profundis, ut folia pene laciniata sint. A penultimo glabritie, dentibus & auriculis, cauleque glaberrimo differt.

101. Expungi posse credo *Hieracium* 2. 11. 15. 19. De 24. 25. 28. 30. 31. porro oportet quaerere, & de 14. dubitari posset, an pro varietate haberi praestet.

102. *Intybi* duas species hirsutas, ut distinguerem, elaboravi. Ergo INTYBUS *foliis omnibus ellipticis hirsutis, serratis*, qui *Hieracium fruticosum latifolium hirsutum* vulgo dicitur,

citur, cumque eo nomine ab Ill. DILLENIO ad me missus est, & Octoduri, & in via *Tombey*, tum Bernae, tum in prato praecipiti optimi D. Ith secundum oram pinastreti *Dalholzlém* provenit, is quidem similis Intybi glabri est, durior, caule firmissimo, rectissimo, in summa planta paniculato, caetera vix ramoso: foliis ad caulem numerosissimis, dense congestis, firmis, siccis, hirtis, elliptico lanceolatis, paucis, sed magnis dentibus serratis, squamarum calycis lividarum ora pallente. Uniflorum reperit prope *Battenberg* Cl. BERDOT. Non habet LINNAEUS.

103. Alter autem Intybus *foliis inferioribus ellipticis hirsutis serratis, superioribus ovato lanceolatis*, quem *Hieracium fruticosum latifolium folio subrotundo* vocant, omnino diversus, Gottingae in sylvis provenit, altior quidem planta, & bicubitalis, sed debilior. Folia inferiora quidem satis similia habet, sed superiora longe diversa, sessilia, lata, brevia, ex ovatis lanceolata: calycis squamae etiam totae nigrae sunt, & flos potius grandior. Est *Hieracii Sabaudi varietas*. *Erinus quibusdam* MATTH. *dicta* J. B. T. II. p. 1030., & *Hieracii Sabaudi varietas altera* ibid. *Hieracium* 30. GMELII T. 24.

Receptaculum, quod nudum vocat Cl. LINNAEUS *flor. suec.* p. 274. omnino alveolatum est, uti memini me an. 1750. Cl. MISSAE jam ostendisse.

Inter stirpes D. le CLERC fuit *Hieracium fruticosum folio angustissimo, lineari, incano, glabro*, cum uno alterove dente, quod nunc non memini me alias reperisse.

Crepim, quae *Hieracium dentis leonis folio flore suaverubente*, in M. *Wasserfall* nasci scribunt auctores *der Basler Merkwurdigkeiten* p. 1800. Nondum audeo inter nostrates referre.

104. *Scorzonerae* duae helveticae, quas dubia ex fide, neque visas, recensueram, nunc abunde lectas facile constituo.

Scorzonera caule nudo, unifloro, foliis petiolatis ovato lanceolatis.

Scorzo-

Scorzonera humilis latifolia Pann. II. CLUS. hist. p. CXXXVIII.

Abunde provenit Rupe, Agauni, circa sacellum *N. Dame du Sex* &c.

Radix maxima, teres, anulata, corona pilorum ad exitum de terra ornata. Folia ad terram plurima, longe petiolata, nervosa, glabra, ex ellipticis lanceolata. Caulis pedalis, simplicissimus, praeter aliquas, ex ovatis lanceolata ligulas, nudus. Flos in singulo caule unicus, grandis, calycis foliis 3. & 4. ordinum triangularibus, eo latioribus, quo interiora. Petala numerosa, pallide lutea, lineata, dentata. Hanc non visam habueram pro Germanica.

105. II. SCORZONERA *caule nudo unifloro*, *foliis linearibus nervosis*.

Scorzonera humilis angustifolia Pann. III. CLUS. ibid.

An *Scorzonera caule simplici unifloro foliis ex lineari lanceolatis* GMELIN *flor. sibir.* T. 2. T. 1.

Radix similis, & pariter pilis coronata: similis etiam caulis simplicissimus, & flos, minor tamen. Folia vero angusta, nervosa, linea non latiora, cauli aequalia. Flos similis, sed minor, petalis pariter lineis striatis, quas purpureas fuisse vidi. Semina sulcata, curva, sessili plumoso pappo ornata.

Au Tombey inter *Aquilegiam* & *Ollon* primo vere floret.

A caule *basi villoso* nomen sumi nequit, quum species I. perinde villum habeat in summa radice; neque pediculus nostris *incrassatur*.

CAROLI ALLIONII

SYNOPSIS METHODICA STIRPIUM

HORTI TAURINENSIS.

POstquam Horti Taurinensis cura ab Augustissimo, & Invictissimo REGE *nostro mihi commissa fuit, muneris mei omnino esse putavi stirpes omnes in eodem contentas diligenter recensere, & alienis aut vagis nominibus satas expendere, ut tyrones ea qua decet ratione instituere possem, & hortum magis, magisque locupletare. Hujus laboris fructus est haec synopsis, in qua plantae omnes, quas hoc anno coli observavi, enumerantur eodem ordine, quo adolescentibus easdem explicandas suscepi. Nomina sunt* trivialia *Celeb.* LINNAEI, *quorum usum opportunum existimavi, ut brevitati consulerem, nec angustos commentarioli limites transgrederer; eo vel maxime quod praedictis nominibus alia ab auctoribus usitata facile reperiri possint in libro ejusdem* LINNAEI, *cui titulus* species plantarum. *Eas porro herbas, quarum trivialia nomina nondum constant, aut quae distinctas species constituere visae sunt, separatim recensendas curavi. Genera, ut quisque videt, servanda mihi fuerunt qualia a* LINNAEO *proponuntur, pariterque species secundum ipsius praecepta, ad propria genera referuntur. Aliquot denique minus notae stirpes accurata descriptione illustrantur, & quaenam Pedemontanae hujus regionis indigenae sint, asterisco notatur.*

CLAS-

CLASSIS PRIMA.

Plantae flore monopetalo simplici.

I. MONOSTEMONES.

Canna indica.

II. DISTEMONES.

A. GYMNOTETRASPERMAE.

Salvia *officinalis* *
horminum *
sclarea *
pratensis *
agrestis [1]
verbenaca
verticillata *
glutinosa *
canariensis
ceratophilla
aethiopis *
afr. caerulea
. . . . [2]
. . . . [3]
. . . . [4]
. . . . [5]

Rosmarinus officinalis *
Lycopus europaeus *
Ziziphora tenuior
Monarda didyma

B. DIANGIAE.

G Vero-

1 *Horminum pratense niveum foliis incanis* BAUH. *pin.* 238. V. LINN. *amoen. T. III. p.* 399.

2 *Salvia orientalis frutescens, foliis subrotundis, acetabulis moluccae,* TOURN. *cor. p.* 10.

3 *Salvia cretica angustifolia* CLUS. *hist.* 343. *Salviae officinali* similis, diversa tamen. Folia minime aspera, subincana, & brumali tempore omnino incana, mollia, acutiora. Verticilli decemflori & nudi. Flos minor barba magis pendula, & ad suam originem striis & maculis violaceis picta. Antherarum, quae luteae sunt, margo obscurus. Semina magna compressa subrotunda duo tantum fere maturantur. Suavius & minus vehementer odorata est. *Salvia cretica* LINN. alia omnino planta èsse debet cum calyces diphillos ei tribuat Celeb. AUCTOR.

4 *Salvia villosa & viscosa, foliis lanceolato-ovatis, versus petiolum angularis.* Exoticae originis planta, neque, quod sciam Botanicis nota. Ex duro & fere lignoso caudice erigit virgas ad summum cubitales. Folia similia sunt foliis *salviae officinalis*, sed minora, viridia, non aspera, sed cum tota planta viscosa, & alto densoque villo barbata. Folia prima petiolata, & sensim deinde sessilia, versus petiolum ampliora, & angulata. Calix striatus bilabiatus. Labii superioris dentes tres minimi approximati aegre distinguendi; inferioris aristati aliquantulum divaricati. Flos albus tubo corollae calycem aequante: Galea villosa fornicata, truncata, non falcata, Alae subrotundae rectae. Barba concava, obverse cordata, subpurpurea, triangulariter emarginata. Antherae luteae extra galeam protensae. Semina laevia, nigra, subtrigona oblonga. Odor totius plantae validus, qualis *salviae sclareae*.

5 *Salvia americana chia dicta*. Olim hoc nomine ad me misit Cl. PONTEDERA.

Veronica ſpicata *
officinalis *
alpina *
ſerpillifolia *
beccabunga *
anagallis *
chamaedrys *
agreſtis *
arvenſis *
hederaefolia *
Juſticia adathoda . . .
Syringa vulgaris *
perſica

C. Fructu pulposo.

Nictanthes ſambac
Jaſminum officinale
azoricum
fruticans *
odoratiſſimum
Olea 6
Phillyrea latifolia *
Liguſtrum vulgare *

III. TRISTEMONES.

A. Flore caliculato.

Trichoſanthes anguina
Cucurbita lagenaria
pepo
verrucoſa
melopepo
citrullus
Cucumis colocynthis
melo
dudaim
ſativus
Momordica balſamina
charantia
luffa
cylindrica
elaterium *
Bryonia alba *
africana
Sicyos angulata.

B. Calice destitutae.

Crocus ſativus *
Ixia chinenſis
Gladiolus communis *
Iris ſuſiana
germanica *
variegata
graminea
pſeudacorus *
hermodactylus.
Valeriana dioica *
phu
officinalis *
calcitrapae *
tripteris *
cornucopiae
locuſta *

IV.

6 *Olea ſilveſtris folio duro ſubtus incano* Bauh. *pin.* 472.

IV. TETRASTEMONES.

A. Gymnodispermae.

1. *Flore plano*.

Galium verum *
boreale *
aparine *
parisiense *
. . . . . [7]
. . . . . [8]

Rubia tinctorum. *

2. *Fl. infundibuliformi*.

Crucianella angustifolia *
Sherardia arvensis *
Asperula odorata *
arvensis *
taurina *
cynanchica *

B. Gymnotetraspermae.

1. *Galea plana*

a. *Vix fissa*

Melittis melissophillum *
Mentha crispa
pulegium *
cervina
arvensis *
rotundifolia *
aquatica *
Origanum majorana
aegyptiacum
dictamnus
vulgare *
Thymus vulgaris *
Acinos *
serpillum *
. . . . . [9]

b. *Profunde secta*

Lavandula spica *
multifida
Glechoma hederacea *
Sideritis perfoliata
romana
hirsuta *
Marrubium vulgare *
pseudodictamuus
peregrinum

2. *Galea concava*

Lamium purpureum *
amplexicaule *
album *
. . . . . [10]

7 *Gallium album vulgare* Tourn. *inst.* 115. *
8 *Gallium montanum latifolium ramosum* Tourn. *inst.* 115. *
9 *Thymus foliis ellipticis & caule hirsutis* Hall. *gott.* 341.
10 *Lamium montanum hirsutum, folio oblongo, flore purpureo D. Pontederae* Tilli. *pis.* Tota planta hirsuta, & odore forti lamii. Caules habet spithamaeos, aut etiam duplo altiores. Folia ex cordato-triangula, statim a petiolo dentata dentibus geminatis, non nitentia, obtuso non acuto dente terminata; & minora, quam in *Lamio albo*. Corollae tubus tertia circiter parte extra calycem protenditur. Galea surrecta, pilosa, erosa; barba vero recta descendit. Antherae luteae, vix pilosae. Verticilli minime nudi, sed involucro donati, h. e. stipulis linearibus quinque aut septem verticillum cingentibus.

Galeopſis ladanum *
tetrahit *
galeobdolon *
Stachys ſilvatica *
alpina *
germanica *
paluſtris *
cretica
Dracocephalon canarienſe
peltatum
moldavica
caneſcens
. 11
Leonurus ſibiricus
cardiaca *
marrubiaſtrum *
Phlomis tuberoſa
leonurus
fruticoſa
Moluccella laevis
ſpinoſa
fruteſcens *

Prunella vulgaris *
grandiflora
laciniata *
Ballota nigra *
Betonica hirſuta *
glabra *
officinalis *
. 12
Nepeta cataria *
nuda
. 13
Meliſſa officinalis *
calamintha *
nepeta *
Cilnopodium vulgare *
Scutellaria ſupina *
galericulata *
. 14

3. *Galea nulla, ſeu limbo ſemiquinquefido.*

Verbena bonarienſis
urticifolia

com-

11 *Dracocephalon foliis ex lanceolato-linearibus, rarius dentatis, ſpinuloſis, floribus gemellis* MARTINI. HALL. *gott.* 335.

12 *Betonica foliis hirſutis, floribus purpureis ampliſſimis* MONT. in ZANON. *p.* 46. *l.* 30. *

13 *Cataria tenuifolia* CLUS. *hiſt.* XXXIII. *

14 *Caſſida caule quadrangulo rubente, teucrii ſerrato folio, fl. caeruleo, labro albo.* TILLI. *piſ.* Duro & repetito ramoſo caule ſe ſe ad tricubitalem & ultra altitudinem erigit. Poſtremi rami longiſſime ſimplices & continuo florigeri, floribus binatis. Folia petiolata, glabra, venoſa, cordato-ovata, acuta dentibus utrinque tribus aut quatuor ſerrata. Floralia elliptica, acuminata, integerrima, ſubſeſſilia. Calix de more gentis cum criſta & ora longius piloſa. Flos gracilis ex violaceo purpureus alarum extrema parte albeſcente. Semina quaterna, inaequalia, ex cinereo obſcura, ſubtriangula, minutiſſime alveolata. Univerſa planta amariſſima eſt, & non ſine principio aromatico. Denſi & ſubtiles pili obſident ramos florigeros, & ex iis ſtillat globulus tenuiſſimae, & amarae reſinae.

communis *

4. *Galea nulla, seu flore unilabiato.*

Teucrium scorodonia *
scordium *
flavum *
chamaedrys *
. . . . . [15]
botrys *
. . . . . [16]
chamaepithys *
polium *
montanum *
marum

Ajuga pyramidalis *
reptans *

C. Monangiae.

Orobanche major *
ramosa *

D. Diangiae.

1. *Corolla non labiata.*

Sanguisorba officinalis *
Plantago major *
virginica
lanceolata *
lagopus *
coronopus *
psyllium *
cynops

Celsia orientalis.

2. *Corolla labiata.*

a. *Calyce quadrifido.*

Rhinanthus glaber *
Melampyrum cristatum *
Euphrasia officinalis *

b. *Calyce quinquefido.*

Antirrhinum cymbalaria *
spurium *
triphillum
purpureum
monspessulanum *
multicaule
linaria *
majus. *

Scrophularia nodosa *
aquatica *
canina *

Digitalis ferruginea
lutea *
. . . . .. [17]

Che-

15 *Teucrium foliis cordatis crenatis petiolatis, spicis oblongis densissimis ex Hircania* Martini Hall. *comm. Gotting.* 1752.

16 *Teucrium supinum, perenne, palustre, apulum, glabrum, foliis laciniatis, fl. albo D. Michelii.* Tilli. *pis. cum icone.* Procumbit ramis, & foliis oppositis glabrum. Folia sulcata, & trifida segmentis lateralibus tridentatis, & medio iterum trifido. Verticilli biflori. Calycis dentes spinulosi. Alae ovatae duorum parium: barba cordato ovata. Floris color albus, sed striae, & maculae purpureae pingunt alas primas & barbae originem. Semina quaterna aspera.

17 *Digitalis alpina magno flore* Bauh. *pin.* 244.

Chelone hirsuta [18]
Bignonia catalpa
radicans.
Lantana annua
camara
Ruellia strepens.
Sesamum orientale.
c. *Calyce polyphillo.*
Acanthus mollis
aculeatus.

E. Fructu pulposo.

Callicarpa americana
Ilex aquifolium *

V. PENTASTEMONES.

A. Monostylae.

1. *Gymnomonospermae.*

Plumbago europaea *
Basella rubra
Mirabilis Jalappa
. . . . . [19]

2. *Gymnotetraspermae.*
a. *Squamulis in fauce.*
Symphitum officinale *
tuberosum *
Anchusa officinalis *
Cynoglossum officinale *
linifolium
Lycopsis vesicaria *
variegata
Asperugo procumbens.
b. *Fauce nuda.*
Cerinthe maculata *
Echium vulgare *
italicum *
Lithospermum officinale *
arvense *
purpuro-caeruleum *
Heliotropium indicum
europaeum *
Myosotis scorpioides *
lappula *

3. *Monangiae.*
a. *Valvis duabus.*
Anagallis . . . [20]
. . . . [21]
Menyanthes trifoliata *
b. *Valvis quinque.*
Samolus valerandi *
Cyclamen europaeum *
c. *Valvis decem.*
Primula elatior *
acaulis *
vitaliana *
auricula *
Lysimachia vulgaris *

num-

18 Quintum sterile villosissimum stamen anthera destitutum reliquis fertilibus longius ego quoque adnotavi.
19 *Mirabilis foliis viscidis villosis, tubo floris cylindrico villoso foliis longiore* Zinn. *comm. Gott. T. V.*
20 *Anagallis phaeniceo flore* Bauh. *pin.* 252. *
21 *Anagallis caeruleo flore* Bauh. *pin.* 252. *

nummularia *
4. *Diangiae*.
Nerium oleander
Vinca major *
minor *
Datura ſtramonium *
. . . . [22]
Hyoſcyamus niger *
albus
puſillus
Nicotiana tabacum
minor
paniculata
Verbaſcum thapſus *
lychnitis *
nigrum *
ſinuatum
blattaria *
phaeniceum *
Gratiola officinalis *
5. *Tri-aut Pentangiae*.
Convolvulus arvenſis *
ſepium *
panduratus
tricolor
. . . . .
hederaceus
ſiculus
. . . . . [23]
Ipomoea quamoclit
coccinea
triba
Phiteuma ſpicata *
Campanula rapunculus *
erinus *
perſicifolia *
trachelium *
glomerata *
. . . . . [24]
ſpeculum *
6. *Fructu pulpoſo*.
Mandragora officinarum
Atropa belladonna
phiſalodes.
Solanum pſeudocapſicum
dulcamara *
tuberoſum
lycoperſicon
officinarum
. . . . [25]
melongena
indicum

22 *Stramonium aegyptiacum flore pleno intus albo, foris violaceo* TOURN. *inſt.* 118.

23 *Convolvulus ſerpens maritimus ſpicaefolius* TRIUMF. *obſ. p.* 91. Plures teretes, vimineae radices plurimos producunt caules ad ſummum palmares procumbentes. Folia ex longo & folioſo petiolo longe elliptica, acuto fine, non plana, ſulco medio eadem dirimente, breviſſimo & ſericeo villo nitentia ita tamen, ut adhuc viridia appareant. Summus cauliculus ſaepe unicum florem ſuſtinet, raro duos brevi pedunculo nixos, qui ſtipulis duabus linearibus cinguntur. Calycis foliola ſericea; & eorum duo exteriora majora. Fructus calycinis foliis ex parte agglutinatur; iiſdem brevior & ſericeo villo tectus. Minime igitur confundi poteſt cum *convolvulo cneorum*?

24 *Campanula hortenſis folio & flore oblongo* BAUH. *pin.* 94.

25 *Solanum guineenſe fructu magno inſtar ceraſi* DILL. *elth.* 366.

indicum
ſodomeum
incanum
tomentoſum.

Phyſalis ſomnifera
alkekengi *
angulata
. . . . . [26]

Capſicum annuum
. . . . . [27]
. . . . . [28]
. . . . . [29]
. . . . . [30]

Lonicera caprifolium *
periclymenum *
nigra *
Xyloſteum *

Lycium afrum

Rhamnus paliurus *
ziziphus
catharticus *

Coffea arabica.

B. Distylae.

Gomphrena globoſa

Gentiana centaurium *
ſpicata *
aſclepiadea *

Cynanchum acutum
erectum

Aſclepias incarnata
curaſſavica
ſyriaca
vincetoxicum *
fruticoſa
tuberoſa

C. Tristylae.

Viburnum tinus *
lantana *
opulus *

Sambucus ebulus *
nigra *
laciniata
racemoſa *

VI. HEXASTEMONES.

A. Monostylae.

Aloe diſticha
ſpiralis
retuſa
variegata
. . . . . [31]
. . . . . [32]
. . . . . [33]
. . . . . [34]

26 *Alkekengi barbadenſe nanum alliariae foliis* Dill. *elth. p.* 10.
27 *Capſicum fructu flavo pyramidali oblongo* Tourn. *inſt.* 153.
28 *Capſicum ſiliqua latiore & rotundiore* Tourn. *inſt.* 153.
29 *Capſicum ſiliquis ſurrectis oblongis* Tourn. *inſt.* 153.
30 *Capſicum fructu cordiformi erecto* Hall. *Gott.* 216.
31 *Aloe africana ſeſſilis foliis carinatis verrucoſis* Dill. *elth. p.* 22.
32 *Aloe africana humilis ſpinis inermibus & verrucoſis obſita* Comm. *prael. p.* 77.
33 *Aloe africana flore rubro folio maculis ab utraque parte albicantibus notato* Comm. *hort. II. p.* 15.

. . . . . [34]
. . . . . [35]
. . . . . [36]
. . . . . [37]
. . . . . [38]
. . . . . [39]
Agave americana
Hyacinthus non ſcriptus
orientalis
cernuus
Polianthes tuberoſa
Convallaria majalis *
verticillata *
ſtellata
polygonatum *
Ariſtolochia clematitis *
rotunda *

B. Tristylae.

Colchicum autumnale *

VII. OCTOSTEMONES.

Daphne mezereum *
laureola *
cneorum *
Dioſpyros lotus.

VIII. ENNEASTEMONES.

Rheum rhaponticum

IX. DECASTEMONES.

Cotyledon umbilicus *
Oxalis acetoſella *
corniculata *
ſtricta

X. POLYSTEMONES.

Mimoſa ſenſitiva
pudica
pernambuccana
glauca
. . . . . [40]
ſcorpioides. *

CLASSIS II.

Plantae flore monopetalo floſculoſo.

I. ANTERIS DISJUNCTIS.

Dipſacus fullonum *
. . . . . . [41]

34 *Aloe africana folio in ſummitate triangulari margaritifera flore ſubviridi* Comm. *hort. II. p.* 10.
35 *Aloe africana foliis glaucis margine, & dorſi parte ſuperiore ſpinoſis, flor. rubro.* Comm. *prael. p.* 75.
36 *Aloe africana caulescens foliis ſpinoſis maculis ab utraque parte albicantibus notatis* Comm. *hort. II. p.* 9.
37 *Aloe africana caulescens foliis glaucis breviſſimis, foliorum ſummitate interna & externa nonnihil ſpinoſa.* Comm. *prael. p.* 73.
38 *Aloe ſuccotrina anguſtifolia ſpinoſa flore purpureo.* Comm. *hort. I. p.* 91.
39 *Aloe foliorum margine luteo.*
40 *Acacia americana non ſpinoſa, foliis viciae multiflorae, floribus in ſpicam triuncialem diſpoſitis, ſiliqua palmari compreſſa & intorta.* Manetti. *vir. flor. p.* 12.

. . . . . [41]
pilosus *
laciniatus *
Scabiosa alpina *
succisa *
syriaca
arvensis *
leucantha *
tartarica *
columbaria *
stellata
atropurpurea
. . . . . [42]
Knautia orientalis
Globularia vulgaris *
. . . .

II. ANTHERIS COALITIS.

A. Capitatae.

Echinops sphaerocephalus
ritro *
Onopordon acanthium *
illyricum
Cynara scolymus
Arctium personata *
lappa *
. . . . . [43]
Carduus lanceolatus *
crispus *
stellatus
marianus *
helenioides *
eriophorus *
nutans *
acanthoides *
Serratula tinctoria *
arvensis *
Carthamus tinctorius *
Cnicus benedictus
Carlina acaulis *
corymbosa *
Centaurea crupina *
moschata
cyanus *
montana *
paniculata *
*ragusina
scabiosa *
jacea *
aspera *
eriophora
calcitrapa *
solstitialis *
galactites *
salamantica *
sonchifolia *
napifolia *
centaurium.

B. Discoideae.

1. *Semine nudo*:

Tana-

41 *Dipsacus sativus* Bauh. *pin.* 385.

42 *Scabiosa foliis planis carnosis, inferioribus pinnatis, ramorum integerrimis linearibus* Gmelin. *sibir. II. p.* 213.

43 *Lappa major montana capitulis tomentosis* Bauh. *pin.* 198.

Tanacetum vulgare *
crifpum
balfamita
Santolina chamaecypariffus *
rofmarinifolia
Cotula coronopifolia
Artemifia abrotanum *
campeftris *
pontica
abfinthium *
vulgaris *
caerulefcens
dracunculus
. . . . . [44]
. . . . . [45]
Micropus fupinus *

2. *Semine pappis coronato.*

Gnaphalium dioicum *
foetidum
margaritaceum *
germanicum *
arenarium
Sthaechas *
. . . . . [46]
Chryfocoma graminifolia
Eupatorium cannabinum *
caeleftinum
altiffimum
Tuffilago farfara *
petafites *

3. *Sem. ariftis coronato.*

Xeranthemum annuum *
Bidens tripartita *
cernua *
pilofa
frondofa
bipinnata
. . . . . [47]

C. Radiatae.

1. *Sem. nudo.*

a. *Placenta paleacea.*

Helianthus annuus
multiflorus
Rudbeckia hirta
laciniata
oppofitifolia
Buphthalmum grandiflorum *
helianthoides
Siegesbekia orientalis
Achillea ageratum *
tomentofa *
ptarmica *
nana *
millefolium *
nobilis *
Anthemis nobilis
millefolia
tinctoria *
maritima *

44 *Abfinthium alpinum candidum humile* Bauh. *pin.* 139.
45 *Abfinthium arborefcens* Lob. *ic.* 753.
46 *Filago foliis tenuiffimis, floribus umbellatis cylindricis* Hall. *Gott.* 377.
47 *Bidens foliis ovatis & tripteris, caulibus hirtis brachiatis* Hall. *Gott.* 383.

arvensis *
b. *Placenta nuda*.
Osteospermum uvedalia
moniliferum
Calendula . . . [48]
. . . . . [49]
Chrysanthemum leucanthemum *
segetum *
coronarium
corymbosum *
Matricaria parthenium *
chamomilla *
recutita *
Bellis perennis *
2. *Sem. pappis coronato.*
Aster alpinus *
novae angliae
novi belgii
chinensis
dumosus
Inula helenium *
dysenterica *
pulicaria *
hirta *
. . . . [50]
Erigeron canadense *
Senecio hieracifolius
vulgaris *
incanus *
jacobea *
sarracenica *
paludosus
Solidago sarracenica *
mexicana
virga aurea *
canadensis
sempervirens
Doronicum pardalianches. *
3. *Sem. aristis coronato.*
Tagetes patula
erecta

D. Planipetalae.

1. *Sem. nudo.*
a. *Placenta nuda.*
Lapsana communis *
stellata
rhagadiolus.
b. *Placenta paleacea.*
Catanance caerulea *
Cichorium intybus *
endivia
spinosum
Scolymus maculatus. *
2. *Sem. pappis coronato.*
a. *Placenta nuda.*
Leontodon taraxacum *
hispidum *
Hieracium alpinum *
auricula *
pilosella *
murorum *
. . . [51]

48 *Caltha vulgaris* Bauh. *pin.* 275.
49 *Caltha arvensis* Bauh. *pin.* 275.
50 *Aster montanus hirsutus* Lobel. *ic.* 350.

. . . . .[51]
amplexicaule *
umbellatum *
. . . . .[52]
Crepis barbata
fœtida *
. . . . .[53]
Picris echioides *
hieracioides *
Sonchus asper *
laevis *
Prenanthes muralis *
Chondrilla juncea *
Lactuca sativa
perennis *
virosa *
Scorzonera laciniata *
hispanica
tingitana
Tragopogon pratense *
b. *Placenta squamis distincta.*
Hypochoeris maculata *

CLASSIS III.

Plantae flore dipetalo.

Corispermum hissopifolium
Circaea lutetiana *

CLASSIS IV.

Plantae flore tripetalo.

Cneorum tricoccon *
Commelina tuberosa
Tradescantia virginiana
Bromelia ananas
Chamaerops humilis *
Alisma plantago *

CLASSIS V.

Plantae flore tetrapetalo cruciformi.

I. TETRASTEMONES.

Epimedium alpinum *
Cornus mas
Sanguinea *
Potamogeton lucens *
Crispum *

II. HEXASTEMONES.

A. Siliculosae.

Myagrum perfoliatum
Sativum *
Draba verna *
alpina *

Lepi-

51 *Hieracium murorum laciniatum minus pilosum folio angustiore* Bauh. *pin.* 129. *
52 *Hieracium caule folioso, ramoso, foliis & calyce longo villo barbatis* Hall. *helv.* 744. *
53 *Crepis foliis glabris, floribus minimis, caule ramosissimo* Hall. *Gott.* 412.

Lepidium latifolium *
iberis *
sativum
Thlaspi saxatile *
arvense *
alliaceum
campestre *
bursa pastoris *
Cochlearia coronopus *
armoracia *
glastifolia
officinalis *
Iberis semperflorens
umbellata
amara *
Alyssum incanum *
montanum *
Halimifolium *
sinuatum
clypeatum
Clypeola . . . . [54]
. . . . . [55]
Biscutella didyma *
auriculata
. . . . . [56]
Lunaria rediviva *
. . . . . [57]

B. Siliquosae.

Cardamine pratensis *
Sisymbrium sophia *
tanacetifolium *
irio *
Strictissimum *
Erysimum alliaria *
Cheiranthus cheiri
incanus
tricuspidatus
Hesperis matronalis *
dentata
. . . . [58]
. . . . [59]
Arabis thaliana *
Turritis glabra *
hirsuta *
Brassica orientalis
campestris *
napus
rapa
Sinapis arvensis *
alba *
nigra *
Raphanus sativus
raphanistrum *
Bunias erucago *
orien-

54 *Thlaspi alysson dictum campestre minus* Bauh. *pin.* 107.
55 *Clypeola perennis incana, foliis subrotundis, calyce deciduo, siliculis ovato acutis.* Habitat in summis alpibus cottiis nova planta, cujus descriptionem, & iconem dabo in Enumeratione stirpium Pedemontii propediem edenda.
56 *Jondraba alyssoides apula spicata* Col. *ecphr. p.* 285.
57 *Lunaria foliis pinnatis, foliolis laciniatis* Roy. *Leyd.* 533.
58 *Hesperis maritima supina exigua* Tourn. *inst.* 222.
59 *Hesperis exigua lutea folio dentato augusto* Boerh. *ind. alt. II.* 20.

orientalis
Isatis tinctoria *
Crambe maritima
hispanica
Cleome gynandra
ornithopodioides
viscosum

III. OCTOSTEMONES.

Oenothera bonariensis
biennis *
. . . . [60]
Epilobium hirsutum *
angustifolium *
montanum *
palustre *
Ruta graveolens *
Cardiospermum halicacabum

IV. POLYSTEMONES.

A. Monostylae.

Euphorbia maculata
pilosa *
chamaesyce *
peplus *
lathyris *
spinosa *
dulcis *
helioscopia *
verrucosa *
orientalis
platiphillos *
cyparissias *
palustris *
neriifolia
caput medusae
. . . . [61]
officinarum
Chelidonium majus *
glaucium *
corniculatum
hybridum
Papaver rhaeas *
orientale
somniferum
Argemone mexicana
Actaea spicata nigra *
Capparis spinosa

B. Tetrastylae.

Philadelphus coronarius *

C. Polystylae.

Tormentilla erecta *
Talictrum foetidum *
flavum *
minus *
aquilegifolium *
Clematis recta *
vitalba *
flammula *
integrifolia

CLAS-

60 *Onagra foliis glabris, flore suave purpureo* Hall. *comm. Gott.* 1751. *p.* 224.
61 *Euphorbium humile procumbens, ramis simplicibus, copiosis, caule crassissimo tuberoso.* Burm. *afr. p.* 20. *t.* 10.

CLASSIS VI.

Plantae flore tetra-aut pentapetalo papilionaceo.

I. TETRAPETALAE.

A. HEXANTHERAE.

Fumaria bulbosa *
lutea
officinalis *
spicata *

B. OCTANTHERAE.

Polygala vulgaris *

C. DECANTHERAE.

1. *Uniloculares.*

Trifolium repens *
rubens *
agrarium *
montanum *
squarrosum
angustifolium *
arvense *
clypeatum
glomeratum *
melilotus corniculata
melilotus officinalis *
melil. caerulea *
melil. italica

Lotus tetragonolobus
conjugata *
hirsutus *
corniculata *
dorychnium *
orinthopodioides *
recta *

Anthyllis tetraphilla *
vulneraria *
barba jovis *

Medicago radiata
sativa *
falcata *
lupulina *
orbicularis *
scutellata *
tornata *
intertexta *

Ononis spinosa *
alopecuroides
natrix *
mitissima
viscosa
rotundifolia *

Cytisus laburnum *
. . . . [62]

Genista tinctoria *

Phaseolus coccineus
caracalla
vulgaris
lunatus

Dolichos lablab

soja

62 *Cytisus minoribus foliis ramulis tenellis villosis* BAUH. *pin.* 390.

ſoia
Hedyſarum canadenſe
onobrychis *
gallo-provinciale *
violaceum
paniculatum
Vicia faba
narbonenſis
ſativa
dumetorum *
benghalenſis
Ervum lens
tetraſpermum *
hirſutum *
ervilia
Orobus tuberoſus *
vernus *
niger *
Lathyrus aphaca *
cicera
ſativus *
tingitanus *
pratenſis *
latifolius *
Zeylanicus
Piſum ſativum
maritimum
Cicer arietinum
Colutea arboreſcens *
aethiopica
herbacea
Galega officinalis *

Indigofera tinctoria
Aeſchynomene americana
aſpera
Amorpha fruticoſa [63]
Crotalaria laburnifolia
Robinia pſeudoacacia *
Coronilla emerus *
ſecuridaca *
varia *
Hippocrepis uniſiliquoſa *
Lupinus albus
hirſutus
Scorpiurus ſubvilloſa *
2. *Biloculares.*
Aſtragalus glyciphillos *
uliginoſus
montanus *
epiglottis
Biſerrula pelecinus *
Glycine apios.

II. PENTAPETALAE.

Glychirriza echinata
ſiliquoſa
Ulex europaeus
Spartium junceum *
ſcoparium *
monoſpermum
Pſoralea corylifolia
bituminoſa *
Cercis ſiliquaſtrum *
Sophora alopecuroides

I Caſſia

63 Unico exemplo habet AMORPHA florem monopetalum *h. e.* tantummodo vexillum, alis & carina deficientibus.

Cassia senna
fistula
occidentalis
chamaecrista
Parkinsonia aculeata

CLASSIS VII.

Plantae flore pentapetalo, & Gymnodispermae.

II. SEM. AD PLACENTAM COMMUNEM CONJUNCTIS.

Eryngium planum
maritimum *
campestre *

II. SEM. COMMUNI PLACENTA CARENTIBUS.

A. Obscura umbella.

Phillis nobla
Hydrocotyle vulgaris

B. Manifesta umbella.

1. *Sem. Gibbis striatis.*
a. *Petalis aequalibus.*
Apium petroselinum
graveolens
Anethum hortense
foeniculum *
Ligusticum vulgare *
Sium sisarum
falcaria *
Sison amomum
canadense
Bupleurum falcatum *
Crithmum maritimum *
Althamanta cretensis *
oreoselinum *
b. *Petalis inaequalibus.*
Smyrnium olusatrum *
Aegopodium podagraria *
Carum carvi *
Seseli annuum *
Pimpinella saxifraga *
Oenanthe biennis *
Aethusa cynapium *
Conium maculatum *
2. *Sem. gibb. & alatis*
a. *Alis duabus.*
Peucedanum officinale *
Angelica archangelica *
sylvestris *
lucida
Imperatoria ostruthium *
b. *Alis quatuor, & ultra.*
Laserpitium latifolium *
siler *
Astrantia major *
3. *Sem. planis alatis.*
Pastinaca sativa
. . . . [64]

Tordy-

64 *Pastinaca folio quasi libanotidis latifoliae* Boerh. *ind.* 1. 67.

Tordylium ſyriacum
maximum *
Heracleum ſphondylium *
Ferula glauca
ferulago
Thapſia . . . [65]
4. *Sem. aſperis.*
Caucalis grandiflora
platycarpos *
Sanicula europaea *
5. *Sem. villoſis, nec roſtratis.*
Daucus . . . [66]
. . . . [67]
b. *Sem. roſtratis.*
Scandix odorata *
pecten *
chaerefolium
nodoſa
Chaerefolium ſylveſtre *
hirſutum *

CLASSIS VIII.
Plantae flore pentapetalo, nec Gymnodiſpermae.

I. FILAMENTIS IN UNUM TUBUM CONJUNCTIS.

Geranium capitatum
zonale
inquinans
odoratiſſimum
alchimilloides
pratenſe *
robertianum *
molle *
. . . . . [68]
bohemicum
ſylvaticum *
nodoſum *
ſanguineum *
malacoides *
cicutarium *
gruinum *
myrrhifolium
triſte
Sida ſpinoſa
abutilon
Napaea dioica
Alcea roſea
Malva caroliniana
rotundifolia *
ſylveſtris *
mauritiana
verticillata
alcea *
Lavatera arborea *
luſitanica
trimeſtris

65 *Thapſia ſive turbith garganicum ſemine latiſſimo* Bauh. *hiſt. III.* 2. 50.
66 *Daucus vulgaris* Clus. *hiſt. CXCVIII.* *
67 *Daucus ſativus* Tourn. *inſt.* 307.
68 *Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculis brevioribus, caule erecto* Hall. *helv. p.* 366. *

thuringiaca *
Goſſypium herbaceum
Hibiſcus ſyriacus
paluſtris
mutabilis
aeſculentus
abelmoſch
Althaea officinalis *
cannabina *

II. FILAMENTIS BASI COALITIS.

Citrus medica
aurantium
Hypericum androſaemum *
perforata *
Croton tinctorium *

III. FILAMENTIS OMNIBUS LIBERIS.

A. PENTASTEMONES.

1. *Monoſtylae.*
Lagoecia cuminoides
Celoſia criſtata
argentea
Vitis vinifera *
arborea
Ribes alpinum *
nigrum *
groſſularia *
rubrum
Hedera helix *
quinquefolia
Ceanothus americanus
africanus
Evonymus europaeus *
Viola hirta *
odorata *
canina *
montana *
calcarata *
biflora *
. . . . . [69]
. . . . . [70]

2. *Triſtylae.*
Tamarix germanica *
Staphilaea pinnata *
Rhus coriaria
cotinus *
copallinum
radicans
Paſſiflora foetida
caerulea
incarnata

3. *Tetraſtylae.*
Parnaſſia paluſtris *

4. *Pentaſtylae.*
Statice armeria
. . . . . [71]
Linum uſitatiſſimum
. . . . . [72]

narbo-

69 *Viola bicolor arvenſis* BAUH. *pin.* 200. *
70 *Viola tricolor hortenſis* BAUH. *pin.* 200.
71 *Limonium maritimum majus* BAUH. *pin.* 192. *
72 *Linum arvenſe* BAUH. *pin.* 214. *

narbonenſe *
hirſutum
Craſſula coccinea
perfoliata
pellucida
. . . . [73]

B. Heptastemones.

Aeſculus hippocaſtanum.

C. Octostemones.

Tropaeolum minus
majus.

D. Decastemones.

1. *Monoſtylae*.

Tribulus terreſtris *
Zygophyllum fabago
Caeſalpina ſappan
Melia azedarach *
Guillandina moringa
Dictamnus albus *

2. *Diſtylae*.

Dianthus chinenſis
armeria *
barbatus
plumarius *
caryophillus *
prolifer *
Saponaria officinalis *
vaccaria *
ocymoides *
orientalis
Gypſophila repens *
muralis *
Saxifraga cotyledon *
rotundifolia *
tectorum *
granulata *

3. *Triſtylae*.

Alſine media *
Arenaria ſerpilifolia *
campeſtris *
Silene nutans *
rubella
quinquevulnera *
luſitanica
behen
conoidea
nutans
Cucubalus baccifer *
behen *
viſcoſus
reflexus
. . . . [74]

Gari-

73 *Craſſula portulacae facie arboreſcens* Dill. *elth. p.* 120.

74 *Silene viſcoſa alpina foliis omnibus planis, ac prorſus glabris, petalis anguſtis, intus candidis extus ex viridi luteolis, profunde bifidis, diviſionibus divaricatis linearibus, nectariis extantibus, ac ſtylis tribus longiſſimis purpuraſcentibus ſub ſole ſpiraliter convolutis*. Manetti, *Spicil. n.* 1005. Caules tricubitales, rotundi, ſubhirſuti, viſcoſi, ramoſi, ad ramos nodoſi. Calix gracilis ore acute quinquefido, albeſcens, & decem ſtriis nigris elevatis percurſus. Petala cordata ſemifida, coronae denticuli acuti incumbentes. Antherae didymae virides, & iis areſcentibus ſtyli longe producuntur. Semina nigra reniformia aſpera, & undique minimis foveolis excavata.

Garidella nigellastrum

4. *Pentastylae*.

Sedum telephium *
rupestre *
cepaea
album *
. . . . [75]

Agrostemma githago
. . . . [76]

Cerastium repens
aquaticum *
viscosum *
strictum *

Spergula arvensis *

5. *Decastylae*.

Phitolacca americana *
mexicana

POLYSTEMONES.

Monostylae.

Tilia europaea

Portulaca oleracea
pilosa
. . . . . [77]

Cistus albida *
salvifolia *
fumania *
helianthemum *

Peganum harmala

Corchorus olitorius

Prunus mahaleb *
armeniaca
cerasus
domestica
sylvestris *

Amygdalus sylvestris
persica
communis

Myrtus . . . [78]
. . . . . [79]

Punica granatus

2. *Distylae*.

Agrimonia . . . [80]
. . . . . [81]

Crataegus torminalis *
oxyacantha *

3. *Tristylae*.

Sorbus acucuparia *
domestica

Reseda luteola *
alba
lutea *
. . . . [82]

Aconitum lycoctonum *
antho-

75 *Sedum foliis teretibus ternatis, caulibus simplicibus trifidis* HALL. *emendat. n.* 107. *&c.* V. Excerptum Bernae anni 1760. T. I. p. 161.
76 *Lychnis coronaria Dioscoridis sativa* BAUH. *pin.*, & *Lychnis umbellifera montana helvetica* ZAN. *
77 *Portulaca foliis ovatis petiolatis Roy. prodr. p.* 473.
78 *Myrtus minor vulgaris* BAUH. *pin.* 469. *
79 *Myrtus boetica domestica latifolia* LOB. *ic. p.* 127.
80 *Agrimonia, seu eupatorium veterum* BAUH. *pin.* 321. *
81 *Agrimonia odorata* CAM.
82 *Reseda foliis integris, floribus odoratis* HALL. *Gott.* 95.

anthora *
Delphinium ajacis
ſtaphiſagria
elatum *
. . . . . [83]

4. *Pentaſtylae.*

Aquilegia ſylveſtris
Nigella damaſcena
ſativa
orientalis
Meſpilus germanica
Pyrus malus
cydonia *
communis

5. *Polyſtylae.*

Spiraea aruncus *
filipendula *
ulmaria
Caltha populago *
Helleborus niger *
viridis *
Iſopyrum fumarioides
Potentilla anſerina *
multifida
argentea *
reptans *
recta *
Geum urbanum *
rivale *
Comarum paluſtre
. . . . . [84]
. . . . . [85]
Rubus idaeus *
Roſa eglanteria
canina *
centifolia
alba
. . . . . [86]

CLASSIS IX.
Plantae flore hexapetalo.

I. DIANTHERAE.

Orchis bifolia *
maculata *
uſtula-

83 *Delphinum nectariis diphillis, floribus ſolitariis, foliis multipartitis, foliolis lineari acuminatis. Enum. nic. p.* 200. * Folia craſſula, ſulcata, viridia, (licet interdum ſubincana) profunde trifida, ſegmentis acute trilobis. Rami terminales longiſſime florigeri. Flos ſingulus prodit ex ala folioli lineari-lanceolati in ſpinulam inermem attenuati, nixus pedunculo bilineari, qui prope florem firmatur duabus ſtipulis lanceolato-acutis receptaculum longitudine ſuperantibus. Flos caeruleus calcare ſurſum ſpectante. Calcar leviſſime incanum duplo longius flore. Nectarium ex duabus portionibus; quaelibet autem ſuperius alam erigit linearem bifidam ſegmentis rotundis, inferius alam ſubrotundam non inciſam. Inter prima duo lateralia petala, & ſtamina naſcuntur duae laminae ex longis unguibus ovatae, inciſae, imberbes, pallidiores petalis, ſed ea omnino referentes. Hae laminae alas inferiores calcaris amplectuntur, & cum iis interiorem florem cuſtodiunt. Antherae luteae, filamentis pallidioribus. Siliquae tres laeves, toroſulae.

84 *Fragaria vulgaris* BAUH. *pin.* 326. *

85 *Fragaria chiloenſis foliis maxime carnoſis hirſutis* DILL. *elth. p.* 145.

86 *Roſa lutea ſimplex* BAUH. *pin.* 636. *

ustulata *
Ophris ovata *
Serapias . . . [87]

II. TRIANTHERAE.

Ruscus aculeatus *
hypoglossum *
racemosus.

III. HEXASTEMONES.

MONOSTYLAE.

1. *Flore fructui imposito.*
Narcissus poeticus
pseudonarcissus *
jonquilla
tazetta
Amaryllis formosissima
Pancratium illiricum

2. *Flore fructum cingente.*
Allium sativum
porrum
spaerocephalum *
scorodoprasum
vineale *
ursinum *
cepa
Lilium candidum
bulbiferum *
martagon *
Fritillaria imperialis
persica
Erythronium dens canis *
Tulipa gesneriana
Ornithogalum pyrenaicum *
pyramidale
umbellatum *
Anthericum ramosum *
liliago *
frutescens
alooides
Yucca gloriosa
aloifolia
Berberis vulgaris *
Asparagus officinalis *
acutifolius *

IV. ENNEASTEMONES.

Laurus nobilis
indica
benzoin.

CLASSIS X.

Plantae flore polypetalo.

Nymphaea alba *
lutea *
Cactus mammillaris
triangularis
tetragonus
hexagonus
grandiflorus
peruvianus
lanuginosus

flagel-

87 *Epipactis foliis ensiformibus, floribus pendulis, labello obtuso per oras plicato* HALL. *act. helv. T. IV. p.* 111. *

flagelliformis
opuntia *
tuna
cochenillifer
Adonis annua *
Anemone hepatica *
palmata
pratenſis *
coronaria
virginiana
nemoroſa *
Trollius europaeus *

CLASSIS XI.

Plantae flore apetalo exceptis graminibus.

I. FILAMENTIS COALITIS.

Ricinus communis
Ephedra diſtachya *
Thuya occidentalis
Cupreſſus ſempervirens
diſticha
Pinus larix *
abies *
Juniperus communis *

II. FILAMENTIS DISTINCTIS.

A. Juliferae.

Salix fragilis *
babylonica
Carpinus betulus *
Corylus avellana *
Fagus ſylvatica *
Platanus orientalis
Piſtacia trifolia

B. Non juliferae.

1. *Monantherae.*

Salicornia annua *
Blitum capitatum

2. *Triantherae.*

Ficus communis
Polycnemum arvenſe *

3. *Tetrantherae.*

Urtica urens *
dioica *
cannabina
Parietaria officinalis *
Aphanes arvenſis *
Elaeagnus anguſtifolia *

4. *Tetrantherae.*

Salſola kali *
ſoda *
Atriplex hortenſis
laciniata *
halymus *
portulacoides *
haſtata *
Ghenopodium bonus henricus *
vulvaria *
ſcoparia
botrys *

 ambro-

ambrosioides
rubrum *
hybridum *
glaucum
maritimum
altissimum
salsum
Amaranthus tricolor
melancolicus
blitum *
spinosus
Beta vulgaris
Cannabis sativa
Humulus lupulus *
Spinacia oleracea
Ceratonia siliqua *
Ulmus campestris *
Celtis australis

5. *Hexantherae.*

Smilax aspera *
Tamus communis *
Rumex patientia
alpinus *
crispus *
acutus *
obtusifolius *
pulcher *
bucephalophorus *
lunaria
vesicaria
scutatus *
acetosa * [88]
acetosella *

6. *Octostemones.*

Polygonum bistorta *
hydropiper *
persicaria *
orientale
aviculare *
fagopyrum
convolvulus *
tartaricum.

7. *Polyantherae.*

Mercurialis annua *
perennis *
Alcalypha virginica
Arum dracunculus
colocasia
maculatum *
arisarum *
Asarum europaeum *

CLASSIS XII.

Plantae flore apetalo.

GRAMINA.

I. DISTEMONES.

Anthoxanthum odoratum *

II. TRISTEMONES.

A. MONOSTYLAE.

Cyperus longus *

aescu-

88 *Lapathum acetosum dioicum foliis planis cordiformibus* HALL. *Gott. p.* 16. & *emend. n.* 18. * *V.* Excerptum Bernae pro anno 1760. *p.* 10.

aesculentus
Coix dactyloides
Carex filiformis
pseudocyperus.

B. Dystylae.

Saccharum officinarum
Phalaris annua
phleoides *
arundinacea *
Panicum americanum
italicum
crus galli *
Dactylon
miliaceum
Agrostis paradoxa
Melica ciliata *
nutans *
Poa bulbosa *
Briza minor *
media *
maxima *
Cynosurus aegyptius
Bromus scalinus *
arvensis *
Stipa pennata *
Avena elatior *
sativa
fatua *
pratensis *
Lagurus ovatus *
Arundo donax
phragmites *
Lolium perenne *
Elymus virginicus
Secale cereale
villosum
Hordeum vulgare
murinum *
Triticum aestivum
muticum
turgidum
. . . . . [89]

III. HEXASTEMONES.

Juncus pilosus *
campestris *

CLASSIS XIII.

Plantae flore imperfecto, seu potius inconspicuo.

Filices.

Equisetum arvense *
Osmunda regalis *
struthiopteris
spicant *
Acrostichum septentrionale *
Asplenium scolopendrinum *
ceterach *
. . . . . [90]
trichomanes *
ruta

89 *Triticum spica multiplici* Bauh. *pin.* 21.
90 *Asplenium ramosum* Tourn. *inst.* 544. *

ruta muraria *
Polypodium vulgare *
lonchitis *
criſtatum *
f. mas *
f. faemina *
rhaeticum *
Adianthum capillus veneris *



JOHANNIS FRANCISCI CIGNA
DE MOTIBUS ELECTRICIS.
EXPERIMENTUM.

NUM aër ſit neceſſarius ad motus electricos ciendos, & quantum ad eoſdem motus ejus actio conferat, quaeſtio jam dudum inter Phyſicos exorta eſt, in qua definienda FLORENTINI ACADEMICI, BOYLEUS, HAUKSBEJUS, NOLETIUS, & alii praeſtantiſſimi Phyſici ſe ſe exercuerunt, modo electrica corpora intra vacuum confricando, modo jam confricata vacuo includendo, modo demum intra globum vacuum fila diſponendo, quae ab excitata globi electricitate commoveri, ac dirigi poſſent.

At enim varius pro electricitatis majori, minorive vehementia, pro vacuo plus, minuſve accurato, pro corporum movendorum varia mole, pro tempeſtate inconſtanti, experimentorum eventus quaeſtioni adhuc locum reliquit, & in contrarias partes magnos VIROS diſtraxit, quorum alii aërem ad id, quo de agitur, neceſſarium eſſe affirmarunt, negarunt alii, alii etiam hos inter, oppoſitas ſententias conciliaturi, illam experimentorum varietatem a duplici electricitatis, qua reſinoſae, qua vitreae genere repetendam eſſe duxerunt, ita ut illa etiam in vacuo, haec nonniſi cum aëre vim ſuam exerceat.

Quaeſtionem demum Celeberrimus BECCARIA definivit, parato accuratiori vacuo, novaque excogitata methodo, qua, per verticem recipientis pneumatici traducta catena, electricitatem in vacuo commodius excitaret. In vacuo etiam barometrico motus electricos exploravit, dum ad ſuperiorem barometri partem, cui amianti fila incluſa erant, electricum corpus extrinſecus admovebat: his enim, aliiſve tentaminibus VIR *Clariſſimus* demonſtravit electricos motus in vacuo

 accu-

accurato penitus extingui, in rariori autem aëre ita languere, ut eorundem alacritas pro ratione subducti aëris imminuatur (a).

Sic demonstrata ad motus electricos aëris necessitate, illud quaeri insuper posse videbatur, id vi ne ejus coercenti, an elasticitati, an cui alii proprietati sit adscribendum, ad cujus quaestionis definitionem aptiorem viam iniri non posse censui, quam si in aliis mediis, praeterquam in aëre, & vacuo, quae a Physicis hactenus sola tentata fuerant, motus electricos explorarem.

Itaque inter catenae extremum oleo immersum, & ferreum filum cum solo communicans oleo itidem immersum, globulum ferreum ex serico filo pendulum ita collocavi, ut globulus etiam intra oleum demergeretur: dein electricitatem excitavi, ejusque vi globulum inter catenae extremum, & filum ferreum cum solo communicans in oscillationes perinde adigi observavi, ac in aëre contigisset. At idem experimentum in aqua, aliisque liquidis, quae paullo minori facilitate, quam ferrum ab electrico fluido permeantur, tentanti, non licuit mihi per mediocrem, & consuetam electricitatis vehementiam ullos motus excitare.

Ex his primo confirmari videtur in spatio aëre vacuo motus electricitate excitari nullos posse; quum enim spatium aëre vacuum electricum fluidum aeque transmittat, ac deferens aliud quodcunque medium, electricis motibus efficiendis similiter ineptum esse debet.

Evincitur deinde aëris vim in motibus electricis praestandis ex ejus elasticitate repetendam non esse, quum oleum elasticitatis expers eosdem non minus efficiat: iccirco vim aëris omnem in eo esse positam, quod & electricum fluidum coerceat, & demersa in ipsum deferentia corpora comprimat; evincitur demum media alia quaecunque, quibus im-

(a) In Epistolis ad Cl. Beccarium epist. III. §. 82. 83. 109. 110.

immerſa corpora premantur, electricis motibus faciendis eo aptiora eſſe, quo difficilius per ipſa, quam per movenda immerſa corpora, electricum fluidum permeare poteſt, quando vi ſua elaſtica quaquaverſum expanditur, vel etiam ex eorum uno in alterum effluit, ſi inaequaliter per ipſa fuerit diſtributum.

Hinc adparet de motibus electricis theoriam eo totam ſpectare, ut dato fluido elaſtico, & datis corporibus ipſum, deferentibus, per quae aequaliter, aut inaequaliter diſtributum ſit, ac dato demum medio elaſticum fluidum coercente, a quo ea deferentia corpora utcunque premantur, inveſtigentur, ac definiantur leges motuum corporum eorundem, quae ex inaequali medii coercentis preſſione producuntur, dum fluidum elaſticum, vel quaquaverſum expanditur, vel etiam ex deferentium corporum altero in alterum effluit, ut ad aequalitatem diſtribuatur: de qua quidem re praeclara nonnulla protulit Cl. Beccaria, & ſpem facit ſe plura brevi prolaturum, quae novum hoc mechaniſmi genus illuſtrare, ac perficere poſſint (*b*).

(*b*) L. C. §. 93., & ſeq.



JOHANNIS BAPTISTAE GABER

EXPERIMENTORUM DE PUTREFACTIONE HUMORUM ANIMALIUM.

SPECIMEN SECUNDUM,

In quo praecipuae agitur de ſedimento ſeri purulento, ac membrana pleuritica.

NULLIUS humoris, ut equidem arbitror, origo, & natura aeque dubia eſt, & incerta, quam puris. Nam & cum leni foetore, aliiſque quibuſdam notis cum corruptis humoribus convenit, & tamen blanda, miti, ac fere balſamica quadam indole ab iiſdem longiſſime differt, & craſſitie, aequabilitate, denſitate, albedine peculiarem corrupti humoris ſpeciem exhibet. Id autem vitae, & vitalis actionis productum Medici, ac Chirurgi plerique conſtituerunt, quod nullibi extra corpus natura, vel arte paratum hujuſmodi humorem reperiiſſent. Tandem Celeberrimus PRINGLE veram hujus humoris originem, & geneſim invenit, & luculentiſſimo experimento explicavit. Animadvertit enim abſque ulla vitae actione digeſtum ſerum, ſedimentum deponere, quod veri puris ſpeciem omnino praeſefert. Hoc inventum plane dignum mihi viſum eſt, in quo illuſtrando, & quoad fieri liceret perficiendo, ſtudium, diligentiamque conferrem. Quapropter experimenta multa inſtitui, quae, ni fallor, inventum illud comprobant, confirmant, exornant, ejuſque in hanc Pathologiae partem magnum, & uberrimum uſum oſtendunt. Nonnulla etiam eadem occaſione circa pleuriticam cruſtam experimenta tentavi, quae omnia acutiorum Virorum judicio proponenda eſſe putavi.

I. Sedimentum duplex a putreſcente ſero deponi conſtanter obſervavi; alterum primis digeſtionis diebus abſque ulla

feri perturbatione fecedebat, albidiffimum erat, fundo vafis adhaerens, & eo magis fpiffum erat, quo calor in digerendo minor adhibitus fuerat. In calore modico, ad exemplum decem graduum rheaumuriani Thermometri, fimillimum erat membranae tenerae, quae in hydropicis fit, & vifcera tegit. Portio ejufdem materiei ex fero fecedentis fimilis membranae fpecie ad ejus fuperficiem etiam innatabat. Alterum fedimentum tardius deponebatur, & feri perturbatio ejus depofitionem praecedebat (*a*), fubcinerei magis coloris a principio erat, minufque compactum, fed procedente tempore majorem denfitatem, & opacitatem acquirebat, & ex fubcinereo in album magis vergebat.

Sedimentum primum, fi digeftionis calor paullo major effet, cum hoc paullatim ita confundebatur, ut diftingui amplius non poffet. Prius illud exiguum erat, & in vafe ad fpithamam alto vix duas, trefve lineas altitudine aequabat; alterum copiofum erat, & tertiam voluminis feri fuperabat. Prius illud, ut dictum, intra unam, alteramve diem in calore humani corporis fubfidebat, hoc, nonnifi poft quinque, aut fex dierum intervallum, aut etiam tardius.

2. Eo autem citius fubfidebat, quo calor erat major; in vafis etiam anguftioribus, coeteris paribus, citius longe fecedere vifum eft, quam in amplioribus, quando in utrifque feri fuperficiès oleo tegebatur. In vafis autem hermetice claufis, coeteris item paribus, paullo tardius fubfidere vifum eft, quam in iis, in quibus feri fuperficies oleo tegebatur, & in his iterum aliquanto tardius, quam in iis, in quibus ferum nudum ad aërem patebat.

3. Coeterum fecundum fedimentum etfi plerumque ex albo fubcinereum, opacum, homogeneum adpareret, & vafis infimam partem occuparet ita, ut horizontalem fuperficiem haberet, interdum tamen inprimis fi ferum ex hominibus dif-

(*a*) Cl. Pringle T. II. trait. fur les fubftanc. feptiq., & antifeptiq. Exp. XLV. p. 278.

discrasia aliqua laborantibus esset eductum, & colore aliquo, vel bilis, vel alterius humoris infectum, non ejusmodi erat sedimentum, sed inaequale, in flocculos divisum, partim ad fundum colligebatur, partim ad superficiem ferebatur: idque etiam multo magis in vasis apertis contingebat calori humani corporis, aut etiam vehementiori expositis, quando ex evaporatione dissipata tenuiori parte, priusquam crassior haec secederet, ita confusè deponebatur, ut non album, sed plus, minusve nigrum, foetens, glutinosum sedimentum relinqueret instar capitis mortui a seri distillatione residui (*b*).

4. Ex his, aut similibus causis fortuitis factum fuisse censeo, ut aqua, quae sedimento supernatabat, viridis fuerit observata a Cel. PRINGLE (*c*), qualem mihi semel, & bis observare contigit in sero nudo ex ictericis educto, & calori viginti-quinque graduum exposito. Sed quando serum sanum, oleo tectum, aut hermetice clausum in calore viginti-quinque, aut triginta-quinque digerebam, observabam constanter aquam supernatantem decolorem, & eo magis limpidam, quo diutius fuerat digesta.

5. De aëre vix memorare necesse est dum sedimentum fieret, & dum addensaretur, copiosum semper per oleum bullarum specie erupuisse, quando oleo liquor tegebatur: in vasis autem hermetice clausis etiam robustis, tanta copia haud raro collectum, inprimis si vacuum spatium, exiguum, serum autem copiosum esset, ut vasa ingenti cum fragore diffringeret.

6. Compressioni hujusmodi ab aëre factae tribuendum censeo, quod in clausis hoc pacto vasis sedimentum tardius secederet (2); ut enim motum quemlibet intestinum, ita & putrefactionis exordia, ex quibus illa sedimenti secessio profi-

(*b*) Vid. T. praeced. p. 81.
(*c*) L. c.

proficifcitur, pro ratione compreffionis retardari, aut impediri, BOYLEI experimenta luculentiffima oftendunt.

7. Juvabit modo fedimenti hujus, & puris qualitates exponere, ac comparare.

1.° Pus album fere eft, opacum, fpiffum (*d*): eamdemque effe fedimenti fpeciem mox memoravimus.

2. Pus in aqua diffolvitur, & deinde fitu ipfo iterum fubfidet (*e*): idipfum fedimento evenire per experimenta comperi.

3.° Pus frigore non cogitur (*f*): eamdem proprietatem fedimentum praefefert.

4.° Pus laudabile fere femper foetet (*g*), fed parum, & vix fenfibiliter (*h*): ita quando fedimentum deponitur vix foetere incipit (*i*), & praeterea cum acidis nondum effervefcere, quinimo iifdem, & igne coagulari, tum fedimentum, tum fupernatantem aquam obfervavi fecus, ac in fero penitus corrupto contingat (*k*). Eamdem etiam proprietatem puri ineffe experimentis deprehendi, ut & alkoole, & acidis, & calore pene eodem, quo ferum cogeretur, quae puris proprietas, ut opinor, ad ejus ortum ex fero confirmandum plurimum facit.

5.° Demum pus inflammabile effe dicitur (*l*); nec inflammabilibus partibus ferum deftitui ejus analyfis oftendit (*m*).

8. Quod

(*d*) Cl. QUESNAY de la fuppuration p. 2. 3. ex albido flavefcens Cl. ESCHENBACH prix de l' Academ. de Chirurg. Tom. II. p. 371.

(*e*) Trait. des tumeurs, & des ulcéres. Tom. I. p. 39.

(*f*) Id. l. c.

(*g*) Id. l. c.

(*h*) Cl. QUESNAY l. c. AQUAPENDENTE apud ESCHENBACH l. c. p. 373. Cl. GRASHUIS in eod. lib. p. 279.

(*i*) Cl. PRINGLE turbatur ferum antequam foetere incipiat. l. c. p. 282.

(*K*) Ex MALPIGHIO Ill. HALLER Phyfiol. Elem. T. II. p. 132. SCHVVENCHE tamen ferum corruptum cum fumme acidis metallicis in maffam coire poft effervefcentiam. Haematolog. p. 134.

(*l*) Ill. HALLER l. c. p. 128. not. h.

(*m*) Id. l. c. p. 139.

8. Quod si consideremus ea, que in vulnere contingunt, ubi referente BOERHAAVIO, postquam haemorrhagia cessavit, liquor dilutus, rubellus, tenuis effluit (*n*), qui tertio, quartove die serius, vel ocyus in liquorem tenacem, album, pinguem, aequalem, pus abit (*o*). Si cogitemus eam mutationem non contingere, quando vel crusta sponte nata, vel emplastro vulnus non tegitur (*p*), manifesto, ni fallor, constabit, quomodo ex effuso sero pus in vulneribus resorpta tenuiori parte relinquatur: neque dubito ex spissescente lympha pus illud produci, etsi Vir Cl. lympham in vulnere quantumvis relictam, numquam spissescere contendat (*q*), & id solum praestare, ut emollita arteriarum extrema phlogisticum id dimittant, quod postea in pus est abiturum (*r*): quidquid in vulneribus etiam cum exigua inflammatione, aut etiam dispositionibus inflammationi oppositis tamen bona suppuratio plerumque fit, quae vulneris sanationem adjuvat, & cicatricem citam producit (*s*)? & ex oculis infantum palpebris per aliquod tempus conglutinatis sine ulla, sive inflammationis, sive suppurationis nota hujusmodi materia saepe exit (*t*): huc accedit ratio, quam affert Cl. PRINGLE (*u*), quod setacea magnam quotidie puris copiam praebendo insigniter debilitent, quod fieri non posset ex solo partis vitio, absque universali humorum jactura, & Cl. DE-HAEN advertit ex vulneribus tamdiu tanta copia pus effluere, ut homines pereant defectu virium, cum stagnans in extremis vasis phlogistica materies ne centesima quidem puris partem suppeditare posse videatur, quae om-

(*n*) De cognosc., & curand. morb. aph. 158. n. 4.
(*o*) Ibid. n. 7.
(*p*) Cel. SVVIETEN iu eum loc. T. 1. p. 230. GRASHUIS l. c. p. 287.
(*q*) Cl. DE-HAEN T. II. p. 32. ad 36.
(*r*) Id. Ibid. a p. 37. ad 43.
(*s*) Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.
(*t*) GRASHUIS l. c. p. 299.
(*u*) L. c.

omnia ex propofita feri fanguinei in pus degeneratione (*v*), facilius intelliguntur, quin ut neceffe fit ad puris in vafis efformationem confugere (*x*), cum inprimis, ut dictum eft, in vulneribus quibufdam abfque inflammatione locali, tum abfque univerfali humorum vitio bonum pus prodire fuerit obfervatum (*y*).

9. Sedimentum porro principio dilutum, ac rarum continuata digeftione craffius, denfius, & albidius evadit. Idipfum puri five vulneratae, five inflammatae partis contingit, ut primum aquofius, & dilutius, opacum magis, denfum, albumque fiat, prout temporis progreffu digeritur, & ad maturitatem, ut inquiunt, perducitur.

10. In inflammatione autem cum ferum fanguini admixtum in cellulofam effundatur (*ʒ*), inde intelligi poffe videtur, quare pus inflammationis magis putrefcibile fit (*a*). Sanguinem enim magis putrefcere, quam ferum, & PRINGLEI experimenta (*b*), & mea (*c*) demonftrarunt.

11. Coeterum ferum plus, vel magis difpofitum effe ad fedimentum deponendum demonftrant exempla furunculorum, qui uno die pus fundere incipiunt (*d*), tum anginarum uno die pus exfudantium (*e*): quod autem pus citius efformetur (*f*), quam fedimentum fecedere foleat in calore humani corporis, id tribuo tum memoratae difpofitioni, tum calori inflammationis naturali majori, tum modicae effufi feri quantitati (2): nec igitur aufim definire, num aliquando ex

 ipfis

(*v*) p. 44. 45.
(*x*) Cl. DE-HAEN l. ult. c. Et de pure vulneris Cl. QUESNAY l. c. p. 6. 7.
(*y*) Vid. fup. not. s.
(*ʒ*) HALLER Elem. Phyfiol. T. I. p. 37. 38. 115. 116.
(*a*) QUESNAY l. c. p. 15.
(*b*) Exp. XLII.
(*c*) Vid. T. praec. p. 80.
(*d*) DE HAEN T. I. p. 20. 21.
(*e*) Ibid. p. 21.
(*f*) In vulneribus inflammatis jam fecundo, aut tertio die pus invenitur Cl. QUESNAY l. c. p. 19. 20.

ipſis vaſis pus efformatum effundi poſſit (8); inde intelligitur, cur pus in membrana pinguedinea plerumque ſedem habeat (*g*), ea nimirum in parte, quae ob laxitatem effuſum ſerum recipere ſolet; cur diſſipatio oedematoſi tumoris inflammatae parti ſupervenientis reſolutionem faciat (*h*), quod nempe reſolutio fiat, ſi effuſum ſerum prius reſorbeatur, quam in pus abierit.

12. In hydropicis vero ut plurimum ſerum parum admodum putreſcit (*i*), cum neutro ſalium genere efferveſcit (*k*), & ſeri incorrupti coagulabilem indolem ſervat ab acidis (*l*), igne (*m*), & alkoole, quod tribuerim frigidiori aegrotantium conſtitutioni, alicui reſiduae effuſi humoris circuitioni, copiae, qua & in magnas cavitates effunditur, & eaſdem replet; quae omnia ipſius depravationem retardent (2): inde mirum non eſt ſi pus non efformet, ſed primum tantummodo ſedimentum (1) deſcriptum membranarum ſpecie deponat viſcera obtegentium. Enim vero quando paullo magis putreſcit, ut ex ſiti, tuſſi, febre, eryſipelate, tympanitide ſignificatur, tunc utique etiam verum pus generat, ut obſervationes oſtendunt (*n*). Quando vero parum corruptum, & inodorum educitur, tunc digeſtione verum ſedimentum utique deponere obſervavi, quod oſtendit membranas illas, quae viſcerum ſuperficiem obtegunt, non a ſecundi, ſed a primi ſedimenti materie ortum ducere, cum ſecundi ſedimenti materies in eodem ſuperſtes ſit, diuturniori digeſtione demum ſeparanda.

13. Mem-

(*g*) Grashuis l. c. p. 295.
(*h*) Quesnay l. c. p. 23. 24.
(*i*) Bohn lethal. vuln. p. 149.
(K) Gmelin commerc. Lit. Nor. 1745. heb. 52. apud Haller l. c. p. 134.
(*l*) Ex Malphigio Duverney ibid. p. 136. not. m.
(*m*) L. c.
(*n*) Vid. diſſert. Ludovici Salzmann de abſceſſu interno mirae magnitudinis, quae eſt cxxvi. T. iv. diſput. Medic. quas collegit Hallerus.

13. Membrana autem, quam memoravimus hydropicorum viscera tegens (*o*), calore hypocausti digesta in liquamen mutabatur, quod omnes puris dotes exhibebat (7). Quemadmodum primum sedimentum continuata digestione, secundi, & vere puriformis sedimenti naturam induebat, ut cum eodem confunderetur (1); hinc facile mihi persuadebam, tum hanc membranam, tum utrumque sedimentum ex eadem materie constitui, quae minori digestione parcior secedat, & membranae, aut primi sedimenti speciem induat, majori, & diuturniori, & secedat copiosius, & pus referat.

14. Cum pinguedinem, aut solum, aut praecipuum puris elementum nonnulli esse velint (*p*), libuit experiri quid digesta pinguedo praestaret, sed eamdem rancescere quidem, putrescere, in flavum vergere deprehendi, absque eo quod aut sedimentum deponeret, aut ullo modo ad puris similitudinem accederet: hinc pus ab eadem vitiari potius, quam constitui crediderim; & revera venerea ulcera, in quibus pinguedo corrupta, rancida, puri admiscetur, sordida esse solent, & malae indolis pus effundere (*q*).

15. Cruorem etiam diutissime licet vase hermetice clauso digestum, fluidiorem quidem, & subobscurum evadere, numquam vero in partes secedere, aut ad puris colorem, aliasque dotes accedere observavi. Quare minus probabilis eorum sententia visa est; qui ex cruoris globulis vitali motu attenuatis, & album colorem induentibus puris originem repetunt (*r*); verosimilius ergo sanguinem coeteris puris principiis admixtum, ipsum magis foetidum, & deterius reddere, ut de inflammationis pure superius notatum (10).

 Nec

(*o*) Eadem phaenomena exhibet membrana tegens viscera inflammata: An meliceriides, & frigidi alii tumores tarde suppurantes ex eadem materia?
(*p*) Cl. GRASHUIS l. c. p. 297. 299.
(*q*) Id. l. c.
(*r*) PLATNER Chir. §. 54. Cl. QUESNAY, qui de la saignée p. 418. 419. pus ex crusta phlogistica fieri censet, & p. 415. 416. crustam a cruore destructo, & colorem mutante fieri existimat.

Nec aliter admixtum ſero cruorem ſedimentum obſcurioris coloris, & magis foetens effeciſſe obſervavi.

16. Similiter ſero admixta bilis ſedimenti colorem, & reliquas dotes a puris dotibus eo magis diverſas efficiebat quo majori copia admiſcebatur. Hinc ex abſceſſibus hepatis raro bonum pus prodire obſervationes oſtendunt (*ſ*); hinc eryſipelas ichorem potius, quam pus generat (*ſ**).

17. Demum & inveſtigare volui quid ſolidae partes digeſtae exhiberent. Itaque carnis fruſtula in ſerum, aut aquam immergebam, & impoſitis ponduſculis impediebam quòminus ex putredine leviora facta ad ſuperficiem elevarentur: dein tegebam oleo utriuſque liquoris ſuperficiem, ac demum in digeſtionis calore vaſa reponebam. Animadverti autem ex digeſtione carnem aqua immerſam in pulverem veluti ſubpallidum reſolutam, qui nullam cum pure ſimilitudinem referebat, carnem vero in ſero immerſam in ſimilia ramenta reſolutam fuiſſe, quae purulento ſeri ſedimento admixta ipſius aequalitatem & colorem vitiabant (*t*).

18. Ex quibus omnibus jam conſtare videtur puris originem vitali motui adſcribendam non eſſe (*u*), niſi quatenus calorem facit, qui ſpontaneam humorum degenerationem promovet; deinde puris materiem non ex cruore, aut pinguedine, aut bile, aut ſolidis eſſe repetendam, ſed dumtaxat a ſero, coeteros vero humores, aut ſolidas partes ſero admixtas puris naturam depravare.

19. Ichor igitur, aut ſanies ex alterius cujuſcumque humoris ſero admixti ſpontanea degeneratione repetenda eſt, tum

(*ſ*) Si abſceſſus in intima jecoris ſubſtantia ſit; non negamus enim ſincerum pus ſub ejus membrana colligi poſſe illaeſo parenchimate.

(*ſ**) De-Gorter ſyſt. prax. §. 160. & alibi.

(*t*) Negat enim Cl. De-Haen ſolidas partes in pus converti, & ex ramentis ſolidarum partium puris acrimonia detritis, puris homogeneitatem tolli l. c. p. 35. 36. 37.

(*u*) Quae communis Medicorum ſententia erat (vid. Boerhaave aph. 387., & alios pleroſque) priuſquam Cl. Pringle ſola ſpontanea ſeri degeneratione purulentum humorem parare docuiſſet.

tum ex diuturniori ejusdem stagnatione; tum forte etiam ex nimio, & inaequali calore (3), aut ex prava, & vitiata seri indole in variis dyscrasiae speciebus, aut demum ex vitio partis serum, aut salsum, aut aliter depravatum effundentis; hinc forte est, ut belladona, & cicuta, quae narcotica sunt, & vasa laxant, ichorem cancrosum in pus convertant, & tantam ejus profusionem faciant, ut aegrotantes in virium prostrationem conjiciantur (*v*).

20. Serum porro in vase hermetice clauso, ut diximus, diutius asservatum, postquam sedimentum deponit, magis limpidum usque, & usque evadit (4), ut tandem aquae limpidissimi fontis speciem referat: tunc vero sedimentum jam fere totum dissipatum est, ejus loco remanente exigua congerie minutorum fragmentorum, quae calcaream substantiam, sabulumque imitantur (*x*), ut in sero per plures menses asservato observavi, tunc vero aqua supernatans evaporabilis tota est, foetet, & ex acidis concentratis opaca dumtaxat, & lactea nonnihil evadit, vehementer effervescit, quin tamen coaguletur; in aperto vase per biduum relicta omnem effervescendi vim amittit. An ex ea calcarea materie skirri origo est explicanda?

21. Hinc apparet quomodo intelligendus sit Cl. Pringle, qui sedimentum nec colorem mutare, nec sero amplius misceri doceat (*y*). Ex elementari vero terra sedimentum fieri censet Vir Celeb. nutriendis partibus destinata: quapropter observare libuit qualenam sedimentum serum praeberet animalium, quorum ossa ex rubia rubro colore tincta fuerant, sed de more ex albo in subcinereum vergens fuisse observavi.

22. Pla-

(*v*) Ex belladona Cl. De-Haen p. 43. 46. l. c. ex cicuta vulg. Cl. Storck in libell. de cicuta p. 104. corollar. 8.

(*x*) Quales mollecūlas teneras tophis podagricis similes in siccato sero superstites observavit Eller, Mémoir de Berlin T. XI. p. 25.

(*y*) l. c.

22. Placuit etiam ſerum igne induratum digeſtione in vaſe clauſo explorare : paullatim ſolvebatur , aquam dimittebat , & gelatinae ſpeciem induebat , quae emollita ſenſim tandem ſedimentum puriforme priori (1) haud abſimile exhibebat , poſtea vero colliqueſcens ulterius hujuſmodi ſedimentum modicae arenae ſpeciem ſimiliter aſſumebat , aqua limpidiſſima ſupernatante (20) ; ſed haec omnia tardius quam in ſero non coagulato contingebant (ʒ) .

23. Libuit demum albumen ovi explorare , quod ſimilia penitus phoenomena , ſimileſque mutationes , ac ſerum digeſtum exhibuit , & fluidiſſimum evaſit depoſito ſedimento, ſed haec omnia tardius quam in ſero contingebant , & ſedimentum ſubcinereum magis , ac fere nigricans erat .

24. Hactenus de ſedimento ſeri puriformi . Quoniam vero puris materiem nonnulli ex eadem materie, ex qua pleuriticam cruſtam fieri docuerunt (*a*), non inopportunum cenſeo experimenta addere nonnulla , quae in cruſta pleuritica tentavi .

Cruſtam pleuriticam aeſtivo tempore poculo tectam , poſt aliquot dies per deliquium fluidam evaſiſſe Cl. Pringle obſervavit (*b*) ; eam mutationem in vaſis hermetice clauſis pariter contigiſſe deprehendi , ita ut cruſta tota in fluidum abiret citius , vel tardius prout craſſior , denſiorque , aut tenuior , rariorque erat : prout vero emolliebatur, ſenſim ſenſimque rubrum colorem acquirebat , quamquam adhaerens rubrum craſſamentum diligentiſſime fuiſſet deterſum , proinde in liquamen abibat plus , minuſve rubrum ; inde ſuſpicari coeperam revera molleculas ſanguinis colore depoſito in cruſtae elementa abiiſſe .

25. At

(ʒ) Inde intelligitur cur ex corruptione , igne induratum ſerum penitus ſolvi negaverit Cl. Petit Epiſt. II. p. 25.

(*a*) Cl. Quesnay de la ſaignée edit. nov. p. 418. 419. qui cenſet ex propria ſanguinis ſubſtantia cruſtam *glaireuſe* confici ab aucta vaſorum actione , ita deſtructa , ut rubrum colorem depoſuerit Cl. Sauvages ſur l'inflammation §. 87. De-Haen P. II. p. 17. & 22.

(*b*) Exp. XLII.

25. At postea albidissimas crustas (*c*) nactus, & teneras, eas digestione in limpidum, ac decolorem liquorem olei aemulum resolvi observavi, quapropter verosimilius visum est ruborem, quem (24) sensim prodire observaveram, ex irretitis globulis sanguineis provenisse, qui postea soluti, & cum materie membranae propria (*d*) admixti magis conspicui evaderent, & revera jam observaverat Cl. QUESNAY (*e*) interdum cruoris molleculas tot intercipi, ut crusta rubra fit, & cum placenta sanguinea confundatur, nec ejus crassities definiri proinde possit, nisi novacula scindendo observetur quousque durities, & resistentia perveniat. Quoniam vero globuli sanguinei etiam plures intercipi solent, & solutione manifestari, etsi antea membrana irretiti conspicui non essent; inde intelligitur cur in morbis, prout crusta augetur, cruoris quantitas minui videatur (*f*).

26. Ut vero ad propositum revertamur, soluta crusta in oleosum liquorem abierat, & foetens erat, ut tamen acidis, & igne coagulari hactenus posset, & quod ad rem nostram facit, quantumvis in vase hermetice clauso digesta numquam aut speciem mutabat oleosi liquoris, aut sedimentum ullum puri simile deponebat, sed deponebat perpaucas particulas, quae pulverem tenuissimum, cinereum referebant, ex quo verosimile videbatur ex aliis feri partibus conflari, ac eae sint, ex quibus sedimentum constituitur, tum etiam ejusdem materiem ab hydropicae membranae materie discrepare cum illa digestione non fluida, sed puriformis evaderet (13).

27. Quo-

(*c*) Ideo autem albidissimae erant, quod saepissime per viginti-quatuor horas aquam mutaveram, diversisque in vasis ablueram, aqua autem semper rubuit.

(*d*) Membranam observavi, ex qua ejusdem ortum illustrari crediderim. Etenim crusta, quae sanguineam placentam obtegebat, crassa, dura, eidem firmiter nexa in ambitu producebatur in mucosam, floculentam membranam, quae sensim emollita in serum continuari videbatur, in quod immersa erat, ut coronam veluti circa placentam constitueret.

(*e*) L. c. p. 411. 412.

(*f*) Id. ibid. p. 407. 408. 415. 416.

27. Quoniam vero soluta calore iterum cogitur, inde intelligitur, cur citius aqua calida, quam frigida solvi visa sit (*g*), quod nempe aquae calore indurata perinde, ac induratum ex calore serum tardius colliquescat (22): de coetero digestionis calor eo citius ejusdem membranae portiones solvit, quo intensior est, quamdiu humanum calorem parum superat.

28. Cum humor crustam efformaturus dum sanguis educitur, fluidus, forma olei ad superficiem colligatur, mora demum in crustam densandus (*h*); explorare volui num instar glaciei ex calore humani corporis pristinam fluiditatem recuperaret, sed frustra. Nam in eo calore constituta crusta nonnisi duorum dierum intervallo soluta est, & soluta foetebat, nec amplius frigore pristinam consistentiam recuperabat: quapropter conclusi non calore liquari, sed ingruente putredine.

29. Equidem nitro, aut nitrata aqua, aut etiam aqua pura crustam solvi docent (*i*): sed in aqua sive pura, sive nitrata vix ac ne vix quidem citius resolvi observavi, quam si sola in calore digestionis relinqueretur. Praeterea aquam solutae crustae supernatasse vidi, ut praeterea digestione potius, & putredine, quam vi aquae soluta fuisse videatur, cum inprimis observaverim crustam nitro, aut salibus aliis neutris, aut alkalicis fixis putredinem arcentibus aspersam longe tardius solutam fuisse; neque sic soluta, aut etiam admixtis salibus ex frigore iterum est indurata.

30. Volatilium demum alkalinorum spirituum actionem in hanc crustam explorare volui, & vidi quidem cum spiritu volatili salis ammoniaci calce parato in vase clauso calore viginti-quinque graduum digestam membranam intra horam, tremulae gelatinae speciem induisse, per quatuor vero horas penitus solutam fuisse in liquorem admodum fluidum,

(*g*) Cl. De-Haen P. I. p. 87.
(*h*) Cl. Quesnay l. c. p. 405. 406.
(*i*) Cl. De-Haen l. c. P. I. p. 101. n. 1. de vi nitri solvente.

dum, homogeneum, coloris nonnihil rubelli; tunc vero liquorem hunc in vas patulum effudi; in quo aliquot horarum spatio, dissipato alkali iterum in gelatinam concreta est; interea dum ejusdem membranae frusta alia, aut sola digesta in eodem calore, aut cum nitro salibus neutris aliis, alkalicis fixis, octava tandem die, vel etiam tardius ex integro soluta fuerunt. Membrana etiam albidissima, quae in alkoole per mensem, & ultra servata induruerat in corium, quod aqua emolliri, aut dissolvi amplius non potuisset (*k*), pari facilitate soluta est, & iterum congelata. Jam vero ea solutio ex putredine repetenda non est, cum tam cito dissolvatur, quamvis affusus liquor putrefactioni vehementer resistat, & eodem in auras abeunte iterum concrescat. Notandum tamen ex alkali volatilis dissipatione solutam membranam pristinam membranae duritiem non recuperasse, sed in firmiorem tantum gelatinam concrevisse, quæ novo spiritu alkali affuso absque digestione confestim solvebatur, ejus dissipatione iterum concretura. Gelatinam etiam artificialem ex cornu cervi, volatili spiritu salis ammoniaci solvi observavi, sed aegrius, quam pleuriticam membranam: aegrius adhuc, & tardius solvebatur coagulatum ex igne serum, & omnium tardissime, & minus perfecte coagulatum albumen ovi. Posteriores binae solutiones spiritu dissipato crustas pellucidas relinquebant. Ex his constat verum membranae phlogisticae menstruum esse alkali volatile, ex quo confirmatur ejusdem membranae analogia cum polypis, qui urinoso volatili sale solvi dicti sunt (*l*). An igitur liquor membranam efformaturus induréscit quarumdam partium dissipatione potius, quam frigore? Has, aliasque conjecturas, quae circa naturam, & phoenomena hujus membranae occurrunt, proponere non licet, quamdiu experimentorum plurium comparatione confirmatae non sint.

N REFLE-

(*k*) Schwenke p. 166.
(*l*) Malpighius posth. p. 162.

RÉFLEXIONS

POUR SERVIR DE SUITE AUX MÉMOIRES

Sur le fluide élastique de la Poudre à Canon

PAR M. LE COMTE SALUCE.

CHAPITRE I.

De l'action de l'air sur la Poudre: de la propagation de l'inflammation & de son détonnement.

1. DANS les Mémoires, que j'ai donné dans nôtre premier Volume, je me suis particuliérement attaché à examiner la nature du fluide élastique, qui se développe de la Poudre à Canon à l'occasion de son inflammation, & l'Analise Phisico-Chimique que j'en ai fait, m'a donné occasion d'entrer dans des discussions de plusieurs phénoménes, qui partageoient les sentimens des Savants. Les objections des Célébres M. MUSCHEMBROEK & BERNOULLI (*a*) m'ont paru les plus solides, & mériter le plus d'être développées; c'est ce que je me flatte d'avoir fait, & je ne donnerai maintenant à cet égard que quelques observations & reflexions que j'ai fait du depuis: mon principal but dans ce Mémoire étant d'exposer & de démontrer par des expériences nombre de vérités, & de questions, qui n'ont été jusqu'à présent que très-imparfaitement traitées, & dont personne n'a encor donné aucune solution: telles sont par exem-

(*a*) Mém. pr. p. 6. . . . . Mém. 2. p. 126.

exemple, celles de déterminer *quelle est la véritable action de l'air naturel sur la Poudre: comment les principes actifs de la Poudre sont développés à l'occasion de l'inflammation*, je tacherai aussi de déméler *le dégré de chaleur nécessaire pour l'enflammer &c.*: je ne m'arrêterai point à faire par avance le détail de toutes les questions que j'aurai occasion de traiter, quelques unes étant purement accidentelles, & quelques autres ne me paraissant pas d'une assès grande conséquence pour mériter que j'en prévienne mes Lecteurs; je me contenterai donc d'en indiquer les principales. Savoir 1.° *La raison pourquoi dans le vuide, quoique la poudre prenne feu, la propagation d'un grain à l'autre ne s'en fait pas pour autant.* 2.° Je traiterai *de la chaleur nécessaire pour l'enflammer soit dans l'air libre, ou dans le vuide, & cela selon la dose & la qualité des composans.* 3.° J'exposerai ensuite la méthode dont je me suis servi *pour mésurer l'intensité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire.* 4.° Je passerai en après à parler *des vapeurs du souffre, de la poudre, des méches, & de chandelles allumées &c.*, & j'aurai occasion de faire *des réflexions sur la méthode dont on fait usage dans les expériences sur ce sujet.* 5.° Je finirai enfin par un *examen de la poudre qu'on peut faire sans souffre.*

2. Tous les Phisiciens ont observé que la poudre ne brule que très-lentement, très-difficilement, & en très-petite quantité dans le vuide, mais quelques uns se sont contentés de rapporter simplement le fait (*a*). D'autres ont confondu ce phénoméne avec ce qui arrive à toutes les espéces de flammes, & ont assigné cet effet à quelque propriété particuliére de l'air. Un fait que j'ai rapporté dans mon second Mémoire pag. 146. §. 42., & un examen refléchi sur d'autres expériences faites par plusieurs

(*a*) Boyle Expér. circa relat. flam. & aer. tit. 3. pag. 164. & 165. = Haukbee = Mariotte, & plusieurs autres.

Auteurs m' ont donné lieu de penser que ce n'était que dans la pression qu'exerce l'air sur la flamme qu'on en devait chercher la raison. En effet j'ai fait voir que la poudre s'enflamme dans quelque air infecté que ce soit, & BOYLE (*a*) nous apprend qu'une fusée continue à bruler sous l'eau. *La flamme de la poudre n'a donc besoin que d'une pression qui en augmente l'intensité en la retenant au tour des grains* ? C'est une vérité que l'expérience que je vais rapporter me parait mettre hors de doute, elle a été faite par M. le Chevalier D'ANTONI pour faire voir les différences entre les quantités de poudre, qui s'enflamment dans le plein & dans le vuide. Quoique cette expérience n'ait donc pas été faite dans la vuë que je viens de proposer, on verra cependant que l'application en est directe, & qu'elle sert à établir solidément la Théorie en question: sans entrer dans une déscription étenduë de la machine, il suffit de dire que l'essentiel consiste en ce que le tuïau, qui contient la poudre, n'est point vuide d'air, tandis que, par le moien d'une vessie ou parchemin, interceptant la communication qu'il a avec un grand récipient, que l'on place sur une pompe pneumatique, on peut pomper l'air contenu dans le récipient ou l'y laisser: on met ensuite la poudre en feu, & le fluide ne peut se faire jour qu'à travers la vessie. Or il arrive que, lorsque le récipient est vuide d'air, il s'enflamme beaucoup moins de poudre que lorsqu'il est plein: en refléchissant sur les circonstances de cette expérience nous pouvons aisément reconnaître la vérité que nous venons de proposer; car le tuïau qui contient la poudre étant également plein d'air lorsque le récipient, auquel il tient, est plein, ou vuide; il est clair, que dans le cas ou il est vuide la propagation du feu cesse, parceque au moment que le

(*a*) BOYLE loco cit.

le parchemin eſt rompu par l'exploſion des prémiers grains, l'air naturel contenu dans le tuïau ceſſe auſſi de comprimer la flamme, laquelle en ſe raréfiant n'a plus aſſez de chaleur pour mettre en feu les grains qui reſtent.

3. Il n'eſt pas moins aiſé de voir en rapprochant les circonſtances de ces expériences, que l'air ne fait point d'autre fonction que de comprimer la poudre, & qu'en s'oppoſant à la libre expanſion de la flamme & du fluide, il procure une intenſité ſuffiſante au feu des prémiers grains pour enflammer les autres, & à méſure que la preſſion eſt plus grande, la propagation du feu eſt auſſi plus prompte. *Cette plus grande intenſité dépand donc de la denſité que la flamme aquiert par la preſſion.*

4. Delà il eſt facile de rendre raiſon pourquoi en enflammant la poudre dans un récipient, par le moyen d'un verre ardent ou d'un fer rouge, au commencement on ne met en feu qne les grains qui ſont immédiatement atteints par le feu, & enſuite à méſure qu'il ſe développe de fluide, la propagation du feu ſe fait aux grains voiſins, & cela plus ou moins promptement, ſuivant que la quantité d'air développé eſt plus ou moins grande, eu égard à l'eſpace qu'il doit occuper. Il eſt vrai que ces dégrès d'accélération ne ſont point aſsès ſenſibles dans le vuide, parceque étant obligé d'emploïer des petites quantités de poudre pour prévenir les accidens facheux, qui ne manqueraient pas d'arriver à l'occaſion de l'inflammation, il ne ſe développe que de très-petites quantités de fluide: pour s'en aſſurer donc, & en faire une comparaiſon ſolide avec l'air naturel, il eſt néceſſaire qu'il s'en produiſe autant qu'il en faut pour réſiſter conſidérablement à l'expanſion de la flamme de la poudre qui continuë à s'enflammer, afin que la flamme d'une quantité ſoit ſuffiſante à mettre en feu celle qui la ſuit, de façon que la propagation ſe faira avec la même viteſſe que dans l'air naturel lorſqu'il ſe ſera dé-

développé assès de fluide pour être en équilibre avec l'air extérieur: ce qui est en effet prouvé par les expériences de HUIGENS, & de MUSCHEMBROEK. Celles dont je vais donner le détail peuvent servir de confirmation à ce que je viens d'avancer.

EXPERIENCE.

Je mis une fusée enflammée dans un récipient, j'en pompai l'air, & le fluide nouvellement engendré avec beaucoup de précipitation, à chaque exhantlation, on en voïait diminuer la flamme, lorsque enfin elle parut éteinte je fis rentrer un peu d'air qui la révivifiat dans l'instant, & elle brulait ensuite avec plus de vivacité à mésure qu'il se développait du nouveau fluide: je fis enfin une seconde fois le vuide, & je continuai pendant quelque tems à pomper le peu de fluide qui pouvait encore se produire, & la fusée fut éteinte.

5. On ne trouvera pas mauvais que je fasse observer d'avance que je me suis aussi servi de l'expérience suivante pour déterminer la force & l'élasticité du fluide qui se développe de la poudre à canon, comme on le verra dans la suite.

EXPERIENCE.

Un tuïau de verre de la longueur de 9. pieds de Roi environ, était recourbé de deux côtés, & placé sur une planche de même longueur perpendiculairement à l'horizon; la partie supérieure communiquait avec un autre tuïau très-mince, & d'un fort-petit diamêtre, qui étant paralelle au prémier était soigneusement mastiqué à la pompe pneumatique, & lorsqu'on avait tout le vuide possible, on interceptait hermétiquement la communication entre les deux tuïaux

tuïaux à l'endroit de la jonction, afin de simplifier la machine, & la rendre moins sujette à se casser: la partie inférieure aussi recourbée & paralelle au grand tuïau, n'en était que la continuation, & était de la longueur de 30. pouces environ, elle tenait à un autre tuïau placé horizontalement, & d'un diamêtre presque triple, lequel était uni pour la longueur environ d'un pied, & portait ensuite au moins une douzaine de boules soufflées dans le même tuïau du diamêtre d'un demi pouce environ chacune, & gardant entr'elles un espace cilindrique d'un poûce à un pouce & demi: par le moïen d'un autre petit tuïau on pouvait faire le vuide dans cette autre partie de la machine, & lorsque le mercure était de niveau, on scellait hermétiquement ce tuïau: chacune des boules contenait une égale quantite de poudre en pòids, je me servais d'une cuillere de verre, faite à peu près comme celles, avec lesquelles on sert les piéces d'Artillérie, & j'évitai par ce moïen l'inconvénient de ne pas mettre chaque dose dans sa boule: je mettais ensuite des charbons ardens dans un cuiller de fer que je plaçais sous la prémiére boule, dont la poudre s'enflammait après quelque tems, & faisait monter le mercure à une certaine hauteur: lorsque tout était froid, je mettais le cuiller de fer sous la seconde boule, & je continuais de la même maniére pour les suivantes. Or il arrivait, que pendant que le mercure était plus bas que lorsque j'avais fait le vuide dans le long tuïau, la poudre de chaque boule ne prenait feu, que quand le charbon en feu était dessous; mais aussitôt que cette colonne avait atteint à peu près la même hauteur le feu se communiquait d'une boule à l'autre, de sorte que le mercure était poussé à une hauteur qui n'était pas comparable avec les précédentes; & une fois entre autres, où il se trouvait encore plusieurs boules à prendre feu, la machine fut brisée de ce côté avec un bruit extraordinaire, & dommage des Assistans.

6. Il

6. Il eſt inutile de réiterer ici les inductions que nous avons déja fait; nous obſerverons ſeulement, que dans un même récipient, où la différence conſiſte en ce qu'il ſoit plein, ou vuide d'air, la flamme de la poudre ſe trouve comprimée, dans un cas, par un poid, qui réſiſte à ſon expanſion, & augmente par-là ſa denſité, & dans l'autre elle peut librement ſe répandre; ce qui doit faire une grande différence dans l'activité.

La propagation du feu eſt donc intercepté dans le vuide, parceque la flamme des grains, qui ſont en feu, pouvant ſe dilater librement, l'intenſité de chaque particule enflammée n'eſt pas ſuffiſante pour mettre en feu les grains auſquels elle touche: & ce défaut d'intenſité, qui dépand du défaut de preſſion n'eſt autre que une diminution de la denſité de la flamme.

7. La preſſion donc ou réſiſtance &c., de quelle nature qu'elle ſoit produira toujours les phénoménes dont il eſt ici queſtion, ſavoir une facilité à l'inflammation & à la communication du feu, & à méſure qu'elle ſera plus grande juſqu'à un certain point, ces deux phénoménes ſeront plus prompts, le développement du fluide plus ſimultané, & le détonnement plus conſidérable (*a*). De là les différences qui arrivent dans les effets d'une arme à feu chargée avec la même quantité & qualité de poudre (*b*).

8. Il

(*a*) Nous avons démontré §. 4. & 5. qu'une réſiſtance quelconque ſert à la propagation du feu, & que le fluide élaſtique a auſſi cette propriété. C'eſt ce qui eſt encore confirmé par M. HUIGENS & par M. JEAN MUSCHEMBROEK dans ſon appendice à la phiſique de M. ſon frére pag. 52., le même avertit de pomper le fluide à chaque projection de poudre que l'on fait dans un récipient vuide d'air, car *ſans cette précaution il ſe fait une ſucceſſion d'inflammation de la poudre, que l'on fait tomber ſur le fer rouge à celle qui eſt dans la phiole, & le vaiſſeau peut en être briſé avec danger de ceux qui ſont l'expérience.*

(*b*) On ne trouvera pas mauvais que je faſſe ici une petite digreſſion, pour faire mieux ſentir l'idée que l'on doit ſe former de l'action de l'air naturel ſur la poudre; on ne ſaurait lui faire franchir de certains bornes, ſans tomber dans des inconſéquences, qui ne peuvent qu'induire dans des erreurs groſſieres. La preſſion donc que fait l'air naturel ou quelconque autre corp ſur la poudre, ſert à nous procurer une pro-

8. Il très-important de concevoir la différence qu'il y a entre la pression nécessaire pour s' opposer à la dilatation de la vapeur enflammée, & la pression que l'on peut faire à la poudre même puisque à proportion que la flamme est plus comprimée, & par conséquent plus dense, la propagation du feu est d' autant plus aisée comme nous venons de l'observer. Au contraire à mesure que la poudre est plus comprimée la flamme pénétre plus difficilement, comme il arrive dans tous les combustibles qui, à choses égales brulent plus lentement à mesure que leurs parties sont plus étroitement liées ensemble. Ainsi la densité de l' air qui comprime la flamme sans comprimer les grains, facilite toujour la propagation du feu, à mesure qu'elle est plus grande; & cela arrive aussi par la pression du fluide engendré quand il est retenu par des parois qui ne peuvent céder comme dans le fusil pyropneumatique de M. le Chévalier D'ANTONI, au contraire quand on presse fortement

O la

pagation du feu plus ou moins prompte, suivant qu'elle s' oppose p'us ou moins à la dilatation des parties enflammées de la vapeur & qu'elle l'oblige à réagir avec dautant plus de violence sur la poudre; d'ailleurs elle n'est point la cause de la flamme de la poudre, non plus que de l'explosion, comme le remarque M. MUSCHEMBROEK dans une notè qu'il fait à des expériences des Académiciens de Florence, sur la fumée dans le vuide, où il s'exprime en ces termes = *il paroit par cette expérience que la flamme & l'explosion de la poudre ne dépendent point de la compression de l' air* =.

L'expérience, sur laquelle il se fonde, est qu'aïant jetté quelques grains de poudre sur un fer rouge dans le vuide, il ne se fit que une flamme bleuë: mais il ajoute que si on en jette plusieurs ensemble, ils s'enflamment; font explosion & brisent le vaissau.

REMARQUE

Puisque la poudre peut s'enflammer dans le vuide, & se décomposer, il est clair que la présence de l' air, ou de quelqu'autre corp comprimant, n'est point nécessaire pour produire ni la flamme, ni l'explosion.

La flamme étant causée par cette propriété que les phlogistiques ont en général de se dissiper, lorsqu'ils ont aquis le degré de chaleur nécessaire pour les séparer des matiéres grossiéres, ausquelles ils sont unis.

Ne pourrai-t-on pas soupçonner, que ce fut une espéce d'évaporation des parties plus volatiles agitées par un mouvement très-violent?

la poudre dans un tuïau ouvert, la pression sur la flamme n'est pas plus grande, & par surcroit elle trouve plus de difficulté à pénétrer ce corp compacte: delà le plus de lenteur dans la propagation de la flamme.

9. C'est ce que l'on voit sensiblement dans les armes à feu; où le bouchon qui sert pour arranger la poudre, & lui faire occuper un moindre espace de celui qu'elle garderait sans son sécours, s'oppose en même tems à la dilatation du fluide, lequel comprime par là la flamme de la poudre, qui a pris feu: or suivant que la pression retombe plus sur l'une des deux circonstances énoncées, les effets qui en résultent sont différens; car le bouchon étant poussé avec force le long de l'arme jusque contre la poudre sans la resserrer de trop, sert à empêcher la dilatation du fluide, lequel contraint celle de la flamme des premiers grains en feu, de sorte qu'elle peut réagir avec d'autant plus d'intensité sur ceux qui restent, & par conséquent

L'explósion n'est autre chose, que le changement que souffre l'air contenu dans la poudre au tems de l'inflammation; & l'on doit considérer trois différens états dans cette circostance, savoir celui de l'extréme condensation où il est avant l'inflammation, l'état naturel qu'il doit aquerir avant de passer à celui de dilatation; & ce dernier enfin qu'il aquiert plus ou moins, suivant la plus grande quantité de chaleur qu'il l'affecte.

De la promptitude donc & de la véhémence, avec lesquelles se fait la succession de ces étais opposés dépand cette force surprenante de la poudre.

Il n'est pas surprenant que les vaissaux soient brisés dans l'expérience que propose le Célèbre M. MUSCHEMBROEK, puisque les grains, en tombant sur le fer rouge, trouvent tous un dégré de chaleur suffisante pour les mettre en feu, & les décomposer en même tems, sans qu'il soit nécessaire qu'un grain communique le feu à celui qui le suit, & par conséquent cette quantité de fluide étant développée avec une simultanéité prodigieuse, heurte rudement contre les parois du vaissau & le fait céder: pourque pareil effet puisse avoir lieu, il n'est pas nécessaire qu'il se produise une quantité de fluide, laquelle étant condensée, puisse être en équilibre avec l'atmosphére, car il faut avoir égard à la dilatation que souffre le fluide dans cette circonstance, & à la vitesse avec laquelle il se développe, de sorte qu'une même quantité de fluide développé plus ou moins simultanéement faira sauter ou non le vaissan, dans lequel il se produit.

N. B. on me permettra de faire une application de ces réflexions en y rapprochant un phénoméne, qui ne manque pas d'arriver lorsque on

féquent la propagation du feu devient plus prompte, & plus facile: il en arrive le contraire lorfque le bouchon fans être exact eft trop réfoulé fur la poudre, puifque elle devient alors plus lente. La quantité abfoluë de poudre qui peut s'enflammer dans une arme donnée doit donc dépandre du rapport rélatif de ces deux circonftances combinées enfemble: pour éclaircir encor davantage tout ce que nous venons de dire, il ne fera pas hors de propos d'en faire une application pratique; elle nous eft préfentée fort fimple dans les piftolets qui ont une chambre pour la poudre, & une fupérieure pour la bâle, on eft obligé d'en dévider le canon pour les charger, parceque le diamêtre du trou, par lequel doit fortir la bâle eft un peu plus plus petit que celui de la bâle même, ce qui l'oblige à changer de configuration, & qui fuppofant un grand effort donne le tems à un plus grand développement de fluide, lequel par fa denfité, nous le répéterons,

 s'op-

ne fert pas les armes à feu avec toute la précaution néceffaire: lors donc que dans quelque arme à feu que ce foit, on n'a pas foin de faire paffer les bouchons contre la charge, ou que la bâle vient à être engagée plus haut qu'elle ne devrait être, & pour dire la chofe plus fimplément enfin, fi on vient à laiffer un intervalle de quelque confidération entre les parties de la charge, l'arme créve dans cet endroit, & c'eft parceque une grande quantité de fluide étant développée, & venant à heurter contre cette réfiftance, dont les parties ne peuvent céder avec une égale viteffe, le fluide réagit fur tout la partie de l'arme, dans laquelle il fe trouve renfermé, & la flamme de même, de forte que toute la poudre qui refte eft enflammée à la fois, ce qui n'arrive pas fi le fluide peut fe dilater à proportion qu'il fe développe, parceque alors la preffion fur la flamme reftant à peu près la méme, la fucceffion de l'inflammation eft plus uniforme. On ne trouvera pas mauvais que j'ajoute que la réfiftance n'étant pas infurmontable, c'eft-à-dire que la partie de la charge, qui eft engagée pouvant céder à la preffion du fluide, il arrivera que fuivant le plus ou moins de viteffe du développement, l'arme crevera ou non; de forte qu'en emploiant deux quantités différentes de poudre, dont la proportion des Compofans foit la même, & que la feule différence confifte en ce que l'une foit plus aifée à fe décompofer que l'autre, ce qui dépand du grainage, de l'arrangement qu'on tache de lui procurer, & d'un certain rapport qu'elle a avec l'arme, comme

s' oppose à la dilatation de la flamme des grains qui sont déja en feu, & fait qu'elle agit avec plus d'intensité sur les autres, de sorte que les premiers développemens sont beaucoup moins prompts que ceux qui suivent: les carabines rayées nous fournissent encor un autre exemple, mais un autre détail serait en pure perte, vû que ce serait tomber dans des répétitions de ce que nous avons déja dit.

10. Pourqu'il s'ensuive donc le plus grand effort possible d'une charge donnée dans une arme à feu, il faut que le fluide se développe le plus simultanéement qu'il est possible, ce qui dépand de la combinaison de la vitesse dans la propagation du feu, & de son intensité: celles-ci dépandent d'un certain rapport entre la quantité de matiére de chaque grain, & les interstices qui sont entr' eux, & de celui de l' arme avec la charge (*a*).

11. On obtiendra le plus grand des efforts possibles, si on ajoute à ces conditions, que le mélange des composans la poudre soit tel que le phlogistique & l' acide nitreux soient

nous venons de le dire, celle-ci, quoiqu' en moindre de quantité, faira créver l' arme plus aisément que l' autre, qui est en plus grande quantité, & cela parceque la simultanéité du développement sera telle, qu'elle ne donnera pas le tems à l' obstacle supposé de se déranger, au lieu que l' autre lui communiquera plus successivement les dégrès de vitesse nécessaire pour entrer en mouvement.

On voit assès que je ne donne point ceci, comme une vérité absoluë dans tous les cas, sans qu'elle soit susceptible de différentes modifications, je me borne seulement à dire qu'il y en a ou cela doit arriver ainsi.

(*a*) Comme la force de la poudre dépand de la vitesse, avec laquelle le fluide se développe, & par conséquent de l' action plus ou moins vive de la flamme sur la substance des grains; il parait que toutes choses d'ailleurs égales, on doit préférer la poudre ronde à l' irréguliére, parceque elle offre à la flamme un passage toujour égal & uniforme, au lieu qu'il pent arriver que les surfaccs planes de la poudre irréguliére venant à s' arranger l' une contre l'autre empéchent la libre communication du feu: quant à la grosseur des grains, il est constant qu'il en est une qui est favorable à la simultaneité de l' inflammation, & c' est à une expérience éclairée à la déterminer.

Du reste quand on aura déterminé la quantité absoluë de fluide qui se développe d' une quantité de poudre donnée, ce sera un problême purement géométrique d' assigner les proportions des armes à feu.

ſoient combinés entr' eux dans une proportion convenable.

12. Pour ce qui regarde le détonnement, il eſt viſible, que puiſqu'il ſe fait par la colliſion & l'impulſion des parties de l'air nouvellement engendré contre celles de l'air extérieur qui ne peuvent céder avec une égale viteſſe, Mém. pr. pag. 4. §. 25. il diminuera d'autant plus que le milieu ſera plus rare, de même que le ſon, dont le plus ou moins d'intenſité dépand de la plus ou moins grande denſité du milieu, dans lequel on l'excite; donc le détonnement ceſſera lorſque cette cauſe n'aura plus lieu.

CHAPITRE II.

De la chaleur néceſſaire pour enflammer la Poudre dans le plein & dans le vuide.

13. APrès avoir déterminé comment l'air agit ſur la poudre &c. Je paſſerai à traiter la ſeconde queſtion que je me ſuis propoſé, ſavoir *quel eſt le dégré de chaleur néceſſaire pour l'enflammer.* Elle renferme pluſieurs cas différens qui me ſemblent mériter d'être traités ſéparément; & quoique un tel examen paraiſſe entiérement iſolé, & de peu de conſéquence, je me fais un devoir de prévenir mes Lecteurs en ce que je le crois digne de quelque attention, puiſque outre la nauvaute des phénoménes qu'il préſente, il peut être d'un grand ſecours pour découvrir les loix ſimples, ſuivant leſquelles ſe fait le grand jeu de cette force ſi étonnante, afin de ſimplifier la queſtion autant qu'il m'était poſſible, j'ai jugé à propos de commencer à fixer le dégré de chaleur néceſſaire pour diſpoſer chacun des compoſans à être décompoſé. J'ai fait enſuite les différentes combinaiſons, & j'ai déduit des réſultats que j'ai eu les vérités principales qui en découlent directement.

14. J'ai

14. J'ai été obligé de faire usage de deux méthodes différentes dans le cours des expériences que j'ai cru nécessaires à ce sujet, & j'en détaillerai les raisons avant que je fasse la déscription des résultats: elles me paraissent d'ailleurs le plus comodes, & peut être des plus simples qu'on puisse imaginer, l'une est cependant préférable à l'autre dans des cas particuliers, suivant ce qu'on se propose principalement à examiner, nous n'en dirons pas davantage pour le présent.

15. Dans la prémiére il ne s'agissait que de mettre les substances dans des morceaux de flacon que je mettais ensuite à un bain d'huile, dans lequel était un thermomêtre dont la jambe formait un angle pour plus grande comodité, & la marche en était fort sensible; c'est par ce moyen que j'ai trouvé que le souffre soit lorsqu'il est seul, ou qu'il est mélé avec le salpêtre & le charbon, prend toujours feu à peu près au 593. dégré de Farenheit, & qu'un moment après la poudre détonne (*a*), mais il n'en a pas été de même de chacune des substances séparément, car le salpêtre ne pouvait pas se fondre non plus que le charbon s'enflammer, ni enfin un mélange des deux pouvait se décomposer par la chaleur qui lui était ainsi communiquée par l'huile bouillante.

16. Il faut remarquer que si on met la poudre quelque tems avant que l'huile ait aquis le dégrés de chaleur qui lui est nécessaire pour transmettre à la poudre celui qui lui faut pour prendre feu, ou que les dégrés de feu soient communiqués trop lentement, la poudre ne peut plus s'enflammer par ce moyen (*a*); il arrive la même chose à celle qu'on met dans des récipiens à long col, il faut pour lors employer un plus grand dégré de chaleur pour la faire déton-

(*a*) M. Ammontons a trouvé que la poudre s'enflamme au même dégré de chaleur qui fait fondre de la grenaille de plomb, Mém. de l'Académ. des Sciences de Paris pour l'année 1703. p. 247.

tonner: nous tacherons de déméler la raiſon de ces phénomènes quand il en ſera tems, & nous paſſerons en attendant à expoſer la ſeconde méthode dont j'ai fait uſage.

17. Je mettais les ſubſtances ſur une platine de fer blanc qui avait un enfoncement ſphérique de trois lignes environ de diamêtre en largeur & d'une demi en profondeur, elle était fixée dans une rainure pour plus de ſureté, & une petite lampe dont le lumignon était conſtamment de 88. fils de cotton fin était placée avec ſoin deſſous la cavité de la platine en même tems qu'on lachait un pendule, dont le nombre des vibrations était de 76. par minute; elles étaient contées tout haut par une perſonne pendant qu'une autre marquait le nombre que la prémiére prononçait au moment que je donnais le ſignal convenu.

18. Cette maniére de faire ces expériences quoique fort ſimple & exacte, n'eſt pas à beaucoup près auſſi déciſive que la prémiére, laquelle eſt plus uniforme, & la chaleur peut ſe tranſmettre avec plus *d'équabilité*; mais celle là eſt en défaut d'autre part en ce qu'elle n'a pas aſsès de chaleur pour répondre à l'enchainement des expériences néceſſaires nous n'oublierons cependant pas l'avantage eſſentiel qu'elle a ſur l'autre, qui eſt qu'elle donne des réſultats abſolus pendant que la ſeconde n'en donne que des rélatifs.

19. Je dois avvertir que cette ſeconde méthode exige nombre des circonſpections; je ne les paſſerai pas ſous ſilence pour épargner de péine à quelqu'un qui voudrait les réitérer.

1.°

Il faut tacher de procurer autant qu'il eſt poſſible une égalité dans la flamme.

C'eſt

(a) La poudre grainée perd plus facilement encore de ſon inflammabilité par ce moyen que la poudre pilée.

C'est ce qu'on peut obtenir à peu près en laissant toujours la lampe allumée sans toucher au lumignon, qu'on aura soin de ne pas éparpiller; le lin incombustible serait préférable, & le coton fin est aussi d'un très-bon usage en l'employant dans une lampe à ésprit de vin, car il ne peut y avoir alors d'équivoque, moyennant qu'on ait soin d'ajouter de l'alcohol à chaque expérience.

2.°

On aura soin d'arroser la lampe de tems en tems avec de la nouvelle huile.

3.

La platine dont on se servira sera grande, parceque sans cette précaution le feu de la lampe se communiquera au souffre.

4.°

On la laissera de plus entiérement réfroidir après qu'on l'aura bien nettoyée en tous sens.

5.°

Il ne faut ôter la lampe de dessous la platine que, lorsque le souffre sera tout brulé, & s'il entre du salpêtre dans le mélange, il ne sera pas mal d'y mettre un charbon en feu pour décomposer ce qui peut en être resté.

6.°

Les substances doivent enfin être mésurées exactement, & pour obtenir quelque précision dans leur arrangement

sur

fur la platine on n' a qu'à passer une ratissoire sur la cavité de la même : voici les résultats des essais que j' ai fait avec cette méthode.

EXPÉRIENCES.

I.

Le souffre entrà en fusion à 5. vibrations fut entiérement fondu à 10., & s' enflamma à 15.

II.

Le salpêtre commença se fondre à 25. vibrations, & fut tout en fusion à 50.

III.

Le charbon commença à prendre feu à 36. vibrations, & fut tout en feu à 50.

IV.

Le souffre combiné avec le salpêtre, parties égales, commença à se fondre à 12. vibrations, s'enflamma régulièrement entre 15. & 20. étant entiérement fondu, & à 25. la flamme changea de couleur, & devint blanchatre, ce qui me fit appercevoir que le salpêtre était décomposé par le souffre, en effet aïant examiné le ressidu je trouvai qu'une partie du salpêtre avait été réellement décomposée. J'observais aussi dans cette occasion que si on ôte la flamme de dessous la platine aussitôt que le souffre a pris feu, le même brule entiérement sans que le salpêtre se décompose pour autant, la même chose ne manque pas d'arriver

fi on met le feu avec un charbon rouge au fouffre qu'on a mélé avec du falpêtre.

Dans cette expérience les irrégularités dans l'inflammation du fouffre dépandaient probablement de la diftribution plus ou moins uniforme des deux fubftances.

V.

Le fouffre mélé à dofes égales avec le charbon fe fondit à 15. vibrations, s'enflamma à 18.; on vit du charbon en feu à 25. & à 35. tout le mélange fut éteint. Il eft bon d'obferver que le charbon ne parait en feu que pendant que le fouffre l'eft, à moins qu'il ne foit bien léger. J'ai été obligé de donner un réfultat mitoyen à caufe des variations qu'il y a eu dans l'inflammation du fouffre.

V I.

Un mélange de 4. parties de falpêtre & une de charbon détonna à 37. vibrations.

V I I.

Un autre de 4. de falpêtre fur une de fouffre, & une de charbon détonna à 25. vibrations le fouffre aïant pris feu à 22.

Aprés avoir réitéré avec foin cette expérience aïant vû qu'il y avait prefque toujours des différences dans l'inflammation du fouffre, ce qui en caufait quelques unes dans la détonnation du falpêtre & du charbon, j'ai jugé plus convenable d'employer de la poudre pilée, dans laquelle les compofans font plus uniformément diftribué en vertu de la longue trituration qu'on lui fait effuyer.

La

VIII.

La poudre pilée de 5. parties de salpêtre sur une de souffre & une de charbon prit feu à 18. vibrations, le souffre aiant pris feu à 15.

IX.

Celle qui est faite avec 6. parties de salpêtre, une de souffre, & une de charbon détonna à 17. vibrations, le souffre aiant de même pris feu à 15.

X.

Une autre enfin de de 7. parties de salpêtre sur une de souffre, & une de charbon se décomposa à 16. vibrations, le souffre s' étant constamment enflammé à 15.

Lorsque la poudre est grainée l' inflammation du souffre est retardée, de sorte que si le grainage est fort gros il lui faut environ un tiers de plus de tems pour prendre feu qu'il ne lui en faut lorsqu'elle est pilée, ce qui fait aussi que la décomposition totale de la poudré qui suit de près l' inflammation du souffre est beaucoup moins prompte.

XI.

La poudre ne laisse pas de se décomposer entiérement quand même l'on ôte la lampe de dessous la platine aussitôt que le souffre a pris feu, & la détonnation se fait quand le souffre est presque tout brulé (*a*).

(*a*) Cela arrive aussi à d' autres combustibles; si par exemple on met de la poudre dans l' esprit de vin rectifié qu'on enflamme ensuite, elle ne prend feu que, lorsque celuici est entiérement dissipé; il en est de même si on met le feu à un linge mouillé dans de l' alcohol, il ne prend feu que quand le même a fini de bruler.

X I I.

La poudre fulminânte commença à entrer en fusion a 30. vibrations, & détonna à 32. étant toute fondue à ce tems.

20. De tout ce que nous avons dit ci-devant, nous pouvons déduire les vérités suivantes.

Que la flamme du souffre est suffisante (*a*) pour enflammer la poudre, mais qu'il faut que le souffre soit presque entiérement détruit par la combustion, les expériences (VIII. IX. X.) concourent à le confirmer, car l'on voit qu'à mesure qu'il y a plus de souffre dans la poudre, il se passe un plus long tems entre l'inflammation de celui-ci, & la décomposition de la même poudre.

21. La comparaison des résultats (I. IV. VI.) sert à nous faire connaître qu'il faut un plus grand dégré de chaleur pour que le souffre puisse détonner avec le salpêtre qu'il ne lui en faut pour s'enflammer seulement. 2.° qu'il en faut un plus grand encor, pour que le salpêtre soit décomposé par le charbon.

22. La flamme du souffre a cependant assés d'intensité pour mettre en feu le charbon, pour faire entrer le salpêtre en fusion, & pour faciliter la décomposition des deux, c'est donc là la raison, pour laquelle la poudre s'enflamme à 20. 25. vibrations quoique le charbon ne puisse s'enflammer qu'à 38., & que le salpêtre ne soit entiérement fondu qu'à 50.

23. Nous avons vu dans l'expérience (VII.) que le souffre ne prenait pas feu réguliérement après un même nombre de vibrations, & que la décomposition totale des sub-

(*a*) Pour se convaincre avec beaucoup de facilité que la flamme du souffre peut faire décomposer le charbon avec le salpêtre, on n'a qu'à projetter de la poudre dans du souffre enflammé.

fubstances souffrait aussi les mêmes altérations, la même chose arrive aussi dans la poudre grainée à mesure que le grainage est plus gros, comme j'ai fait observer après l'exp. (x.) ce qui sert à nous confirmer que c'est en vertu de la flamme du souffre que le salpêtre & le charbon peuvent se décomposer.

24. Le phénoméne asses singulier dont j'ai fait mention (16.) savoir que la poudre mise dans des flacons à long col ne pouvait plus s'enflammer non seulement au même dégrés de chaleur, auquel elle prenait feu dans des vases ouverts, mais même à 7. dégrés de plus, semble nous fournir une nouvelle preuve qu'il faut moins de chaleur pour enflammer le souffre, qu'il ne lui en faut pour se décomposer avec le salpêtre, parceque on sait d'ailleurs qu'il ne peut prendre feu dans des récipiens à long col.

25. Nous avons de même rendu compte d'un autre phénoméne, qui arrive lorsqu'on fait essuyer à la poudre un feu par dégrés pendant long tems, comme quand on met le verre qui la contient dans l'huile en même tems qu'on expose celle-ci à un feu lent; il faut pour lors un plus grand dégré de chaleur pour l'enflammer, qu'il ne lui en faut lorsque on lui communique le feu avec plus de vivacité, & ceci a encor plus facilement lieu dans la poudre grainée que dans la pilée: mais il est très-plausible de penser que cela dépand de ce que le souffre se dissipe en pure perte à cette chaleur, puisque la communication en est faite fort lentement par l'huile, & le souffre en reçoit asses pour se sublimer entiérement avant qu'il ait pu en aquerir autant qu'il lui en faut pour pouvoir s'enflammer; une circonstance que je n'ai pas indiqué, & que j'ai d'ailleurs observé dans ces occasions sert à étayer la conjecture que je viens de proposer, & à la doüer même (on me passera l'expression) d'une lueur d'évidence, c'est que lorsqu'on laisse ainsi la poudre exposée pendant long tems,

tems, on lui voit changer de couleur, & elle devient d'un noir très-foncé.

26. Cela posé, on voit clairement que la décomposition totale de la poudre est plus difficile, parceque il faut un plus grand dégré de chaleur pour faire détonner le salpêtre avec le charbon (VI.) qu'il n'en faut pour enflammer le souffre (I.), & par conséquent pour décomposer la poudre qui en contient encor au moment que le dégrés de chaleur communiqué peut suffire pour le mettre en feu.

27. Dans la poudre pilée finement cela n'a pas lieu de la même maniére, & n'arrive pas si aisément, car comme elle forme une espèce de masse, & que le nombre des surfaces est très-fort diminué, la sublimation du souffre ne peut pas être si prompte, ni si facile, de sorte qu'il en reste encore suffisamment pour s'enflammer, & pour causer l'entiére décomposition de la poudre, au tems que le mélange a reçu un dégré de chaleur égal à celui qui fait que le souffre prend feu.

28. La poudre perd de son inflammabilité dans le vuide, de sorte que le dégré de chaleur, qui peut l'enflammer dans l'air libre, n'est pas suffisant à en procurer la décomposition dans les récipiens dont on a pompé l'air; Mrs. Huigens, & Muschembroek ont fait aussi cette observation. Cette différence ne dépandrait-elle pas aussi de la sublimation du souffre? ceci me parait être d'autant plus fondé, que le vuide sert à la favoriser (*a*), & que, suivant ce que nous avons vu ci-devant, non seulement le salpêtre se décompose plus aisément avec le souffre qu'avec le charbon, mais sa flamme sert à accélérer la détonnation du charbon avec le salpêtre.

29. Si

(*a*) J'ai observé que dans ces occasions il s'éléve une poudre jaunatre qui se cole aux parois du vaissau, M. Boyle le dit de même, or cette poudre ne peut être que du souffre sublimé.

29. Si on ne fait pas essuyer un dégré de chaleur violent, & avec promptitude à un mélange de souffre & de salpêtre dans des récipiens vuides, on ne peut parvenir à le faire décomposer, parceque le souffre se sublime bientôt, & le salpêtre ensuite quoique fondu ne peut plus détonner faute de phlogistique. Tout ceci est appuyé aux expériences que j'ai fait sur ces mélanges dans le vuide, par lesquelles j'ai trouvé, outre ce que je viens de dire, que la poudre qui contient du souffre prend feu à peu près au même dégré de chaleur que celle qui n'en a point ce qui sert à confirmer ce qui a été dit précédemment.

30. Nous pourrons donc rendre aisément raison de ce, que quelques Savants, n'aïant pas pris ces précautions, n'ont pas vu la poudre s'enflammer dans le vuide, & l'ont en conséquence niée; mais c'est probablement parceque où ils ont employé un mélange sans charbon, ou qu'aïant fait usage de bonne poudre, ils ont donné un feu trop lent & moindre de celui qui est en ce cas nécessaire pour faire détonner le salpêtre avec le charbon.

31. Nous finirons donc ce Chapitre par conclure.

1.°

Que plusieurs circonstances contribuent à modifier l'inflammabilité de la poudre, savoir le plus ou moins de souffre; le mélange plus ou moins intimément broyé; le grainage plus ou moins gros.

2.°

Que l'inflammation est très-prompte aussi si le souffre peut s'enflammer comme il arrive en plein air.

Qu'elle

3.°

Qu'elle ſera encor augmentée ſi le ſouffre eſt en petite quantité au moment qu'il a aquis le dégré de chaleur néceſſaire pour s'enflammer.

4.°

Que le ſouffre ne pouvant s'enflammer, il faut en ce cas employer néceſſairement un dégrés de chaleur plus grand, & égal à celui qui peut faire décompoſer le ſouffre avec le ſalpêtre.

5.°

Que ſi le ſouffre ſe ſublime avant qu'il ait aquis le dégrés de chaleur qu'il lui faut pour prendre feu, ſoit à cauſe du trop de ſurface, ſoit par la lenteur dans la communication du feu, ſoit par le défaut de preſſion, ou ſoit enfin par quelque autre circonſtance, ou par le concours de pluſieurs à la fois, on ne peut ſe diſpenſer d'employer un dégré de chaleur encore plus grand du précédent pour faire détonner la poudre.

32. J'ai taché d'expoſer avec toute la préciſion poſſible les inductions principales, que nous fourniſſent les réſultats des expériences dont j'ai donné le détail: j'aurais pu en tirer un plus grand nombre, & propoſer même quelques conjectures qui, ſans avoir jamais été démenties par les faits ſemblaient au contraire parfaitement d'accord avec quelques cas particuliers, mais ne m'aïant pas été poſſible d'obvier aux irrégularités qui les accompagnaient quelque fois à cauſe de la complication des circonſtances, dont on ne pouvait les délivrer; j'ai jugé plus convenable de conſerver trop de reſerve, plutôt que de tomber dans le défaut

faut opposé ; d' ailleurs je suis asſès porté à croire que ce que nous avons dit sur ce sujet fournit des lumiéres suffisantes pour servir de guide à la pratique, & pour nous tirer de l' esclavage d' une *routine machinale* (*a*), par laquelle nous nous assujettissons sans connoissance de cause à ce que nos Prédécesseurs ont jugé à propos d' établir : s'ils avaient fait de même nous serions bien plus reculés en certains genres que nous ne sommes ! Leur exemple nous met donc en droit de pousser plus loin nos Recherches sur les choses naturelles, & de soumettre même ce qu'ils ont fait à l'Analise la plus scrupuleuse. C'est par là qu'on parvient à découvrir la vérité.

33. Les Recherches que nous avons avons fait pour déterminer la chaleur qui peut enflammer la poudre, peuvent aussi nous fournir des lumiéres sur le développement des principes actifs, dont dépandent les effets qu'elle peut produire. La théorie chimique que M. MACQUER en a donné dans son excellent Cours satisfait amplement pour ce qui regarde les actions intestines, & les jeux d' affinité des substances, & nous renvoyons avec plaisir nos Lecteurs à cet ouvrage digne de son Illustre Auteur, nous reservant seulement de rapprocher tout ce qui peut servir à donner une idée exacte des causes, pour ainsi dire, secondaires qui concourent au développement de l'air, en vertu duquel

(*a*) Bien des gens ont une idée asſès obscure des termes de *théorie* & de *pratique*. *L' application phisique des principes généraux, & abstraits à des cas particuliers* est ce, qu'on doit entendre par la première. *L' action où les opérations purement mécaniques qui sont nécessaires pour cela*, sont ce que nous entendons par *routine*, or ceux qui n'ont qu'un repertoire de cas particuliers sans enchainement & sans sistéme ne savent pas la *pratique*, & cette classe comprend le plus grand nombre des hommes dans toutes les professions. Ceux qui outre les principes fondamentaux savent encore tout ce qui est essentiel pour en faire usage, ceux la savent à proprement parler la véritable *pratique*, & ne manqueront tout au plus que de la *routine* nécessaire pour opérer avec plus de facilité. *La pratique est donc l' art propre d' une science*, & à leur tour *les principes généraux & abstraits sont les sciences des arts.*

quel on voit arriver les effets les plus ſinguliers; nous ne nous arrêterons pas à former des conjectures pour décider ſi on eſt plus fondé à croire que l'air préexiſte dans la poudre, ou s'il eſt produit à l'occaſion de l'inflammation par le nouvel arrangement que prennent entr'elles les parties primitives, ou les élémens des compoſans.

34. Il eſt viſible en premier lieu qu'il faut néceſſairement un dégré de chaleur tel, qui puiſſe fondre le ſalpêtre pour que la détonnation de la poudre ait lieu. 2.° que puiſque la flamme du ſouffre eſt capable de produire cet effet, toutes les fois qu'elle ne pourra pas s'exciter, la détonnation ſera retardée: mais on ſait par les principes chimiques que dans cette occaſion le phlogiſtique du ſouffre & du charbon ſe ſépare de ſa baſe pour ſe diſſiper avec l'acide nitreux; c'eſt donc dans le tems de ces actions & réactions des ſubſtances que ſe développe le fluide élaſtique de la poudre.

35. Il eſt donc clair que le développement du fluide ſera d'autant plus accéléré que le ſalpêtre aura de facilité à ſe décompoſer avec le phlogiſtique, & il n'eſt pas moins évident que la décompoſition ſera d'autant plus prompte que l'acide nitreux trouvera moins de difficulté à attaquer le phlogiſtique: or l'acide nitreux attaque avec plus de facilité le phlogiſtique à meſure qu'il ſe trouve moins fortement uni à ſa baſe, ce qui arrive en effet dans le charbon où l'union n'eſt pas ſi forte que dans le ſouffre; delà la raiſon pourquoi le ſalpêtre détonne plus aiſément avec le charbon qu'avec le ſouffre, & encor plus facilement avec le foye de ſouffre qu'avec le charbon même. Mém. ſecond p. 137. 145. §§. 43. 64. car le phlogiſtique a plus d'adhérance avec l'acide vitriolique qu'il n'en a avec les terres, mais il en a plus avec celleci qu'avec le tartre vitriolé.

36. Quelques expériences que j'ai fait ſur la poudre fulminante, ſervent à confirmer ce que nous venons de dire, &

& ce que j' ai avancé ailleurs Mém. second p. 145. §. 64. on me permettra d' en donner un précis.

EXPE'RIENCE.

Je fis du foye de souffre que je pilai finément avant qu'il fut tout-à-fait froid pour qu' il ne put pas contracter si aisément l' humidité de l'air, & je le mélai en doses convenables avec du salpêtre, après que le tout parut intimément broyé, j' en mis une partie sur une pêle que j' exposai au feu, & il se fit une détonnation semblable à celle de la poudre fulminante commune.

EXPE'RIENCE.

Au lieu de broyer intimément les substances ensemble dans ce second essai, je me suis contenté de fair tomber du salpêtre froid sur du foye de souffre liquéfié, ce qui produisit une fulmination un peu moindre à la vérité que celle de la précédente & de la commune, mais infiniment supérieure à la déflagration de la poudre à canon.

37. Une troisiéme expérience que j'ai fait sur cette poudre, sert à nous convaincre que le dégré de chaleur contribue en quelque façon à la plus grande simultanéité du développement du fluide, & par conséquent au plus grand effort, & au détonnement plus violent, je l' ai dit en passant dans mon second Mém. p. 144. §. 63.

EXPE'RIENCE.

Si on mêle le salpêtre entiérement fondu avec de foye du souffre liquéfié on obtient une détonnation qui surpasse toutes les autres.

Je ne diſſimulerai point que le peu de ſoin que j' ai eu quelquefois à prendre les précautions indiſpenſables pour me garantir des dangers qu'on peut courir dans toutes ces expériences m'a couté un peu cher, je dis ceci pour avertir ceux qui voudront les repeter de n'en négliger aucune.

38. L' action du feu ſur la poudre eſt encore une circonſtance qui favoriſe la décompoſition de l' acide nitreux & du phlogiſtique ſuivant que la quantité en eſt plus ou moins étenduë; & par conſéquent l'inflammation ſera d'autant plus ſimultanée que la flamme de celle qui a pris feu ſera plus *reverbérée* ſur celle qui reſte par la réſiſtance de l'air ou de quelque autre corp comprimant comme nous l' avons démontré dans le premier Chapitre, or comme le développement ſe fait avec la même viteſſe que la décompoſition des ſubſtances donc le développement ſera d' autant plus ſimultané que la reverbération de la flamme ſera plus grande.

39. L'action plus ou moins grande de la poudre dépand de l'élaſticité ou de la denſité du fluide, qui diminueront à meſure que les obſtacles qu'elle doit ſurmonter ſeront plus aiſé à être dérangés, & qu'ils céderont avec plus de facilité, d'où il s'enſuit que, ſi le fluide peut ſe répandre dans un trop grand eſpace pendant que les développemens ſe font, l' effort en deviendra très-fort diminué, parceque l' action de la flamme ſera moins vive, & par conſéquent la ſucceſſion des développemens beaucoup plus lente.

Il réſulte de ceci que dans les cas dont nous avons parlé dans les notes du premier Chapitre (ſavoir lorſque la poudre brule avec promptitude, & que le fluide ſe dilate moins) les effets ſont incomparablement ſupérieurs à ceux qui ont lieu dans des circonſtances contraires.

40. D' ailleurs outre tout ce que nous avons dit juſq'ici pour faire voir que la différence des effets des mêmes quan-

quantités & qualités de poudre dépand du plus ou moins de viteſſe, avec laquelle le fluide ſe développe, rien ne peut nous fournir une preuve plus complete que les expériences que je donnerai dans le Chapitre ſuivant, par leſquelles je trouve que les quantités de fluide développé ſont toujours dans la raiſon des quantités de poudre qu'on a employé, & qui ſe ſont décompoſées (*a*).

CHAPITRE III.

Des quantités rélatives de fluide développé de différentes quantités de la même poudre.

41. C'Eſt un principe aſsès communement reçu que la quantité de fluide qui ſe développe de la poudre eſt proportionelle aux quantités de la poudre décompoſée; on ſait de plus que le ſouffre & le charbon n'en fourniſſent point: nous ſommes donc fondés à penſer que le principe actif de ce fluide eſt contenu dans le ſalpêtre, & qu'il en eſt développé par l'action des autres ſubſtances, rélativement à la proportion qu'il y a entr'elles; quoique je n'aïe jamais douté de ce principe. J'ai cependant voulu m'en convaincre par l'expérience, & on ne trouvera pas mauvais que j'en donne ici un détail.

EXPÉRIENCE.

Un tuïau de baromètre de la hauteur de 36. pouces, & recourbé dans ſa partie ſupérieure communiquait à un flacon

(*a*) J'ai cru néceſſaire d'ajouter cette expreſſion parceque ſouvent il arrive que toute la poudre qu'on emploit ne prend pas feu, & cela particuliérement dans les armes à feu, car les obſtacles ne peuvent pas réſiſter au delà d'un certain terme, & il faut ou qu'ils cédent, ou que l'arme créve. Il n'en eſt pas de même ici, où le feu extérieur échauffe uniformément tous les grains ſans qu'il ſoit beſoin que le feu ſe communique ſucceſſivement, de ſorte qu'elle s'embraſe toute, & je ſuis trés-perſuadé que les effets en ſont plus grands proportion gardée.

con dont le col était de la longueur environ d' un pied, j'en maſtiquai la jonction avec de la cire d'Eſpagne pour plus grande commodité (*a*); l'extremité du tuïau était de forme conique, & l' embouchure avait la même figure, mais elle était renverſée afin que le flacon fut toujours placé de la même maniére: un tuïau de verre hermétiquement ajuſté tenait à la courbure de celui du baromètre, & par cette voie l' on pompait l' air de la machine, l' extrémité inférieure du baromètre trempait dans une fiole de mercure, & une planche, à laquelle on adaptait une graduation mouvante, ſoutenait le baromètre, & mettait l' obſervateur à l' abris de tout danger; la quantité de vuide était toujours la même, ſavoir de p. 26. $\frac{1}{4}$ environ, & pour plus grande précaution, je ne cherchai point à le pouſſer auſſi loin que j' aurais pû, car il reſtait à peu près 8. ligne d' air dans le cas ou j' avais fait monter le mercure à la hauteur ſuſdite, & qui eſt celui où il y avait plus de vuide: je dois de plus avertir, qu'après avoir fait avec la même ſtation autant d'expériences qu'il était poſſible, & dont le terme était fixé par la deſcente du mercure juſqu'au nivau, je changeai la ſtation, & je les repetai de la même maniére ſur celle-ci, il eſt vrai qu'à meſure qu'il reſtait plus d' air la ſuite diminuait de termes: j'avais meſuré, & choiſi enfin pluſieurs flacons précisément de la même capacité pour ſubſtituer en cas de beſoin: je commençai donc par bruler des quantités de poudre, qui étaient entr'elles dans le rapport des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c., & le mercure était à la hauter de 26. $\frac{1}{4}$ pouces; je repetai 6. fois cette expérience avec la même ſtation en conſervant le même rapport entre les quantités, & je trouvai, que les dépreſſions moyennes dans l' inflammation ſuivaient auſſi la même proportion, de même que le fluide refroidi,

(*a*) On pouvait de cette façon mettre la poudre ſans altérer les capacités, & en cas que le flacon eut ſouffert on pouvait en ſubſtituer aiſément un de ceux que j'avais meſuré.

ſavoir à peu près celle des nombres ci-deſſus, aïant enſuite fait la ſtation du mercure à 26 pouces & demi, & enſuite à 26 j'en eus les mêmes réſultats ; je me ſuis ſervi enſuite du rapport d'1, 2, 4, 8, &c. pour les quantités de poudre que j'emploïais, & les dépreſſions y répondirent.

42 Enfin il eſt très-conſtant que la force où l'élaſticité de pluſieurs quantités d'une même qualité de poudre, & les quantités de fluide permanent ſont proportionelles aux quantités de poudre emploïées, ſavoir ſi elle eſt double, triple, quadruple &c. il ſe dévéloppe 2, 3, 4 fois autant de fluide, & les effets ſont doubles, triples, quadruples &c. pourvû que la preſſion ſoit la même.

43 Ce que nous avons vû ci-devant ſert à nous faire connaître les quantités réelles du fluide après le dévéloppement fait & après ſa parfaite condenſation rélativement aux quantités de poudre emploïée, & l'élaſticité de ce même fluide à l'occaſion du dévéloppement : or en faiſant une souſtraction, l'on aura la ſomme de toutes les dilatations, c'eſt-à-dire celle de l'air juſqu'au moment, de l'inflammation celle qu'il ſouffre encore dans cette occaſion, & celle du fluide qui ſe dévéloppe, & comme l'air réſſidu eſt conſtant, on peut déterminer à peu près ſa dilatation dans le tems de l'inflammation par la comparaiſon de pluſieurs réſultats. En effet lorſque le fluide eſt réfroidi, la quantité d'air naturel, que l'on a laiſſé dans la machine, agit toûjours de même, puiſque la quantité en eſt ſuppoſée égale, au lieu que cette action eſt différemment altérée par la préſence du feu, & je l'ai conſidérée ſous différens points de vüe ſuivant que la quantité de poudre que je brulais dans la même capacité était plus ou moins grande ; mais la dilatation de l'air qui reſtait dans la machine étant donnée par l'obſervation, on n'a qu'à la déduire, & ce qui reſte comprend ſeulement la raréfaction que ſouffre le fluide, & celle qu'eſſuïent les parties de l'air qui ont un attouchement im-

médiat,

médiat avec les parties enflammées, de ſorte qu'on pourrait ſans erreur groſſiére les conſidérer comme faiſant partie du fluide qui ſe produit; ou ſi on veut l'apprécier on peut à mon avis poſer la dilatation totale de l'air à celle du fluide comme 2 : 3. car il eſt bon d'obſerver que le fluide eſt entiérement confondu dans les parties enflammées de la poudre pendant qu'à l'air la comunication de la chaleur ne ſe fait que par couches; quoique cette eſtimation paraiſſe tout-à-fait arbitraire, je ſuis aſſés porté à croire qu'elle ne s'écarte pas trop de la véritable, mais nous n'oublierons pas de dire que dans les armes à feu elle ſera moindre encore, & que l'on peut même la négliger entiérement, vû la petite quantité qu'il s'en trouve eu égard à la quantité de fluide qui ſe produit, & il eſt même très-plauſible de penſer que la plus grande partie en eſt chaſſée par la lumiére du moment que le feu ſe comunique, mais après tout la détermination n'étant pas trop grande les erreurs ne ſauraient être de conſéquence.

44 Ces expériences nons fourniſſent encore quelque autre induction; en prémier lieu que les dilatations de la même quantité d'air qui reſte dans la machine à compter du moment qu'on applique le feu juſqu'à celui où la poudre s'enflamme, ſont toûjours les mêmes quoique on varie les quantites de poudre; la quantité de feu qu'on applique extérieurement n'apporte donc aucun changement a cette circonſtance, c'eſt ce qui eſt aſſés clair moyennant que la quantité d'air ſoit conſtante, & que l'arrangement de la poudre ſoit à peu prés le même, car s'il faut un dégré de chaleur fixe pour enflammer la poudre, ce même dégré ne peut auſſi dilater l'air que juſqu'à un point déterminé, ſauf qu'on ne faſſe des grandes différences qui dépandent pour lors de ce que nous avons déja dit §. 25, d'ailleurs le feu étant vif le différences évanouiſſent, & le plus ou le moins n'en fait que dans les viteſſes des effets. En ſecond lieu le fluide

fluide à l'occasion de l'inflammation occupe un espace à peu prés double de celui qu'il occupe étant condensé. Nous avons vû Mém. 2.d p. 125. §. 12. que la densité du fluide dans la poudre est environ de 2128, donc en doublant ce nombre nous aurons 4256 pour la dilatation dans l'inflammation: dilatation qui est conforme autant qu'on peut prétendre avec celle que AMMONTONS & BELIDOR ont assigné.

45 De la méthode que je viens de proposer il est aisé de construire une echelle de la force du fluide de la poudre lorsque la pression est constante; j'en exposerai maintenant un autre où cette pression va en augmentant, & qui n'exigeant pas à chaque résultat un nouvel appareil me parait plus commode: j'ai donné la déscription de cette machine dans le Chapitre premier p. 98. §. 5. & pour l'employer avec plus de succés à l'usage dont il question j'ai ajoûté une regle graduée qui pouvait se mouvoir dans une coulisse, & qui depuis la surface supérieure du vif argent cotoyant le long tuiau servait à en indiquer la marche, il ne restait plus que 8 à 9 lignes d'air dans les deux parties de la machine, chaque boule contenait un grain de la meilleure poudre grainée, & j'avais soin de laisser parfaitement condenser le fluide avant que passer à l'inflammation de la poudre qui était dans la suivante: par le nombre des vibrations d'un pendule je voyais à peu prés de combien la pression augmentée pouvait acroitre l'inflammabilité; nous passerons sous silence les autres précautions pour ne pas tomber dans des répetitions, on n'a qu'à se rapeller tout ce que nous avons dit à l'endroit cité.

46 Les résultats de ces expériences différent de ceux de l'autre parceque nous avons supprimé des conditions, & que nous en avons introduit des autres, elles s'accordent neanmoins dans celles qui sont communes, en effet nous commençons par observer que les quantités de fluide engendré sont toûjours les mêmes; il n'en est pas ainsi des variations du mercure

au moment de l'inflammation, car l'intenſité du feu de la poudre devenant toûjours plus grande raréfie d'avantage le fluide & l'air qui comprime, & de la comparaiſon de pluſieurs termes ſucceſſifs de différentes ſuites il réſulte que la force eſt à peu prés en raiſon des preſſions: nous voyons auſſi que la poudre aquiert plus aiſément les dégrés de chaleur qui lui faut pour s'enflammer, car le nombre des vibrations décroit dans une progreſſion dont les différences vont toûjours en augmentant, mais c'eſt une conſéquence de ce que nous avons déja fait obſerver.

CHAPITRE IV.

Méthode dont je me ſuis ſervi pour meſurer l'intenſité de la chaleur de différentes quantités de poudre dans le plein, & les effets qu'elle peut produire: Réflexions ſur les vapeurs du Souffre, de la Poudre, des Méches & des Chandelles allumées &c. & de la méthode dont ont fait uſage dans les expériences ſur ce ſujet.

47 LEs ſentimens des Savans ſemblent être partagés ſur ce ſujet, mais cette diverſité n'eſt dans le fond qu'apparente, & dépand de ce que l'énoncé dans leur manière d'apprécier l'intenſité du feu de la poudre eſt trop vague, car je ne ſaurai penſer qu'il put y avoir lieu à différentes opinions ſur une choſe qui peut être aſſujettie à l'expérience, & je ſuis très-perſuadé que la queſtion propoſée ſous un énoncé rigoureux faira diſparaître toute contradiction: quant à moi je ne diſſimulerai point que je crois que cette intenſité eſt ſujette à baucoup de modifications, & qu'elle eſt plus ou moins grande: 1.° Suivant que on en augmente, ou qu'on en diminue la quantité dans le même eſpace où l'on l'enflamme: 2.° Suivant que les compoſans ſont entr'eux dans

dans un tel rapport, plûtôt que dans tel autre: 3.° Enfin que l'ordre ou l'arrangement qu'on lui procure peut aussi y avoir quelque part &c. & je ne doute point qu'on ne puisse l'augmenter à l'infini.

48 Ce qui est certain d'ailleurs, & que l'expérience nous apprend, c'est que le fluide en se dévéloppant occupe un espace à peu près double de celui où il est réduit lorsqu'il est condensé §. 44, donc la chaleur de la poudre dans une arme à feu ne s'écartera pas baucoup de celleci; & cette donnée est assés exacte pour les problémes ballistiques.

49 La complication des circonstances qui concourent à rendre l'intensité du feu d'une même dose de poudre plus ou moins active, & les moyens pour parvenir à la déterminer au juste, même rélativement, ont été d'assés puissans motifs pour me contenter des essais dont je fairai le rapport & que je reconnais encore fort éloignés de cette précision qui servant à donner des nouvelles lumiéres suffit quelque fois pour bien dévélopper un sujet, & quelqu'autres à former un enchainement heureux entre plusieurs, ce que je puis dire de nauvau ne faira que l'enrichir & fournir à quelqu'un qui ait plus de loisir de nouvelles vües, & des applications plus complettes à l'avantage de la société en leur épargnant des tentatives inutiles; c'est à cet effet que j'exposerai même ce que j'ai tenté & qui ne m'est pas réussi.

50 Je me suis servi en prémier lieu du termométre dont j'ai fait mention dans le second Chapitre de ce Mémoire p. 106. §. 15. mais à la troisiéme cuillerée de poudre (dont chacune était de demi once, & dont la composition était de trois parties de salpêtre une de souffre & une de charbon le tout humecté) le mercure étant bouillant le verre se fondit: au lieu de projetter ainsi la poudre dans un petit creuset j'ai préféré de substituer une fusée de la même composition que j'ai mis dans une presse, un ter-

mométre était soutenu par un pied qui pouvait etre baissé ou élevé à l'aide d'une vis sans fin, afin que la boule fut toûjours exposée autant que faire se pouvait à la même quantité de feu, mais à peine en fut il brulé un tiers que le verre fut fondu; les aiant ensuite fait construire ouverts ils n'eurent pas un meilleur sort: j'abandonnai donc l'usage des termométres, & je ne fus pas plus heureux en employant le pyrométre, car je ne pouvais pas assujettir tellement les circonstances pour répondre à peu prés de leur identité.

51 Me voyant ainsi contraint de réjetter absolument tous les moyens connus par lesquels je pouvais me flatter d'obtenir quelque exactitude j'ai tenté de trouver quelque nouvelle méthode pour me procurer au moins des limites, mais c'est ce que je n'ai pû faire non plus avec la précision que j'aurais désiré; celle dont je me suis servi est neanmoins assés commode & simple, & peut être, j'ose l'espérer, pourra-t-elle être employée une autre fois avec plus de succés.

52 Elle consiste en ce que je mis successivement des lames de différens métaux fort minces & de même poids, dans un creuset dans lequel je projettai des doses de poudre de demi once chacune, & de la composition déja énoncée; j'étais obbligé de mettre le feu à la premiére, & lorsqu'elle touchait à sa fin j'en projettais une autre, laquelle était de même suivie par une troisiéme & ainsi de suite. Les résultats que j'en ai eu sont les suivans.

1.°

Le plomb & l'étain se fondirent à la fin de la premiere dose.

Le

2.°

Le zinc s'enflamma à la moitié environ de la seconde.

3.°

Le cuivre jaune, & une monnoie se fondirent & formerent un bouton avant la fin de la quatriéme.

4.°

L'argent fut vitrifié à la sixiéme projection.

5.

Le cuivre rouge commença se fondre lorsque la sixiéme dose touchait à sa fin & fut entiérement fondu avant que la septiéme eut cessé de fuser.

6.°

La limaille de fer parut former un amas informe à la dixiéme dose, mais le fond du creuset fut alors percé par un trou, d'où la flamme sortait avec une grande impétuosité, son diamétre était de trois lignes, & la figure paraîssait tout-à-fait uniforme & circulaire.

53 Quoique le dégrés de chaleur ou le feu actuel soit le principal agent dans ces expériences j'avais cependant assés de fondement pour croire, que le souffre y contribuait aussi considérablement, c'est pourquoi j'ai voulu les réitérer de la même maniére en employant un mêlange où il n'en entrait point, & j'ai en effet trouvé quelque différence dans la facilité de la fusion, principalement pour la limaille de fer,

fer, & le cuivre car ils tardaient plus long-tems; au contraire quelque autre tel que la monnoie ſe fondait plus vite, & l'argent était de même plus facilement vitrifié.

54 Je ne me contentai pas de ces deux procédés je voulus voir encor ſi je pouvais obtenir les mêmes effets pas la ſimple communication de la chaleur, & je mis pour cela les lames dans un creuſet ſuſpendu au deſſus d'un petit baſſin dans lequel je faiſais les projection du mélange; on ſent aſſés que je fus obbligé d'employer beaucoup plus de poudre, mais malgrés mes ſoins celui de la limaille de fer ne put plus avoir lieu; je dois cependant avertir que dans ce cas les effets ſont plus prompts ſi on emploit un mélange ſans ſouffre.

55. Je fis enfin une derniére tentative en mettant dans un petit pot (dont l'ouverture était beaucoup plus petite que le ventre & la baſe) une pâte faite avec du ſalpêtre du charbon & un peu d'huile d'olive (*a*), cette compoſition enflammée j'en réverberai la flamme avec un ſoufflet & une lame d'argent plus épaiſſe encore des précédentes fut vitrifiée à la ſeconde doſe, qui était de même que la prémiere d'une demi once comme j'avais toûjours fait.

56 Tout ce que je viens d'expoſer ſur l'intenſité du feu de la poudre ſert à nous faire voir qu'elle peut être augmentée en différentes maniéres juſqu'à l'infini, & nous n'en devons être nullement étonnés, car en conſidérant toutes les circonſtances dont cette flamme eſt toûjours accompagnée nous voyons diſtinctement tous les caractéres du feu le plus violent; en effet la viteſſe ou la rapidité avec laquelle les parties inflammables ſe communiquent le feu; la grande réſiſtance que lui oppoſent en conſéquence les parties de l'air

(a) Il eſt à propos de faire obſerver que cette pate doit être expoſée pendant quelque tems à un feu lent, pour qu'une partie de l'huile puiſſe s'évaporer, car il y en a toûjours de reſte.

l'air qui en en empechant une trop grande dilatation servent à en augmenter la densité, le dévéloppement successif du fluide par lequel son mouvement est accéléré, sont tous des signes non équivoques de l'activité qui le caractérise; & c'est précisément à cause de la rapidité prodigieuse avec laquelle ses parties inflammables se détruisent que le corps ambiens ne peuvent aquérir si aisément un si grand dégré de chaleur.

57 Voila un précis de mes recherches sur ce sujet, on pourrait assûrément le traiter plus métodiquement & lui donner baucoup plus d'étendue; mais les soins & le tems qu'exigent de tels essais peuvent être employés plus avantageusement par quelque Artiste ingenieux qui soit dans le cas d'en tirer parti; car quoique la chose ne présente en elle-même au prémier coup d'œil rien d'extraordinaire, elle pourra peut-être par cette même raison fournir dans le détail des circonstances dignes d'attention: je n'avance ceci qu'autant que me le permettent les observations passagéres que j'ai pû faire sur les faits particuliers que j'ai exposé; d'ailleurs personne que je sache ne s'est encor attaché jusqu'ici à faire un tel examen, & si l'exactitude dans le procédé ne répond pas à la grandeur du sujet c'est parceque en prémier lieu il ne tient que par incident à celui que j'ai eu en vûe, & en second lieu pour les motifs dont j'ai rendu compte; il me suffit pour le présent d'en avoir donné le prémier un essai, & je passerai maintenant à exposer les phénoménes que j'ai observé sur quelques sortes de vapeurs qui m'ont fait douter de l'étendue qu'on donne à la doctrine de l'absorbtion de l'air.

58 L'objet que nous allons donc prendre à tache annonce l'intéret qu'on doit avoir à le suivre de prés: il s'agit d'une doctrine qui sert a rendre raison de baucoup de phénoménes surprenans, dont la solution serait obscure & peut-être inconnue sans son secours, elle est d'ailleurs géné-

généralement adoptée, & j'ai même lieu de penser qu'on y a recours avec un peu trop de facilité: l'assertion des Savans les plus distingués, & les expériences sur lesquelles ils se sont appuyés & dont ils nous ont donné le détail paraissent nous mettre en droit d'y puiser les explications les plus heureuses & les plus faciles, malgré tous ces avantages j'ai observé que toutes les vapeurs, auxquelles on a attribué la propriété d'absorber & de fixer l'élasticité de l'air, n'en sont pas effectivement doüées, & il m'a paru d'entrevoir que la méthode dont on a fait usage dans cette espéce d'annalyse est sujette à quelques inconveniens, de la viennent les équivoques qu'on peut avoir pris: c'est ce qui m'a engagé à dire quelque chose sur ce sujet, me reservant à le traiter à part une autre fois avec plus d'étendue, en attendant quelques réflexions & des procédés plus circonspects nous mettront en état de juger de la foi que nous devons prêter à ces sortes d'expériences: je ne prétens pas refuter toute absorbtion, mais seulement faire voir qu'il y a des vapeurs qui pourraient sembler en être la cause quoiqu'elles ne le soient pas en effet.

59 Les procédés, que tous les Auteurs plus respéctables (*a*) ont réguliérement suivi pour faire les expériences sur l'absorbtion de l'air, sont ceux, de la combustion, de la distillation, de la fermentation des substances, ou des effervescences que produisaient leur mixtion; l'eau est le milieu qui servait à intercepter toute communication entre l'air commun des vaissaux, & celui de déhors; dans celles qui se faisaient par la combustion & la fermentation (*b*), on plaçait les matiéres toutes enflammées ou en fermentation

(*a*) Halles, Muschembroeck, Hauksbe'e, &c.

(*b*) Telles que les méches ou les chandelles allumées: le saffran de Mars fait avee la limaille de fer le souffre & l'eau; le sel volatil d'ammoniac fait avec la chaux, &c. car on sait qu'à peine ces substances sont mélées il s'éleve aussitôt des vapeurs, &c.

tion ſous les récipiens, de ſorte que la quantité d'air abſolu qui s'y trouvait était moindre de la quantité qu'il y en aurait eu ſi on les avait enflammé par quelque moyen dans le vaiſſeau même, toute communication étant ôtée, ou ſi on les eut avec cette précaution diſpoſées à la fermentation.

60 Une autre circonſtance dont je n'ai pas encor pû m'aſſûrer parfaitement, mais que j'ai aſſés de fondement pour ne devoir pas diſſimuler, puiſqu'elle peut toute ſeule rendre douteux les réſultats des expériences, c'eſt qu'il m'a paru de voir que l'air étant beaucoup raréfié peut s'inſinuer dans les parties de l'eau, de façon que bien des fois l'abſorbtion ſerait l'ouvrage du milieu qui doit intercepter: quoique on n'ignore pas que l'eau peut ſe charger d'air on ſait auſſi qu'elle ne peut en recevoir qu'une quantité déterminée, mais j'ai eu occaſion d'obſerver comme je l'ai dit que cette vérité peut ſouffrir des reſtrictions.

61 Voici l'expérience qui m'a donné lieu de penſer ainſi.

Expérience.

J'ai plongé dans un vaiſſau de la hauteur de deux pieds environ un tuïau de verre de ſix pieds de long, & du diamétre aumoins de ſix lignes auquel on avait hermétiquement ajoûté un flacon, ou qui était garni d'une boule ſoufflée dans le même verre & qu'on avait précédement approché du feu pour en chaſſer une partie de l'air avec plus d'aiſance; dès que la machine avait aquis la température & que l'eau était montée à une ſtation fixe dans le tuïau je marquais avec un fil ciré le point d'élévation, & comme on ne pouvait pas approcher de la boule, même à quelque diſtance ſans cauſer quelque raréfaction à l'air qui y était contenu, & faire par conſéquent baiſſer l'eau dans le tube, je laiſſais derechef repoſer la machine pendant quelque tems en m'en éloignant comme auparavant, & j'examinais enſuite ſi le fil répondait avec préciſion au niveau de l'eau, toutes ces

précautions étant prifes j'approchais une flamme par dégrés de la boule, & auffitôt qu'elle était un peu échauffée & qu'elle ne rifquait plus de fe fendre je lui ai fait fubir une chaleur telle qui fit précipiter la dépreffion de l'eau, laquelle cependant n'atteignit point à l'extremité du tuïau, afin que l'air n'en fut point chaffé: je m'écartai pour lors de la machine de même que j'avais fait auparavant & j'ai vû quelque tems après l'eau s'élever dans le tube au-deffus de la marque que j'avais fait.

62 Cette expérience quoique très-fimple exige baucoup de circonfpections & de foin, outre ceux que nous avons déja fuggerés il eft bon d'ajoûter, qu'il faut la faire dans une chambre où les variations dans l'atmofphére ne foient pas fi fenfibles, il n'y faut pas du feu, ni qu'elle foit fort ventilée, on ne s'y arretera qu'autant qu'il eft indifpenfable, il faut y laiffer le flambeau allumé jufqu'à ce qu'on ait fini d'obferver; on doit enfin avoir un barométre & un termométre fort exacts pour plus grande fûreté; cependant malgré toutes ces précautions, elle ne réüffit pas toûjours, apparemment à caufe de la facilité de l'eau à fe mouvoir & que fouvent les variations peuvent fe compenfer, elle a neanmoins réüffi vingt fois pour une; avec tout cela je me referve à faire d'ultérieures obfervations.

63 Ce que nous venons de dire fuffit pour nous convaincre que cette méthode eft incertaine & même infuffifante, pour faire ces fortes d'expériences, puifque elle peut aifément induire en erreur, car ne fachant pas de combien l'air a été raréfié dans le tems qu'on a intercepté la libre communication entre celui qui eft enfermé dans les vaiffaux & l'extérieur, ignorant la quantité qui peut s'en être infinué dans l'eau, on ne peut dire avec fondement qu'il y ait eu d'abforbtion: quelques fubftances que j'ai foumis à un procédés plus fimple, & qui réduites en vapeurs, n'ont point abforbé d'air, quoique traitées de la maniére qui a été adopté jufqu'

jusqu'ici, passent généralement pour avoir une telle propriété, à servi à me confirmer dans les soupçons que j'avais formé.

64 Je commencerai par rendre compte de la maniére dont je m'y suis pris pour obtenir le même effet en les assujéttissant à un procédé délivré de tout équivoque, ce détail sera suivi de celui des substances que j'y ai soumis, & de ce qui en est résulté.

65 Je mettais les substances qui devaient être enflammées dans des flacons par le moyen d'un bout de tuïau de communication, qui était hermétiquement attaché à côté de leurs cols, & dont l'extremité était jointe de la même maniére à un long tuïau courbé en forme de baromètre qui contenait du mercure & servait à en faire les fonctions; suivant l'espéce de flamme qui devait s'y exciter, & le moyen que je devais employer à cet effet, je laissais tout l'air dans la capacité où j'en faisais sortir une partie, en me servant du feu comme j'ai déja dit; l'ouverture latérale par laquelle j'avais mis les substances étant bouchée avec de la cire d'Espagne, j'excitais la flamme ou avec le miroir ardent comme pour le souffre, ou avec une flamme, je conservais ensuite ces machines en les examinant plusieurs fois le jour, & j'avais mis au même endroit un baromètre, un termomètre & un flacon fermé, & portant à son extremité un tuïau recourbé avec du vif argent ce qui faisait une même machine & dans le fond un baroscope.

66 Comme je ne pouvais pas entreprendre un travail de longue haleine, je me suis contenté de choisir le souffre, la poudre & de la méche pour voir ce qui leur arrivait; j'enflammai le souffre avec une lentille, & j'ai vû de même qu'Olaus Borrichius une fumée qui passait au travers des porres du verre à l'endroit où tombent les rayons rassemblés par le foyer, mais le mercure ne fit plus aucun mouvement depuis que l'air du flacon fut refroidi; dans celui où j'avais mis deux grains de poudre j'avais environ

quattre pouces de moins d'air, je la mis en feu à l'aide de la flamme d'un flambeau, & après une demi heure environ aiant marqué le point d'élévation, le vif argent fut immobile, jusqu'à ce qu'il arrriva des variations dans l'atmosphére; la même chose est succedée aux méches.

67 Je n'en donne pas d'avantage pour le présent faute de tems: quant à ce qui regarde les chandelles allumées, M.^R le DR CIGNA notre ami & savant confrére rapportera les expériences que nous en avons fait; si mes devoirs me le permettent je me propose de faire des nouvelles recherches sur ce sujet, de renouveller les expériences qui sémblent plus rigoureuses, & particuliérement le Chap. VI. de la Statique des Végétaux, digne ouvragre du Célébre feu MR HALLES.

68 La délicatesse du sujet ne me permet pas d'ailleurs de dissimuler, que l'on ne saurait être assés sur ses gardes pour obvier aux moindre petits inconveniens, car ils deviennent très-essentiels : en effet avec quelle facilité l'air ne se rarefie-t-il pas? & son élasticité augmentée fait qu'on ne peut pas s'appercevoir que la quantité absolue dans la même capacité est diminuée, ces réflexions posées on conviendra de la facilité qu'on peut avoir à se tromper.

CHAPITRE V.

Examen de la Poudre sans Souffre.

69 CE Chapitre est particuliérement déstiné à quelques réflexions sur l'usage que l'on peut faire dans la pratique de la poudre sans souffre. J'avais déja établi dans mon second Mémoire quelques uns des principes sur lesquels elles sont appuyées, je pense qu'en y joignant ce qu'on lit dans le Chap. 2.^d & 3.e de celuici nous pourrons être en état d'apprécier d'avance les effets qu'on en doit attendre, sans se jetter aveu-

aveuglément dans des essais toûjours couteux & trop incertains quand ils ne sont pas appuyés sur la théorie. Je dois au reste avertir ici que l'Auteur de l'article *feux artificiels* dans l'Encyclopédie est le prémier qui ait proposé d'appliquer cette poudre à l'usage de l'Artillerie; je l'ignorais quand j'écrivis mon second Mémoire, & je n'ai pû en faire mention que dans une note: je suis au reste bien éloigné de lui accorder tous les avantages que cet Auteur semble en attendre.

70 Il suit à la vérité de ce que nous avons dit jusqu"à présent qu'on peut avec une moindre quantité de cette poudre que de la commune chasser un projectile jusqu'à une distance donnée, ce qui peut faire une différence assés considérable dans la consommation de la poudre, & plus encore dans la dépence, puisque toute choses d'ailleurs égales cette espéce de poudre est moins dispendieuse. Si cependant on réflechit sur la cause de la plus grande force de cette poudre on verra bientôt qu'il résulte de cet avantage même des inconveniens assés considérables.

71 La force de la poudre en général ne peut dépandre que de la quantité du fluide qui s'en dévéloppe, & de la plus grande vitesse & simultanéité avec lequel se fait ce dévéloppement. Chap. 2.[d] §. 39. 40. On voit assés que la supériorité de cette poudre sur l'autre ne peut dans le cas dont il s'agit être l'effet d'une plus grande quantité de fluide, puisque le salpêtre se trouve dans cette charge en moindre quantité que dans l'autre: elle dépand donc absolument de la plus grande vitesse avec laquelle se fait la propagation du feu & le dévéloppement du fluide Chap. 2.[d] §. 38. ensorte que dans le cas d'un effet constant les quantités des différentes poudres doivent en quelque sorte être en raison inverse de cette même vitesse.

71 Cela posé le dérangement dans la direction ou dans le pointement d'une piéce d'Artillerie ne pouvant être occa-

sioné

ſioné que par l'action du fluide élaſtique qui fait par ſon dévéloppement reculer le canon dans une ligne différente de la direction qu'on lui avait donné, ſoit à cauſe de l'irrégularité de la piéce plus riche de métal d'un côté que de l'autre, ſoit par l'imperfection des roues, de la platte forme ou de quelque autre cauſe ſemblable : il eſt aiſé de voir que ces dérangemens ſeront plus conſidérables dans le cas d'un dévéloppement plus prompt.

73 En effet en ſuppoſant que l'action des deux charges, ou la viteſſe qu'elles impriment au boulet ſoit la même il eſt évident que ſi le canon ne ſouffrait pas dans ſon recul la réſiſtance du frottement, il eſt évident dis-je que les dérangemens dans la direction feraient abſolument les mêmes: mais il n'en va pas ainſi ſi nous voulons faire attention à ces réſiſtances, car l'expreſſion de l'élément de la viteſſe avec laquelle la piéce eſt pouſſée en arriére n'eſt plus alors proportionel à la preſſion qu'exerce ſur elle le fluide élaſtique, mais à cette même preſſion diminuée d'une autre quantité qu'on peut ſuppoſer proportionelle à la viteſſe du recul à chaque inſtant: or ſi dans cetre hipotéſe on cherche au moyen du calcul intégral l'expreſſion générale de cette viteſſe, en faiſant, comme la nature du Problème le requiert, que cette viteſſe fut la même quand le fluide élaſtique ceſſe d'agir ſur le canon, fuſſe la même dis-je quelle que ſoit l'élaſticité du fluide, ou ce qui revient au même qu'on ſuppoſa que cette viteſſe doit être la même ſi on n'a pas égard aux réſiſtances, on la trouvera toûjours plus petite quand l'élaſticité eſt moindre (*a*) d'où il eſt aiſé de conclure

(*a*) Une réflexion bien ſimple pourra aider à concevoir ſans calcul cette vérité. (Fig. I. Pl. I.) Quelle que ſoit la loi du dévéloppement du fluide élaſtique il eſt viſible que les viteſſes des boulets chaſſés par les deux différentes charges pourront à chaque inſtant être réprésentées par celle de deux corps qui déſcendraient librement le long de deux courbes quelconques A G, A Q; & que puiſqu'on ſuppoſe les deux portées égales

clure que le recul & par conséquent le dérangement du pointement sera toûjours plus grand pour une poudre plus violente quoique les portées soient égales.

74 Il est évident que ce que nous venons de dire peut également s'appliquer au cas où le bouchon introduit dans le canon avec violence fait une plus grande résistance au fluide, un autre inconvenient fort considérable dont nous avons fait mention plus haut, Chap. 1.r p. 102. en note c'est le péril de faire crever plus facilement les piéces en se servant de la poudre sans souffre, je me contente pour cela de renvoyer à l'endroit cité.

75 Je passe à décrire les défauts de cette poudre qui ne dépandent pas comme ceux dont nous venons de parler de la force avec laquelle elle se dévéloppe, mais plûtot de la nature des principes dont elle est composée. Plusieurs expériences que j'ai fait sur cette poudre à différentes reprises & par des méthodes diverses m'ont convaincu qu'elle s'enflamme baucoup plus difficilement que la poudre commune, M.r le Marquis Birague dont la sagacité & surtout l'amour

égales ces courbes doivent être terminées par l'horizontale BQ. Il est encor évident que si l'on fait abstraction du frottement, les vitesses du canon dans son recul à chaque instant seront proportionelles à celle des boulets, & par conséquent encor à celles des corps qui déscendent dans AG & AQ. Cela posé pour trouver quels changemens le frottement peut causer aux vitesses des reculs dans ces deux cas. Imaginons que ce sont ces corps eux-mêmes qui éprouvent cette résistance dans leurs mouvement selon AG & AQ, & supposons pour un moment qu'ils aïent une vitesse égale aux points D, E (supposition qui est vraie en effet pour le point A où la vitesse des deux corps est nulle) il est clair en tirant là ce infiniment proche de CE que les résistances qu'éprouvent ces corps étant proportionelles aux vitesses & par conséquent égales en DE elles agiront plus sur le corp qui se meut selon AQ, puisque $Ee > Dd$. Donc la vitesse du corps qui se meut dans AQ sera toûjours plus petite dans le cas du frottement, que celle qui se meut dans AG quand tous les deux seront parvenus à une horizontale quelconque BQ ; & par conséquent quand l'action des fluides cessera entiérement sur le canon, la vitesse du recul sera plus petite quand la charge sera plus lente à se décomposer, même dans le cas où ces reculs seraient égaux en faisant abstraction de ces résistances, & c'est là à peu près le cas que nous avons supposé des deux portées égales.

l'amour des sciences sont assès connus a été présent à plusieurs des essais que j'ai fait sur cette matiére. Il est vrai qu'on pourrait en quelque sorte remedier à cet inconvénient en se servant d'un charbon plus léger, mais il est facile de s'appercevoir qu'étant dans ce cas néceſſaire d'employer une plus grande quantité de charbon pour procurer l'entiére décomposition du salpêtre, cette poudre perdrait alors beaucoup de cette force, qui fait son unique mérite. On déduit facilement de là que la force de la poudre est toutes choses d'ailleurs égales toûjours proportionelle à la plus prompte décomposition du salpètre, & par conséquent à la difficulté qu'elle a de prendre feu (*b*).

76 On sait combien le grainage est nécessaire à la poudre en général pour l'usage de faction & celleci le soutient difficilement, car quoique on ait différentes méthode de la rendre propre au grainage elles sont toutes impraticables en grand (*c*).

77 En-

(*b*) Comme le charbon n'est composé que par l'union d'une substance inflammable à des parties terrestres, il s'ensuit naturellement que la différence dans la qualité du charbon consiste dans le rapport où ces substances se trouvent combinées entr'elles : cela posé il en doit résulter des différences dans l'inflammabilité & dans l'action qu'il peut exercer sur le salpêtre, d'où il est évident qu'il doit s'en trouver une espéce, telle où ces deux propriétés soient les plus grandes possibles ; & ce serait celle qui servirait avec plus de succès dans les armes à feu, l'expérience peut l'assigner avec facilité ; d'ailleurs il n'est pas moins aisé de déterminer par ce moyen celle qu'on doit préférer dans les différens usages qu'on se propose. La quantité de charbon nécessaire pour procurer la totale décomposition d'une quantité de salpêtre doit donc être déterminée rélativement à sa qualité.

(*c*) Casimir Simienowicz dans son Grand Art de l'Artillerie rapporte la méthode dont les Paysans Cosaque font usage pour construire la poudre. Elle consiste à mettre les doses convenables de salpêtre, de souffre & de charbon dans un pôt avec de l'eau qu'on fait bouillir jusqu'à ce que les substances soient épaissies par l'évaporation de l'eau ; ils passent ensuite cette pâte au tamis & la réduisent en grains. Cette manœuvre il faut l'avouer est fort commode, parceque on peut faire de la poudre en fort peu de tems & on peut épargner les moulins, de même qu'un nombre d'opérations qui sont indispensables dans celle qu'on fabrique communément, mais elle est sujette à des grands inconveniens : car on ne peut la faire en prémier lieu qu'en petite quantité,

77 Enfin cette poudre attire d'avantage l'humidité de l'air inconvenient très-considérable sans doute, puisqu'elle est par là incapable d'être conservée long-tems dans les magasins. D'ailleurs elle salit & ronge extrémement les armes à feu, parcequ'il résulte de sa décomposition un alkali fixe qu'on sait être un des corrosifs les plus violens, & qui lorsqu'il s'humecte à l'air, ronge avec promptitude & avec une grande facilité les métaux.

78 Il serait donc nécessaire d'ajoûter à la poudre sans souffre une substance, qui dans le tems de sa décomposition, se saisit de cet alkali & forma avec lui une substance neutre: or c'est précisément une des fonctions du souffre dans la poudre commune, qui sert aussi à la délivrer par sa visquosité de l'inconvenient d'attirer si facilement l'humidité de l'air, ce qui comme nous l'avons vû plus haut est un des défauts les plus essentiels de la poudre sans souffre.

79 Répiloguons enfin ici les raisons que nous venons de rapporter pour préférer la poudre dont on se sert aujourd'hui à celle

& en second, parceque par une manœuvre telle que nous venons de l'exposer, la poudre que l'on fait est baucoup moins forte, & la manufacture en est plus dangereuse, outre qu'elle requiert plus de soins & de circonspection de la part des Ouvriers, & je crois aussi que la main d'œuvre en serait plus couteuse; sans entrer cependant dans des telles discussions, je donnerai un détail des moyens dont je me suis servi pour délivrer cette méthode de ses inconveniens, laissant à part celui de la manufacturer en grand, puisque la chose est absolument incompatible. Prémierement au lieu d'eau j'ai une fois substitué du vinaigre, & une autre fois de l'urine, parceque principalementle vinaigre ne fait pas une dissolution intime du salpêtre comme fait l'eau, & attaque plûtôt le charbon, de maniére que le mélange est plus exact & uniforme, car les substances ne peuvent pas se séparer si aisément : le vinaigre ensuite contenant du phlogistique loin de délayer celui du charbon contribue en quelque façon à le rendre meilleur ; la même chose à lieu avec l'urine. Mr. le Chev. de Robilant Major d'Artillerie & Inspecteur Général des Mines de S. M. dont le mérite, le savoir & l'assiduité avec laquelle il cultive les différens genres des sciences sont également reconnus, m'a communiqué des vües qu'il avait formé sur ce sujet, qui ne pourraient être que fort utiles & instructives, & il est porté à croire qu'on peut se servir avec succès du vinaigre pour humecter la poudre lorsqu'on la manufacture dans les moulins ; quant

à moi

celle que nous venons d'examiner, & foumettons-les d'un coup d'œil au jugement du Lecteur éclairé & impartial.

80 En prémier lieu le fouffre par la facilité qu'il a de s'enflammer la rend plus propre à l'ufage de toutes les armes à feu, & fi fon dévéloppement eft moins prompt c'eft moins un défaut dans prefque toutes les circonftances qu'un avantage réel puifque nous avons fait voir qu'un dévéloppement trop fimultané ruine facilement les armes à feu, & rend les pointemens trop incertains; il empeche outre cela l'action de l'alkali fixe, fur les métaux dont elles font faites, en formant avec lui lors de la décompofition du tartre vitriolé (*d*); enfin le fouffre par fa vifquofité rend le grainage facile à fe faire & à fe foutenir, & empeche la poudre d'attirer trop facilement l'humidité de l'air, ce qui la rend fupérieure à la poudre fans fouffre, même pour l'ufage des mines où les autres inconveniens de cette derniére pourraient être confidérés comme des avantages réels.

à moi je conviens non feulement avec lui pour le vinaigre en particulier, mais j'opine pour tous les liquides qui contiennent du phlogiftique & dont la partie aqueufe peut s'évaporer avec facilité; quoique en puiffe dire quelque Praticien par *routine*. 2. Je ne voulus pas me fervir d'un trop grand dégré de chaleur dans l'évaporation, parceque la féparation des deux compofans aurait été par là facilitée, & je mis à cet effet une fois le pôt au bain marie de 60 à 70 dégré de Réaumur; & une autre le petit chaudron fut mis à feu nud avec un termométre qui en touchait le fond &c.; 3. je broyai auffi fans difcontinuer les fubftances avec une éfpatule de bois, & lorfque la matière était bien épaiffie, je levais le chaudron du feu en continuant à broyer jufqu'à ce que la pâte me paruffe fuffifamment déffechée & propre au grainage, je l'étendis pour lors fur une planche & je la paffai enfuite au tamis; les poudres fans fouffre que j'ai fait de cette façon étaient pour le moins auffi fortes que celle que j'ai fait en la broyant fur une pierre comme dit Mr. PERRINET d'Orval, où en la faifant piler pendant dix heures dans un mortier, elle avait même l'avantage de foutenir mieux fon grainage, & je ne me fuis apperçu d'aucune différence afsès confidérable, quant à cette propriété, entre celleci & la commune; mais nous en reviendrons toûjours à conclure, que cela ne pouvant fe faire qu'en détail, & eu égard à quelques réflexions que nous avons déja fait, elle ne parait pas propre à l'ufage ordinaire.

(*d*) Loin d'obvier avec cette poudre à l'évafement des lumiéres comme je l'avais foupçonné. Mém. fecond p. 145. §. 57. on le facilite, ainfi que nous venons de le voir.

JOHAN-

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De frigore ex evaporatione, & affinibus phoenomenis nonnullis.

De thermometrorum variis liquoribus madentium refrigeratione ex inflato vento nonnulla in superiore Tomo protulimus (*a*) eorum nescii, quae jamdudum celeberrimus Cullen hoc in argumento praestiterat; qui non modo egregiis experimentis doctrinam hanc ornavit, verum etiam hujusmodi phoenomenorum causam ingeniose est assecutus. Hujus ego luculentissimam, quam postea cognovimus, theoriam (*b*) cum nostris experimentis contuli; & nonnulla in his, cum minus forte accurate peracta, tum novam in hac disquisitione viam patefactam esse intellexi. Quare opportunum duxi in eadem experimenta operam diligentiorem impendere, quaeque mihi observare contigit, ea hic exponenda adgredior.

1. Observavit clarissimus Cullen non aqua solum (quod a Merano fuerat animadversum (*c*)) sed & aliis liquoribus, qui cum ambiente ad eumdem caloris gradum compositi essent, perfusa thermometri bulla, liquorem in thermometro deprimi, & tamdiu deprimi, quamdiu thermometri bulla exsiccata sit, tumque, si iterum madefiat, adhuc inferius descendere (*d*), eoque magis, caeteris paribus, quo magis liquor, quo bulla perfunditur, volatilis est (*e*), & descen-

(*a*) In comment. pag. 20. 21.
(*b*) In specimin. observ. physic. & litterariar. Societ. Edimburg. edit. anno 1756. tom. 2. pag. 145. quam dissert. gallic. primum vertit. Cl. Roux in lib. cui tit. *Recherches historiques & critiques sur le refroidissement des liqueurs*. Egregius hic liber sub finem anni 1759. nobis demum notus fuit cum sub initium ejusdem anni specimina nostra edita fuissent.
(*c*) In dissert. de Glacie edit. 1749.
(*d*) Recherches pag. 97. & sequent.
(*e*) Ibid. pag. 99. 100. 101.

descensum majorem esse in vacuo, quam in aperto aëre; ex quibus non immerito conclusit liquoris thermometrici descensum ex evaporatione repetendum esse, eamque non solum vento accelerari, & augeri (*f*), sed & in rariori aëre majorem esse, cum ibidem liquor thermometri magis deprimatur (*g*).

2. Qua tamen in re exceptionem hanc laudatus Auctor adnotavit, quod acida mineralia *concentrata*, quibus thermometrum madesit, non modo liquorem in tubo non deprimerent, quinimmo valde elevarent; idque ex *concentrati* acidi cum humido aëreo calefactione repetendum existimavit (*h*), cum observaverit eadem acida duplo aquae diluta contrarium effectum praestitisse (*i*); quae quidem Cl. Viri sententia experimento a nobis allato confirmari videtur: observavimus namque oleum tartari *per deliquium*, quod nec humidum aëreum absorbere, nec nisi difficillime correptam aquam per vapores dimittere potest, thermometro nullam mutationem induxisse. Equidem narravimus olea tum expressa, tum stillatitia thermometri liquorem ad majorem altitudinem elevare; at postquam in CULLEN experimentis olea etiam stillatitia (*k*) liquoris thermometrici descensum praestitisse novimus, repetitis majori diligentia experimentis, & sensibilioribus thermometris adhibitis (*l*) experti revera fuimus ab oleis quoque essentialibus liquorem thermometricum deprimi, minus tamen, quam ab alio quovis li-

quore

(*f*) Si humida thermometri bulla vento ejusdem temperaturæ exponeretur liquorem in tubo deprimi docuerat olim MUSSCHEMBROECK *essai de physique* §. 962. quæ jam ab anno 1739. gallico sermone conversa, & edita fuerant.

(*g*) Recherches pag. 104. 105.

(*h*) Ibidem pag. 102.

(*i*) Ibidem loco cit. fere majus frigus quam aquam excitasse; non vacavit explorare, an minus dilutum eumdem effectum producturum esset pag. 102.

(*k*) Recherches pag. 100.

(*l*) Thermometro aëreo CULLEN usus est pag. 99.

quore (ut laudatus Auctor adverterat), olea autem expressa vix ullam mutationem parere, maximeque dubitandum esse ne alias observata elevatio, tum adhibiti olei *essentialis* vetustati, tum alicui, ex ejus, qui follem agitat, propinquitate communicato calori, adscribenda sit (*m*), ut propterea expressa olea, quae nihil evaporant (*n*) thermometrum non immutent, quod cum CULLEN theoria egregie consentit.

3. Caeterum calorem thermometri acido minerali aspersi ex absorpto humido aëreo produci multa confirmant. Et primo quidem, ut GOULDIUS ostendit, acida *concentrata* in vasis apertis aëri exposita, pondere augentur (*o*), quod ponderis incrementum non aliunde, quam ex absorpto humido atmospherico repeti potest; & quemadmodum pondus paullatim minus augescit, prout humido atmospherico eadem acida saturantur, ac tandem omnino augeri desinit, ita immersa thermometra in acida concentrata majorem in his, quam in ambientibus corporibus calorem ostendunt, qui tamen paullatim imminuitur, ut tandem ambientium corporum calori exaequetur, quod facile est experiri. Acida demum mineralia eo magis intra datum tempus pondere augentur, quo ampliorem habent superficiem aëri expositam (*p*); ita oleum vitrioli, quod in vase cylindrico aperto quatuor tantum gradibus immersum thermometrum calefaciebat, educto thermometro, ut jam per amplam bullae thermometricae superficiem adhaerens oleum ad aërem

(*m*) Thermometrum spirit. vin. aceto, lacte, aqua aspersum refrigerari donec bulla exsiccata sit, contra aspersum oleo olivarum, aut lini calefieri, se observasse affirmat Anonimus ad Auctorem *Du London Kronikle*, & prioris phoenomeni causam perspicuam esse, nempe evaporationem, alterius obscuram. Vid. *Journal Etranger Janvier* 1761. *Nouvelles d'Angleterre* §. 8. *pag.* 110.

(*n*) Diutissime aëri exposita ponderis jacturam ex evaporatione nullam patiuntur. Vid. *Encyclopéd. article* Evaporation.

(*o*) Transf. philosoph. anni 168. $\frac{3}{4}$ n. 156. art. 3.

(*p*) Ibid.

rem pateret, ſeptem inſuper gradibus ipſius calorem augebat; ex quo patet eadem lege acida mineralia a contactu aëris calefieri, qua pondere augentur; proindeque aucti caloris eamdem cauſam eſſe, ac aucti ponderis, abſorptum videlicet aëris humidum (*q*), & ex hac quidem ſola cauſa pyrophori hombergiani incenſionem repetendam eſſe nuper Vir Cl. demonſtravit (*r*).

4. Ex allato ſimpliciſſimo experimento, quod acida *concentrata* ex aëris humido incaleſcant, miri cujuſdam phoenomeni ratio eruitur olim a GEOFROIO propoſiti (*ſ*), quod nempe, ſi oleum vitrioli in ſalem ammoniacum infundatur, efferveſcentia contingat, ex qua immerſum thermometrum refrigeretur, intereadum thermometrum miſcelae vaporibus expoſitum admodum incaleſcit; notum ſiquidem eſt ex hac miſcela acidum marinum extricari eo magis *concentratum*, quo oleum vitrioli eſt vehementius (*t*). Itaque ex hujuſmodi acido marino in vapores abeunte, & ex atmoſpherae humido incaleſcente ſuſpenſi thermometri calor eſt repetendus. Et revera experiundo didici calorem eo ſemper minorem eſſe, quo adhibitum oleum minus eſt *concentratum*, ut tandem ex oleo aqua prius ſaturato in ſalem ammoniacum immiſſo halitus erumperent, abſque ullo ſenſibili calore; cum nempe ex acido marino diluto hujuſmodi halitus fierent, quod cum atmoſphaerae humido incaleſcere non poterat.

5. Ad refrigerationem immerſi thermometri, quod ſpectat, eamdem ſolutioni ſalis ammoniaci in aqua olei vitrioli adſcribendam eſſe multa ſuadent (*u*). Nam primo exper-

(*q*) CULLEN in perfecto vacuo experimentum inſtituere decreverat, ut quaeſtionem accurate reſolveret pag. 102.

(*r*) SUVIGNY Mémoires de Mathématiques & de Phyſique, préſentés à l'Académie des Sciences tom. 3. pag. 180. & ſequent.

(*ſ*) Mémoires de l'Académie 1700. pag. 113.

(*t*) MAQUER Chymie pratique tom. 1. pag. 123. tom. 2. pag. 536.

(*u*) Generatim acidorum mineralium refrigerationem ex admixtis ſalibus variis ab eorumdem ſalium ſolutione in aqua, qua acida diluuntur, repetendam eſſe opinatus eſt. Cl. ROUX p. 42. 43.

expertus ſum, quo oleum vitrioli aquoſius eſt, caeteris paribus, eo majorem exoriri frigoris gradum; contra ſi ſumme concentratum ſit, non frigidam, ſed calidam effervescentiam cum ſale ammoniaco efficere, quod & ab aliis jampridem indicatum videtur (*x*). Deinde ſales alii, alkalici volatiles (*y*), nitrum (*z*), aliique uno verbo omnes, qui aquam refrigerant, oleum vitrioli dilutum ſimiliter refrigerant; *concentratum* calefaciunt, ut tamen, quo frigori cum aqua faciendo minus apti ſunt, quam ſal ammoniacus, eo etiam dilutius oleum vitrioli expoſtulent, ut cum eodem frigus producant (*a*). Caeterum frigus in propoſito experimento ex effervescentia neutiquam eſſe videtur; ſiquidem non ſolum gignitur a ſalibus, qui cum acidis effervescunt, verum etiam ab iis, qui hac dote carent (*b*), id equidem prae-

(*x*) „ Ab excellentibus, ut audio, Florentinis Academicis obſervatum eſt non „ incaleſcere oleum vitrioli, ſed frigeſcere ſali ammoniaco adjectum; „ neque abſimile fuit, quod in rectificato ſpiritu ſulphuris per campa- „ nam facto obſervavi: effectum tamen longe alium reperi, quando „ Florentinos imitatus experimentum cum oleo inſtitui. „ BOYLE de caloris, & frigoris orig. mech. exper. 23. pag. 314. At ROUVIERE aperte docuit oleum vitrioli dilutum quidem a ſale ammoniaco refrigerari, *concentratum* contra admodum calefieri. Vid. *Recher.* pag. 43. in not.

(*y*) Ex oleo vitrioli duodecuplo aquae diluto, & ſale volatili ſalis ammoniaci effervescentia frigida (BOYLE loc. cit. exp. 5. pag. 296.) ex oleo vitrioli non diluto, & eodem ſale volatili calida effervescentia orta eſt. Id. ibid. exp. 7. pag. 296. 297.

(*z*) Drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. nitri pulverati calorem gr. 3. auxerunt. Drach. iij. ejuſdem olei triplo aquæ diluti cum drach. ij. nitri calorem gr. 9. minuerunt. MUSSCH. in Cement. p. 209. 210. §. 229. collect. Acad.

(*a*) Hinc idem oleum vitrioli, quod ex ſale ammoniaco refrigerabatur in MUSSCHEM. experimentis (l. c. §. 230.) ex nitro incaleſcebat, niſi dilueretur (vid. not praeced.) & ex ſale marino (GEOFROY l. c. pag. 113.) Revera aqua ex ſale marino gr. 2. tantum, ex nitro gr. 8., ex ſale ammoniaco gr. 12. refrigerabatur in ELLERI experimentis (Acad. de Berlin 1750. p. 85.)

(*b*) Sic ex ſpiritu nitri, & nitro frigus, tum ex aceto, & ſalibus quibuſcumque aquam refrigerantibus (GEOFROY l. c.) contra dilutiſſima acida cum ſpiritibus alkalicis, ideſt cum ſalibus alkalicis jam aqua ſolutis effervescunt quidem, ſed frigus non producunt (BOERH. elem. chem. tom. 1. p. 202. exp. 3.

praestare videtur effervescentia, ut ex intestino motu promptior fiat salis ammoniaci intra aquam, qua acidum diluitur, solutio, sicque frigus nonnihil intendatur; notum namque est ex Cl. Beccarii (c) experimentis salia neutra intra aquam, si quieta fuerint vix, ac ne vix quidem solvi, propterea effervescentia salis solutionem accelerando non secus, ac agitatio, quae bacillo fit, frigoris gradum augebit (d).

6. Quibus positis jam corruit Physicorum quorumdam hypothesis, qui per effervescentiam ignem ex miscela fugari opinati sunt, propterea miscelam ipsam refrigerari, interea dum expulsus cum vaporibus ignis iisdem expositum thermometrum calefaceret (e). Si enim theoria staret, vapores eo calidiores essent, quo miscela frigidior evadit; at contra, ut diximus, in summa olei vitrioli vehementia, non refrigeratur, sed calefit miscela, & tamen vapores eo tempore maxime calidos emittit; contra si oleum vitrioli dilutissimum sit, licet maxime miscela frigefiat, vapores tamen sensibilem calorem non habent; & generatim aqua, qua oleum vitrioli diluitur sicut effervescentiam eo frigidiorem reddit, quo copiosior est, ita vapores non calidiores, ut ex proposita theoria sequeretur, sed frigidiores efficit. Praeterea sunt aliae effervescentiae frigidae, qualis est effervescentia salis alkalini volatilis cum acido quovis, & cum ipso oleo vitrioli, quae calidos halitus non emittunt, quod nullum inde acidum *concentratum* expellatur, ex quo iterum evincitur calorem halituum non expulso igni, quod omnibus miscelis frigoriferis commune esset, sed *concentrationi* erumpentis acidi tribuendum esse. Hinc halitus, qui ex sale

(c) Comment. Bonon. tom. 1. p. 405. in opusc.
(d) Boyle transaction n. 15. art. 1. ann. 1666.
(e) Musschem. in Cement. p. 214. n. 10.

ſale marino, & oleo vitrioli admixtis copioſi erumpunt (*g*) calidos ſimiliter reperi, licet non ex frigida, ſed ex calida effervеſcentia naſcantur: enimvero oleum vitrioli ex ſale marino idem acidum *concentratum*, quod ex ammoniaco in halitus expellit, qui propterea pariter incalescunt.

7. Sed ut ad refrigerationem ex evaporatione, a qua nonnihil digreſſi ſumus revertamur, quaeſitum eſt, num liquida vaſis apertis infuſa, evaporatione ſuperioris ſuperficiei frigidiora evadant. Id in vacuo contingere Cl. CULLEN experimenta invicte demonſtrant (*h*) : in aperto autem aëre ejuſmodi proponitur experimentum, ut non ſatis conſtans videatur. Nam Cl. BEAUMÉ, niſi liquidum immediate thermometro incumbat, nullam mutationem ab ejus evaporatione induci affirmat, & in cucurbitis, aut in lagenis vitreis ſive obturatis, ſive apertis aether continentibus thermometrum paullo profundius in ipſum immerſum, ad temperaturam componi affirmat (*i*). At alibi indiſcriminatim docet, ſi aether tum vitriolicum, tum nitroſum in vitreis vaſis reponatur immerſi thermometri liquorem 4.° infra temperaturam deprimere, inque ea depreſſione ſervare (*k*). Alibi demum thermometrum mercuriale in aether nitroſum immiſſum 1.°; thermometrum autem ex vini ſpiritu $\frac{1^{\circ}}{2}$ deprimi affirmat (*l*). Ego in cylindricis vaſis pollicem pariſinum diametro patentibus, & ſpiritum volatilem ſalis ammoniaci calce paratum continentibus, thermometrum 4.° circiter refrigerari obſervavi, tum quod immediate ſuperficiei liquidi ſubjectam bullam habebat, tum alterum, cujus bulla ad infima vaſis tribus

(*g*) GEOFROY l. c.
(*h*) Recher. p. 106.
(*i*) Diſſertation ſur l'aether p. 98. 99. exp. 12. 13.
(*k*) Ibid. pag. 87. exp. 3.
(*l*) Ibid. pag. 84. 85. exp. 2. Hujuſmodi inconſtantiam jam ROUX adnotaverat. *Recher.* pag. 115. 116.

tribus circiter infra primam pollicibus demergebatur; atque utriusque liquorem sensim subsedisse, donec ad quartum infra temperaturam gradum pervenisset, ibique tamdiu substitisse, quamdiu, dissipatis volatilioribus spiritus partibus, ejusdem evaporatio minueretur; in vasis autem aequalem aperturam habentibus, sed in ampliorem ventrem expansis multo minorem refrigerationem ex ejusdem spiritus evaporatione productam observavi, eoque minorem, quo venter amplior erat; ex quibus constat evaporatione tum superiora, tum inferiora liquidi strata aequaliter quidem refrigerari, sed frigoris producti gradum eo majorem esse, quo superficies evaporans ad reliquam superficiem, per quam penetrare nititur ambientium corporum calor, aut ad massam refrigerandam, aut etiam ad harum quantitatum productum majorem habet proportionem: quod si igitur thermometrum liquido volatili perfusum magis refrigeratur, quam si in liquidum ipsum immergeretur, id ex eo non fit, quod in primo casu liquidum evaporans immediate thermometrum contingat, sed ex eo, quod superficies evaporans ad massam refrigerandam majorem habet proportionem, eodem modo, quo vidimus, thermometrum acido *concentrato* madefactum magis calefieri, quam si in hujusmodi liquidum patulo vase contentum immergatur (3). Hinc thermometrum liquore volatili madefactum ex ipsius evaporatione eo magis refrigeratur, quo bulla minor est (*m*), cum eo major sit proportio superficiei ad massam, quo magis bulla imminuitur.

8. Quod si evaporatio calorem minuit, eo magis minuat necesse est, quo major eadem existit, cumque major existat in majori calore, inde conficitur eo magis corpora ex evaporatione refrigerari, quo calidiora sunt, atque adeo tempus, quo volatilia corpora refrigerantur, non solum ex proportione superficiei ad massam, juxta generalem legem aesti-

(*m*) Cullen l. c. p. 99.

aestimandum esse, verum etiam ex evaporantis superficiei magnitudine. Et quidem ferventem aquam oleo tectam longe tardius refrigerari observavi, quam si caeteris paribus nuda, & aëri aperto exposita relinqueretur, quando intra $\frac{2}{3}$ circiter temporis ad eumdem gradum perveniebat, evaporatione refrigerationem adjuvante. Inde vero ratio repeti posse videtur experimenti a Borrichio olim propositi (*n*), quod nempe, si vasa alia aliis inclusa aquam contineant, dum exterioris vasis aqua ebullit, aqua in vasis caeteris ab ebullitionis calore eo magis absit, quo vasa interiora sunt. Et sane instituto experimento, duorum, triumve caloris graduum differentiam, pro vasorum varia crassitie, & materie, inter unius & proxime inclusi vasis aquam thermometrum ostendit: hac arte posset quilibet caloris gradus ebullientis aquae calore minor constanter servari.

9. In vacuo, ut diximus, Cl. Cullen ex evaporatione majus frigus produci observavit (*n*), ut tamen adverterit frigus, atque adeo evaporationem cessare, quando bullae e liquore evaporante prodire desierunt (*o*); quid simile ab Hombergio fuerat observatum; liquores nempe volatiles principio in vacuo, quamdiu bullae prodirent, longe majorem jacturam ponderis facere, quam deinceps, bullis jam desinentibus, qui propterea suspicatus est, evaporationem, quae in vacuo fit, prodeuntibus aëreis bullis tribuendam esse (*p*), & huc confugiunt, qui evaporationem ab aëre repetunt (*q*). Verumtamen evaporationem cessare non quod bullae aëreae deficiant, sed quod spatium vaporibus jam refer-

(*n*) Acta Hafniensia anni 1671. 1672. observ. 73.

(*o*) Recher. p. 105. Frigus vero ex evaporatione spiritus salis ammoniaci in vacuo tantum fuisse, ut vasi circumposita aqua in glaciem converteretur.

(*p*) Acad. des Sciences 1697. p. 295. ad 298. Sed eas bullas in plerisque volatilibus liquoribus ex aëre non esse infra constabit §. 20. not. 9.

(*q*) In rarefacto aere liquida minus evaporare, in vacuo nihil, aut fere nihil Physici plerique ante Cullen docebant.

refertum, & saturatum sit, sub clauso recipiente aëris pleno institutum experimentum demonstravit. Etenim sub hoc etiam frigus ex evaporatione spiritus volatilis paullatim producebatur, ut immersi thermometri liquor sensim subsideret, qui tamen, postquam ad summam depressionem pervenerat, pedetentim ad temperaturam resiliebat: neque defectu volatilium partium thermometri liquorem resiliisse constitit; nam, sublato recipiente, ex restaurata evaporatione iterum deprimebatur. Frigus vero productum sub eo clauso recipiente aëris pleno, caeteris paribus, eo minus erat, minusve diuturnum, quo recipientis amplitudo minor erat, adeout liquida etiam maxime volatilia, sicut spiritus volatilis salis ammoniaci calce paratus, sub angusto recipiente, ex evaporatione sensibiliter non refrigescerent; ex quo confirmatur frigus illud evaporationi deberi, & demonstratur evaporationem in clauso spatio, sive vacuo, sive aëris pleno tunc demum cessare, quando recipientis capacitas vaporibus referta est, &, ut ita dicam, saturata.

10. In rariori quidem aëre, caeteris paribus, ut frigus multo majus est, ita longe citius cessat, promptiusque thermometri liquor ad externam temperaturam revertitur, quam in densiori, ita ut tempus, quo frigus ex evaporatione perdurat, eo majus sit, quo densitas aëris major est; immo & majori proportione crescat, quam densitas aëris, quantum quidem per experimenta videre licuit hactenus minus accurata. Cum enim in his experimentis spiritu volatili salis ammoniaci uterer, cujus volatilitas, prout subtiliores partes avolant, minor evadit, propterea frigus non solum ex retardata ab ambientibus vaporibus evaporatione, sed etiam ex defectu volatiliorum partium minuebatur. Maxime autem consentaneum esset ope liquoris uniformiter evaporabilis legem eam investigare, ac definire, juxta quam pro varia aëris densitate frigus minus est, ma-

gisque

gisque diuturnum. Interim ex iis, quae attulimus, confici videtur, prout aër densior est, evaporationi magis resistere, eamque resistentiam, caeteris paribus, in majori proportione crescere, quam aëris densitatem: hinc & frigus pari ratione minus produci, & in dato recipiente magis diuturnum, quod tardius prodeuntes vapores, tardius etiam tanta copia colligantur, ut erupturos novos vapores cohibere possint.

11. Quoniam vero spatium datum sive vacuum, sive aëre plenum, prout vaporibus refertum, sensim novis recipiendis minus aptum efficitur, ut tandem evaporatio omnino cohibeatur, inde intelligitur, cur humida tempestate, humida corpora aëri exposita ex humoris evaporatione minus quam sicca tempestate refrigerentur (*r*); cur ex vento, qui continue aërem circum corpora evaporantia renovat & evaporatio (*s*), & frigus ex evaporatione (*t*) augeantur; cur humida corpora, aëre continue circa ipsa ex arte renovato, haud tardius fere, quam ex admoti ignis calore exsiccentur (*u*); cur tandem aqua dissoluto sale saturata in vacuo spatio non concrescat in crystallos (*v*) nec etiam aqua fortis in lixivium salis tartari immissa (*x*). Etenim non ob defectum aëris, qui ad nitri constitutionem requiratur, crystallisationem deficere (*y*), vel ex eo demonstratur, quod mixtura aquae fortis, & salis tartari aërem non absorbet, sed magna copia producit (*z*); contra vero defectu evaporationis crystallisationem fieri non posse, probat experimentum

(*r*) Notante MERAN, & RICHMAN. Vid. Recher. p. 93. 86. §. 9. p. 96. §. 15.
(*s*) MUSSCHEM. essai §. 962.
(*t*) MERAN apud ROUX exp. 1. p. 93.
(*u*) DESAGULIER tom. 2. p. 370. 371.
(*v*) " Ex eo, quod vapores nulli e vacuo recipiente elabi queunt. " BOYLE Exper. Physico-Mech. continuat. II. art. XI. exp. 2. p. 390.
(*x*) Idem. Tentamen circa partes nitri. Sect. XXIX. pag. 778.
(*y*) Ut HALESIUS *Statique des Végétaux* exp. 74. p. 162.
(*z*) BOYLE contin. II. art. XI. exp. 5. p. 390.

mentum aliud, in quo cum loco lixivii salis tartari, sal tartari siccum cum aqua forti admisceretur, verum inde nitrum, vel in ipso vacuo paratum est (&). Hic enim cum sal tartari, non aqua solutum, sed siccum esset, humidi evaporatio necessaria non erat, ut inde natum nitrum a modico diluente liquore secedere posset: acidum quippe nitrosum ex alkali admixtione in nitrum conversum jam minori quantitate ab eadem aquae copia dissolutum servari potest; ut nitri specie magna ex parte e liquore secerni debeat, & ad altera, ac fundum vasis deponi.

12. Ex eo porro, quod aër erumpentibus vaporibus resistat facile patet aërem, & vapores difficulter secum invicem admisceri, atque intelligitur, cur gutta aquae intra phialam vi ignis in vapores resoluta fere omnem aërem ex phiala expellat, & vicissim irruens in vacuum aër dispersos vapores contra recipientis parietes cogat (*a*); atque conficitur evaporationem non ab aëre, sed a causa alia, verosimiliter a solo calore liquores expandente repetendam esse.

13. Etsi vero perspicuis adeo experimentis evictum sit evaporationem ab aëre non pendere, prostant tamen experimenta alia, quae demonstrare videntur vapores, in primis aquosos, vi aëris sustineri: dum enim vacuum paratur vapores hujusmodi aquosi per recipientis parietes in levis nebulae speciem conspiciuntur (*b*), & ab iisdem recipientis parietes obnubilantur (*c*): hinc Hombergius licet aquam in vacuo celerius evaporare, quam in pleno recipiente ex humida terra, quae intra datum tempus in vacuo magis dehiscit, collegisset: putavit tamen in aëre altius vapores elevatum

(&) Idem loc. ult. cit. tum in tentamine circa partes nitri sect. XXX.
(*a*) Hales l. c. p. 253.
(*b*) Etiam absque usu humidae pellis. Nollet *Lezioni di Fisica lez.* 10. *esp. I. tom.* 3. *p.* 140. 141. *lez. II. sez.* 2. *esp.* 3. *p.* 261.
(*c*) Boerhaave Chemia tom. 1. p. 247. 248.

vatum iri, quam in vacuo (*d*). Equidem vapores aquosi in definito caloris gradu certae densitatis esse videntur, propter quam in fluido plus, minusve denso vel eleventur, vel in infimum locum descendant (*e*): sed illa aquae, aut aliorum fluidorum in vapores rarefactio, & expansio, tum vaporum in aquam condensatio ab aëris praesentia, aut defectu non pendet. Quod si vapores dum fit vacuum ab aëre secedunt, id non propter defectum sustentaculi evenire videtur, sed quod vapores minus, quam aër se dilatare conentur, hinc & minus dilatentur, & aërem deserant (*f*), nisi *quatenus* cum ipso intime admixti, aut adhaerescentes ab eodem se expandente ex parte simul abripiuntur. Vapores autem aquosos in mediocri etiam caloris gradu parum elasticos esse, adeoque exiguum ad expansionem nisum exercere HUGHENII, & PAPINI experimento constat, in quo vapores aquae in vacuo etiam ebullientis, mercurium in appenso syphone sensibiliter elevare non potuerunt (*g*).

14. Vaporum vero praesentiam in vacuo boyleano alio insuper experimento exploravi: scilicet in phialam angusti colli oleum vitrioli *concentratum* infudi; atque ad latus phialae vitrum cylindricum apposui, in cujus cavum aptati thermometri bulla pendebat: haec prompte recipiente pneumatico cooperui, tum parato vacuo, omnia in eodem situ per horam servavi, tandem ope consueti machinamenti

oleum

(*d*) Mémoires de l'Académie des Sciences 1693. p. 321. 322.

(*e*) Hinc fumus in recipiente etiam aëre pleno, dum refrigeratur paullatim subsidet, & ad infimam recipientis partem colligitur (BOYLE Physico-Mech. exp. 30. p. 68. 69.) qui non in pleno tantum (Idem l. c.) sed etiam in vacuo (MUSSCHEM. in Cementinos p. 39. n. 9.) admoto calore iterum expanditur: & liquoris, qui magnam partem ex metallis constabat, fumus, cum in aëre elevaretur, in vacuo infimam recipientis partem occupabat (BOYLE l. c. exp, 29. p. 67.) quod significat eum fumum aëris pressione elevatum fuisse.

(*f*) Ita NOLLET loc. cit. p. 140. 263.

(*g*) Transact. anni 167 $\frac{5}{6}$ n. 122. art. 4.

oleum ex phiala in appositum vas cylindricum effudi, & paullatim thermometrum, cujus bulla jam in oleum vitrioli demersa erat a 16.° ad 21.° reaumur. scal. calefactum est, in eoque calore per insigne temporis intervallum perseveravit. In eo experimento pellibus pingui materia illinitis, non aqua madidis usus sum, ut recipiens cum lance pneumatica aptaretur. Ex quo jam patet vapores aquosos etiam in recipiente jam per horam aëre vacuo adhuc superstites esse, cum oleum vitrioli diu, multumque fuerit calefactum, cujus incalescentiam nonnisi ab attractis aquosis vaporibus repetendum esse superius demonstravimus (3), hiucque confirmatur vapores aquosos aëris sustentaculo nequaquam indigere.

15. At qui fit, ut vapores, qui ex admixto oleo vitrioli cum sale ammoniaco in aëre calidi erumpunt, quorumque calorem humidis vaporibus, quibus admiscentur; adscribendum esse demonstravimus (4), in vacuo, teste MUSSCHEMBROEKIO, vix ullum calorem ostendant (*h*)? An non inde evincitur vapores aquosos in vacuo vix ullos superesse, ex quorum miscela salis ammoniaci erumpens acidum incalescere possit? Juvabit ipsum MUSSCHEMBROEKII experimentum perpendere, quo accuratius ex eodem judicium fieri queat. Porro laudatus Auctor drach. iij. olei vitrioli per horam sub vacuo recipiente reliquit, priusquam in salis ammoniaci drach. j. effunderet, forte ut ad eamdem cum ambiente caloris temperaturam exigerentur: postea affuso in salem oleo vitrioli, vidit expositum vaporibus thermometrum nonnisi 3.° fahrenh. scal. incaluisse, & quidem tarde, effervescentia scilicet jam desinente. Thermometrum vero miscelae immissum, primo 21.° ejusdem scalae refri-

(*h*) MUSSCHEMB. in Ciment. p. 210. §. 230. 231. Calidos non esse hujusmodi vapores in vacuo ex MUSSCHEMBROEK Cl. LA RATTE Encyclop. tom. 7. art. *froid* p. 319.

frigeratum fuisse, postea, finita effervescentia, 7.° incaluisse; cum contra, ex pari olei vitrioli dosi in duplam salis ammoniaci dosim in aperto aëre immissa, thermometrum in ipsam immersum 12.° refrigeraretur; expositum autem vaporibus thermometrum 10.° incalesceret. Quae quidem ostendunt, in vacuo, ut minus calidi halitus fuerunt, ita frigidiorem effervescentiam fuisse quam in aperto aëre. Quod si consideremus oleum vitrioli, prout dilutius est, frigidiorem quidem effervescentiam cum ammoniaco sale producere, sed quae halitus pari ratione minus calidos emittat (6), pronum est conjicere, oleum, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo cum sale ammoniaco commiscuit, dilutius fuisse, quam illud, quod idem experimentum in aëre tentans adhibuerat: cur autem id oleum dilutius evaserit facile est divinare, nam cum in vacuo per horam in aperta ampulla fuisset relictum, ex absorpto humido sub vacuum recipiens diffuso dilui facile potuit (§. praeced.) maxime si recipiens amplum (*i*), tempestas humida, ampla phialae apertura, tum si humidas pelles ad recipiens cum lance aptandum adhibuerit, e quibus novi vapores humidi assidue prodire, & in eorum, qui ab oleo absorbebantur, locum succedere possent (*l*).

16. Hae me animadversiones admonuerunt, ut idem experimentum paullo aliter repeterem. Drach. iij. olei vitrioli admodum *concentrati* in phialam angusti colli infundebam, & drach. j. salis ammoniaci immittebam in vas vitreum cylindricum, quod thermometro duplo instructum erat, depressio-

(*i*) Duae aut tres mensurae *chopines* aëris semper tantum aquae continent, ut inde drach. j. salis tartari sensibiliter humescat, & pondere augeatur (NOLLET *lez. tom.* 3. *p.* 140.) Recipiens vero MUSSCHEMBROECKII amplitudinem habebat 284. pollic. rhen. pag. 211.

(*l*) Effervescentia ex oleo vitrioli cum sale ammoniaco in vacuo mixtis minor, quando ante miscelam diu in vacuo morabantur. BOYLE contin. II. art. XII. pag. 398. 399.

preſſiore altero, ut in miſcelam demergi poſſet, altero elatiore, ut miſcelae vaporibus expoſitum eſſet: prompte haec omnia excipulo pneumatico obtegebam, cujus limbus ad lancem per interjectas pelles pinguedine oblinitas aptabatur; tum cito, intra 2′ ſcilicet parato vacuo, in eodem ſitu relinquebam, donec hora integra lapſa eſſet: ſolito dein machinamento phialam invertebam, ut oleum vitrioli in ſalem ammoniacum effunderem. Poſtea idem omnino experimentum repetebam, cum hoc ſolo diſcrimine, ut prius aërem in recipiens admitterem, quam miſcela perficeretur. In utroque caſu eumdem omnino caloris gradum vapores oſtenderunt, qui aeque diuturnus, eadem lege, aequalibus intervallis aeque auctus, aut imminutus eſt, ita ut in utroque experimento thermometrum iiſdem expoſitum 6′ aut 7′ a peracta mixtione maximum calorem, 10.° ſcilicet in ſcala reaumuriana praeſeferret, & poſt ſemihoram adhuc 4.° hujuſmodi calorem retineret (*m*). Frigus miſcelae fere idem fuit in utroque experimento, 3.° ſcilicet in vacuo, 2.° in recipiente aëris pleno: in utroque autem, finita efferveſcentia, thermometrum in miſcelam immerſum, non modo ad temperaturam ambientis revertebatur, ſed 3.° 4.°^{re} ſupra illam incaleſcere pergebat; adeout dum thermometrum alterum vaporibus expoſitum refrigeraretur, alterum quod in miſcelam immerſum erat contra calefieret. Inde itaque evidens fit ſalis ammoniaci vapores etiam in vacuo calorem oſtendere, & propterea humidos vapores, etiam horam unam poſtquam aër ſubductus eſt, per id vacuum recipiens diffuſos remanere; variumque a Musschembroekio obſervatum experimenti eventum veroſimiliter vaporibus aquoſis tribuendum eſſe, quos, dum oleum vitrioli moraretur in vacuo recipiente, ante mixtionem hauſerat, quibuſque fuerat dilutum.

17. Cum

(*m*) Experimentum inſtitutum eſt hyemali tempeſtate, die ſerena, ac ſicca, mercurio in barometro maximam altitudinem habente.

17. Cum porro finita effervescentia mixtura incalesceret, quando thermometri vaporibus expositi calor jam evanuerat, patet inde thermometri vaporibus expositi calorem in MUSSCHEMBROEKII experimento a miscela incalescente communicatum non fuisse, ut HALESIUS suspicatur (*n*): praeterea vero in eo ipso MUSSCHEMBROEKII experimento thermometrum vaporibus expositum a 67.° ad 69.° fahren. scal. jam incaluerat, quando miscela ad 58.° frigida adhuc erat (*o*); propterea illius thermometri calor a miscela communicari non potuit, quae non modo nondum incaluerat, verum 9.° adhuc ambiente frigidior erat. Facile autem est caloris, quem miscela post finitam effervescentiam concipit, causam reperire, si consideremus duas partes salis ammoniaci requiri, ut una pars olei vitrioli saturetur (*p*); propterea tum in nostris experimentis, tum in experimento, quod MUSSCHEMBROEKIUS in vacuo instituit, in quibus drach. iij. olei vitrioli cum drach. j. salis ammoniaci commixtae sunt, longe minorem fuisse salis ammoniaci dosim, quam saturando oleo vitrioli requireretur: hinc portionem olei vitrioli in his experimentis in salem ammoniacum secretum GLAUBERI conversam quidem fuisse, quod cum ambiente humido incalescere amplius non potest; portionem autem liberam superstitem fuisse, quae, attracto ambiente humido, non secus ac §. 14, &, cessante frigore a salis ammoniaci solutione producto, novum calorem ostenderet. Hinc mirum non est si hujusmodi frigida effervescentia, adjecta aqua, in calidam mutetur (*q*). Cum vero in aëre MUSSCHEMBROEKIUS duplam salis ammoniaci dosim cum pari olei vitrioli

(*n*) Statique des Végétaux appendice p. 566. n. 78.
(*o*) Vide MUSSCHEM. l. c.
(*p*) POTT Académie de Berlin. 1752. p. 60.
(*q*) Cimentini p. 184. SLARE in transact. philosoph. n. 150. art. 4. exp. 7. GEOFROY l. c. p. 121.

vitrioli quantitate miſcuerit, inde minor olei vitrioli quantitas poſt finitam effervеſcentiam libera ſupereſſe potuit, minoremque calorem praebere, cujus forte ideo non meminit Cl. Auctor (*r*). Jam vero majori poſita in vacuo, & celeriori evaporatione (9. 10.) phoenomena explicantur hactenus obſcura: cur ad exemplum aqua fortis, cui vini ſpiritus admiſceatur, ferrum cum ebullitione in vacuo ſolvat, & interea in aëre nihil ſimile praeſtet (*ſ*); namque vis aquae fortis in ferrum, admixto vini ſpiritu, infringitur (*t*): itaque in vacuo, eodem citius diſſipato, majorem in ferrum efficaciam aqua fortis citius recuperat, dum quae in aëre eſt ex ipſius admixtione impeditur, quominus ſimilem actionem in ferrum exerceat. Caeterum, quoniam vini ſpiritus, qui, admixta aqua forti, vix ullas bullas in vacuo emittit (*u*), celerius tamen ibidem evaneſcit; confirmatur inde, quod ſuperius jam probavimus (9), celeriorem in vacuo evaporationem erumpentibus aëreis bullis tribuendam non eſſe. Forte autem ex ſimilibus cauſis, quod nempe acida, dum vacuum paratur, attracto ambientis humido diluantur (15. 16), tum quod menſtrua alia volatiles nonnullas partes amittant diverſa phoenomena aliarum etiam ſolutionum, quae in vacuo, & aëre fiunt, repetenda ſunt.

18. Fluida alia prae aliis majorem caloris gradum inter ebulliendum acquirere Phyſici obſervarunt, eumque nec denſitati, nec oleoſitati, nec partium tenuitati reſpondere (*v*), ſed varium eſſe, prout liquida plus, minuſve eſſent volatilia (*y*). Revera ſi advertere lubeat, oleum olivarum calorem

(*r*) Etiam in aperto aëre thermometrum primo frigefactum ſub finem nonnihil calefieri obſervaverat Geofroy l. c. p. 114.

(*ſ*) Boyle Phyſico-Mech. contin. II. art. XI. exp. 13. Papin, & Hughens tranſact. phil. 1675. n. 119. art. I.

(*t*) Boyle experimenta, & notae circa corroſibil. orig. exp. II. p. 378. 379.

(*u*) Papin, & Hughens l. c.

(*v*) Boerhaave Chem. tom. 1. p. 93. 94. 398.

(*y*) Desagulier tom. 2. pag. 212.

lorem ſummum recipere antequam ebulliat, 600.° ſcilicet ſcalae fahrenheitianae (ζ), olea ſtillatitia 560.°, &, diſſipatis tenuioribus partibus, majorem (&), aquam 212.°, vini ſpiritum 175.° (a), ac demum ſpiritum volatilem ſalis ammoniaci calce paratum 150.° (b); & frigoris gradum ab iiſdem fluidis in CULLEN experimentis productum eodem ordine majorem fuiſſe (c), inde confirmabitur, tum varium ebullientium liquidorum calorem, tum varium frigus ab iis liquidis in memoratis experimentis productum a vario fixitatis, aut volatilitatis gradu dependere; proindeque liquida, tum demum ebullire, quando majorem caloris gradum acquirere non poſſunt (d), quando nempe evaporatio eorumdem ex aucto calore ea lege augetur, ut tantum caloris diſſipet, quantum adjicitur. Hinc eſt ut in machina papiniana, coërcitis vaporibus, in indefinitum calefieri poſſint (e).

19. Jam vero, quoniam evaporatio aëre cohibetur, eoque magis, quo denſior eſt, in vacuo liberior evadit (9); inde intelligitur, cur liquorum ebullientium calor eo major ſit (f), quo mercurius in barometro altior (g), in vacuo mi-

(ζ) Vere numquam ebullit; nam ex ſuppoſito igne calefieri pergit donec accendatur. MARTINE *Diſſertation IV. ſur la chaleur art. VIII. p.* 235. 236. 237.

(&) MARTINE l. c. BOERHAAVE l. c. p. 397.

(a) MARTINE p. 232. BOERHAAVE p. 396. de alcohole.

(b) Ut inſtituto experimento comperi.

(c) Recherches p. 99. 100.

(d) AMONTON, & FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 92.

(e) Caloris gradus 36. ultra conſuetum aquam recipere (BOERHAAVIUS l. c. p. 91.) ferrumen ex ſtamno, & plumbo calore aquae liquefactum in ea machina vidit DESAGULIER (tom. 2. p. 412.) ſtamnum, & plumbum intra aquam poſita NOLLETIUS (lez. tom. 4. p. 85.), aut etiam in media aqua per fila aenea ſuſpenſa MUSSCHEMB. (*eſſai* §. 879.)

(f) " Atmoſphaerae incumbentis pondus vapores deprimit, impeditque quo„ minus aqua ebulliat, donec calorem contraxerit multo majorem, „ quam quo ad ejuſdem in vacuo ebullitionem excitandam opus ſit. „ NEWTON quaeſt. XI. poſt opticam p. 140. ſimilia DESAGUL. tom. 2. p. 212. aliique.

(g) BOERH. l. c. p. 92. 93. MARTINE l. c. diſſert. I. §. 9.

minimus habeatur (*h*). Sunt quidem nonnulli, qui ut evaporationem in vacuo (9), sic celeriorem ebullitionem aëri erumpenti tribuunt: verumtamen intestinus motus, qui ex ebullitione est, non confundendus cum eo, qui ab erumpente aëre producitur: etsi enim bullas aëreis similes ebullitio excitet, undas tamen nullas facit, quemadmodum aër, qui e liquidis per exantlationem educitur (*i*); praeterea erumpens aër non impedit, quominus liquida majorem calorem acquirere possint (*k*); at liquida etiam in vacuo ebullientia ulterius calefieri nequeunt (*l*), & generatim eo majorem calorem adipisci possunt, quo majus est incumbentis atmosphaerae pondus (*m*), in montibus minorem recipiunt (*n*); demum ebullitio in vacuo etiam promtior, tardiorve est, prout liquida plus, vel minus volatilia (*o*); hincque fit, ut liquida quaedam in vacuo ex ingenti calore non

(*h*) Aquam in vacuo gr. 96. scalae fahrenheitianae ebullire. BOERHAAVE l. c. MUSSCHEM. §. 879. Vid. inf. not. 9.

(*i*) MUSSCHEMB. §. 879.

(*k*) Vide supra notam *h*. Eatenus tamen majorem calorem acquirunt, quatenus in vacuo vase clauso collecti vapores ebullitionem cohibent, ut cohibent evaporationem (§. 9.); hinc alterna ebullitio aquae in vacuo, alterne erumpentibus, iterumque condensatis vaporibus; hinc immisso in frigidam recipiente, ut vapores condensentur ebullitio vehementior evadit (HUGHENS, & PAPIN transact. n. 122. art. IV.) continuato emboli motu diuturnior (BOYLE exper. Physico-Mech. exp. 43.)

(*l*) Sic in aperto aëre prodire incipiunt ex aqua aëreae bullae calore gr. 150. fahrenheit. (Acad. de Berlin 1750. p. 69.), pergit adeo calefieri per gr. 72. In vacuo aër ex aqua prodit gr. 50. ejusdem scalae (MUSSCHEMB §. 881.) pergit adeo calefieri antequam ebulliat per gr. 46. forte ex observato motu hoc bullarum aërearum erumpentium factum est ut NOLLETIUS doceret aquam in vacuo gr. 60. fahrenheit ebullire (tom. 4. lez. 12. sez. 1. exp. 2. p. 31.)

(*m*) Vide supra notam *g*.

(*n*) Ex TURY, & MONNIER experimentis NOLLETIUS l. c. exp. 3. p. 35.

(*o*) Ita aqua, vinum, oleum terebintinae, si tepentia vacuo committantur vehementer adeo ebulliunt, ut per os vasis effundantur; contra oleum olivarum etiam maxime calidum, ad ebullitionem perduci non potest (BOYLE Physico-Mech. exp. 43. p. 117. 118.); spiritus vini in vacuo citius, quam aqua ebullit (PAPIN, & HUGHENS transact. n. 122. art. IV.), non sic aqua fortis, aut vini spiritus, cui aqua fortis admista fuit (idem transact. n. 119. art. 1.)

non ebulliant; etsi copiosum aërem emittant (*p*), dum liquida alia parum, nihilve aëris continentia, & aqua etiam, quae praecedente ebullitione aëre repurgata est (*q*) exiguo calore ad ebulliendum adigitur.

10. Porro quaesitum est, cur corpora aliqua solida tardius in vacuo, quam in aëre; fluida contra quaedam, ut aqua tardius in aëre, quam in vacuo refrigerentur (*r*). Ejus vero quaestionis solutio ex praecedentibus perspicua est; scilicet solidorum, fixorumque corporum refrigeratio, quae ex aequabili tantummodo caloris diffusione dependet, in vacuo minor est; liquidorum autem refrigeratio, cum non tantum ex aequabili caloris diffusione, verum etiam ex evaporatione proveniat (8), evaporatio autem in vacuo augeatur (9), idcirco in vacuo refrigeratio celerior, quae ex evaporatione nascitur tarditatem alterius, quae ex aequabili diffusione caloris oritur compensare non modo poterit,

(*p*) Ut oleum olivarum, quod forte præ omnibus liquidis copiosissimum aërem continere BOYLEUS testatur (l. c. exp. 24.) & tamen ex ingenti calore in vacuo non ebullit, ut dictum in nota superiore.

(*q*) De aqua aëre per ebullitionem repurgata BOYLE (l. c. exp. 43.) de spiritu vini PAPIN (l. c.); de spritu volatili salis ammoniaci CULLEN (l. c. p. 106.); etsi vini spiritus parum aëris contineat (HALES l. c. exp. 66.); spiritus volatilis, tum aqua, quae ebullit nihil penitus (BOER. l. c. p. 273.). Praeterea aqua etiam nativa vix $\frac{1}{54}$ volum aëris continet (HALES l. c.), hinc in vacuo ebulliens mercurium in apposito syphone sensibiliter non deprimit (HUGHENS transact. n. 122. art. IV.); ex quibus constat bullas, quas e vini spiritu, & spiritu volatili in vacuo prodeuntes vidit Cl. CULLEN (9) magnam partem ex aëre non fuisse, sed ex liquore ipso vi ignis, aut caloris expanso (confer. MUSSCHEM. §. 987. n. 3.) ut enim hi liquores in aëre citissime ebulliunt (§. praeced.) ita verisimile est in vacuo solo ambientis calore, nisi perfrigidum sit, ad ebullitionem adigi, quae tamdiu duret, donec collectis vaporibus coërceatur (vid. not. *k*.)

(*r*) Aquam calidam celerius in vacuo refrigerari SGRAVESAND §. 2521. GALEATIUS Com. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 314. Caeteris paribus virgam pyrometri paullo tardius contrahi sub vacuo recipiente, quam sub eodem aëre pleno MUSSCHEMB. in Ciment. p. 137. 138. Hinc quaestionem proposuit. *Essai* §. 959. *Pourquoi l'eau se refroit-elle plus vite dans le vuide tandis que le fer y reste plus long-tems chaud qu'en plein air?*

terit, verum etiam superare. Enim vero cum intra sphaeram vitream thermometri mercurialis bullam inclusissem, ut sphaerae centrum teneret, per tubulum, qui ad latus sphaerae erigebatur eamdem aëre evacuavi, dein in ebullientem aquam immisi, ut aequabiliter calefieret, tandem, mercurio ad 70.° scalae reaumurianae existente, in aquam eamdem cum aëre caloris temperaturam habentem, 10.° scilicet supra o immersi: mercurius ad 20.° descendit tempore 14′ $\frac{1}{4}$. Eodem experimento repetito cum hoc solo discrimine, quod aër in sphaeram admissus fuisset, tempus refrigerationis fuit 9′ $\frac{1}{2}$ circiter (*f*). Ex quo patet mercurium, quo thermometrum conficitur, secus ac aquam tardius in vacuo, quam in aëre refrigerari, tum quod magis fixus est, tum quod in vitro thermometrico clausus, si vel maxime volatilis esset evaporare non posset: hincque verosimile fluida etiam alia, vel fixa, ut oleum expressum, vel etiam volatilia, dummodo vasis coërcita evaporare non possint, adinstar solidorum corporum, tardius in vacuo, quam in aëre frigefactum iri.

21. Quoniam refrigerationis ex evaporatione ratio in eo sita videtur, quod celerius liquorum volatilium calor per vapores dissipetur, quam ab ambientium corporum calore ejusdem jactura reparari possit (8): libuit investigare quaenam corpora calori transmittendo aptiora essent, quod non solum huic quaestioni illustrandae, verum etiam ipsius caloris theoriae perficiendae aptum videbatur. Itaque cum aequalia olei olivarum, alcoholis, aquae, ac mercurii volumina in pocula terrea aequalia, & similia infudissem, & ad eumdem cum ambiente caloris gradum componi sivissem, qui

(*f*) Simile experimentum Newtonus memorat, in quo duo thermometra paria paribus cylindris vitreis cavis, altero vacuo, altero aëre pleno includebantur, aitque in vacuo cylindro nihilominus, neque fere tardius thermometrum incalescere, quam in aëre pleno, si e frigido in calidum cubiculum ambo deferantur. Quaest. XVIII. post Opticam p. 142.

qui eo tempore 10.° supra 0 scalae reaumur. erat ; thermometrum mercuriale ad 70.° ejus scalae calefactum successive in singula haec liquida immisi, atque observavi tempus, quo a 70.° ad 20.° mercurius descendebat, in aperto aëre fuisse 10′ & 20″; in oleo olivarum fuisse 99″, vel 100″; in alcohole 44″; in aqua 25″; in mercurio 11″: repetitum experimentum vix 1″, aut 2″ varietatem obtulit (t). Aequae cito etiam refrigerabatur thermometrum in oleo olivarum sive nudo, sive tenui alcoholis strato obtecto: fuerunt adeo tempora refrigerationis in aëre, oleo olivarum, alcohole, aqua, mercurio fere uti numeri 224; 20, 9, 5, 2. Ex quibus primo patet permeabilitatem horum liquidorum a calore non esse in ratione volatilitatis, aut densitatis eorumdem: patet deinde eam fere legem obtinere, ut corpora, prout magis pinguia, calori deferendo minus apta evadant, ut aqua calorem citius deferat, quam liquida inflammabilia, ut demum mercurius etiam citius aqua eumdem transmittat; quae novam, eamque magni momenti caloris proprietatem electrico fluido communem patefaciunt: quod nimirum corpora, prout igni electrico deferendo aptiora, eadem aptiora quoque sint deferendo calori. Una hactenus exceptio tantum se offert, quam §. superiore indicavimus; corpora nimirum in vacuo tardius calorem amittere, cum electricitatem citius disperdant. Interim ex dictis intelligitur, cur lana, pili, & similia corpo-

ribus

(1) Martine l. c. p. 112. 113. Corpora in aëre nonnisi octuplo tardius refrigerari, quam in aqua, in mercurio nonnisi 2″ celerius pro singulis minutis quam in aqua; sed Vir Cl. & minus calefecit thermometrum, & fere usque ad ambientis temperaturam refrigerandum reliquit: ego & magis calefeci, & temporis tantum rationem habui, quo mercurius ad gr. 10. supra temperaturam perveniebat: hinc discrimen obtinui magis perspicuum; eodem modo, quo discrimen inter permeabilitatem corporum metallicorum, & aquae respectu fluidi electrici, quod, quamdiu electricitas exigua est, vix percipi potest, satis perspicuum fit, quando vehementior adhibetur.

ribus circumposita eorum calorem diutius servent (*u*); cur similiter circumpositum gossipium frigus servet ex arte productum (*v*); cur glacies citius in aqua, tardius in oleo terebinthinae, tardius adhuc in oleo olivarum, tardissime in aëre dissolvatur (*y*): cum enim haec in glaciem non agant vi corrodente, manifestum est ipsam citius, tardiusve dissolvere, prout calori communicando plus, minusve apta sunt. Sed de pulcherrimo hoc argumento fusius alias, & ex proposito erit agendum.

22. Observavit laudatus Cl. CULLEN liquorem in thermometro sub excipulo pneumatico suspenso, educto aëre, 2.° aut 3.° deprimi; postea in ipso vacuo ad temperaturam restitui; admisso demum aëre 2.° adhuc, aut 3.° elevari (*z*). Hujusmodi porro phoenomenon nihil cum prioribus commune habet, ut quisque facile intelligit: neque enim ulla ratio est, propter quam irruens in vacuum aëris unda thermometrum calefaciat, intereadum lenis ejusdem motus dum subducitur frigus inducat. Ad descensum quidem quod spectat, jam observatum a Cl. GALEATIO liquorem in thermometris, subducto aëre, nonnihil deprimi, ejusque phoenomeni causam hanc esse opinatus est, quod aër ex omni parte vitro incumbens ipsum constringat nonnihil, qua constrictione sublata vitrum relaxetur, eoque fiat, ut inclusus liquor deprimatur (&). Hanc Cl. Viri sententiam experimentis consentaneam deprehendi; perinde enim liquorem thermometri aëre vacui deprimi observavi, quando, aperto superius tubo, aditus concedebatur externo aëri, ut liquorem comprimeret, & cum aëre externam vitri superficiem premente ad aequilibrium componeretur. Cum enim thermometri liquor incom-

(*u*) MUSSCH. Essai tom. I. p. 474.
(*v*) FAHRENHEIT apud BOERH. l. c. p. 88.
(*y*) Ex BOYLIO ROUX l. c. p. 29. 30.
(*z*) Recher. p. 104.
(&) Comment. Bonon. tom. 2. part. 1. p. 318. 319.

compressibilis sit, omnis in hoc experimento observata depressio vitri dilatationi erit adscribenda. In apertis autem hoc pacto thermometris in vacuo recipiente constitutis liquor non deprimebatur, quod scilicet, facto vacuo, pressio ex interna, externaque vitri parte aeque tolleretur (*a*). Demum Boyleus in aperto etiam tubo ad ovale vitrum cavum connexo aquam $\frac{1}{4}$ digiti deprimi observavit, quando incluso sub excipulo pneumatico ovali vitro, & tubo per excipuli verticem prodeunte, subductoque demum aëre, pressio in ovalis vitri externam faciem minuebatur, & interea aër liquori incumbens in tubo ipsum contra internam vitri faciem premere pergebat: hinc, restituto aëre, ad priorem altitudinem liquor resiliebat (*b*). Ex quibus omnibus evincitur Cl. Galeatium veram propositi experimenti causam invenisse; sed cum etiam in vacuo, Cl. Cullen observante, ad pristinum locum thermometri liquor reverteretur, id indicio est calorem eo tempore nonnihil auctum fuisse; hincque factum est, ut, restituto aëre, tantumdem elevaretur supra eum locum liquor, quantum eodem educto subsederat.

(*a*) In apertis thermometris, extracto aëre, liquorem nonnihil ascendere, quod aër in liquoribus ipsis delitescens, aëris pressu sublato, se se exerat. Taberranus Comment. Bonon. l. c. p. 320.

(*b*) Exper. Physic. Mech. exp. 39. p. 47.

EJUSDEM.

De caussa extinctionis flammae, & animalium in aëre interclusorum.

IN superiore Tomo argumenta protulimus, quibus demonstraremus ignem, & flammam in intercluso aëre nec propter erumpentes fumos, nec propter imminutam ab iisdem aëris elasticitatem suffocari (*a*), quin & probabili conjectura ducti, ne alios quidem vapores suffocationis caussam esse putavimus, sed potius quod aër a flammae calore perverteretur. Cum vero ab animalibus vitiatus aër flammam repente extinguat, hinc utrumque phoenomenon ab eadem caussa produci opinati sumus, quae gradu tantummodo discreparet: at postquam non minus a ranis calore propemodum destitutis, quam a caeteris animalibus aërem perverti observavimus de conjectura nostra dubitare coepimus, aliaque experimenta meditari, quibus proposita quaestio accuratius dirimi posset (*b*). Quum in hujusmodi experimentis instituendis versarer eorum nonnulla, quae antea protulimus, castiganda esse comperi, & ex consideratione eorum, quae in praecedenti dissertatione circa vapores dicta sunt, his multo plus memoratis in phoenomenis tribuendum esse cognovi: quapropter idem argumentum retractandum suscepi, eo quidem, ni fallor, successu, ut minus dubia, & minus indefinita in eam rem mihi videar prolaturus.

1. Relatum est in superiore tomo aërem, in quo flamma sponte fuerit extincta, ita perverti, ut immissam aliam subito suffocet etiam diu postquam fuerit vitiatus (*c*): idipsum

(*a*) In Commentariis p. 22. & seq.
(*b*) Ibid. a p. 48. ad 51.
(*c*) Ibid. p. 36. §. 38. Reaccensa candela in aëre, in quo mox suffocata est, tamdiu ac antea non perdurat (BOYLE nova exp. circa relat. inter aërem, &

idipſum in aëre ab animalium reſpiratione vitiato contingere ex Boyleo retulimus, qui aërem in quo animal ante quatuor horas interierat immiſſo alteri animali trium minutorum ſpatio mortem attuliſſe ſcribit (*d*). Hujuſmodi Boylei experimentum, quo animalia in eumdem aërem ſucceſſive immittuntur hunc in modum iterandum ſuſcepi. Campanam vitream ſexdecim circiter librarum aquae capacem ita ſuſpendi, ut tres tranſverſos digitos limbo ſuo in aquam ſubjecti vaſis demergeretur: ad internam, ſuperioremque campanae partem trochleam aptaveram, per quam funiculus trajiciebatur, cujus alteri extremo exigua cavea adnexa erat, dum extremum alterum per aquam ſub campanae limbum traductum ita ad manus erat, ut cavea per aquam elevari poſſet. Funiculus alter caveae fundo adnexus, ſimiliterque ſub campanae limbum traductus caveae deprimendae, & e recipiente per aquam educendae inſerviebat: eo pacto cavea cum incluſa avicula in aërem ſub recipiens poſitum per aquam induci, aut educi poterat, quin aër mutaretur, prohibente aqua, quae campanae limbum undique obtegebat. Rebus hunc in modum diſpoſitis carduelis primum caveâ incluſus per aquam in recipiens immiſſus eſt: avis primis duabus horis aërem abſorpſit, ut aquam uno circiter pollice ſupra libellum elevaret; poſtea vero tardius; tardiuſque hujus altitudinem adauxit; principio bene ſe habuit, dein conſuetas laeſae reſpirationis viciſſitudines paſſa eſt, quibus in fine horae quartae cum quadrante ſublata fuit. Hac educta carduelis alius eodem modo

& flam. vital. animal. tom. 3. p. 168.) ſub quintuplum tempus (Hales exp. 106. p. 201.) momento ipſo, quo in eum aërem immittitur, extinguitur (Helmont. *magnum oportet* p. 130. n. 59. Confer tom. praec. l. c. in not.); Aërem per flammam ex vini ſpiritus in vacuum trajectum immiſſam flammam confeſtim ſuffocare (Hauksbe's exper. phyſico-mech. tom. 1. art. XI.); aut trajectum per flammam carbonum (Desag. tom. II. p. 439.)

(*d*) Exper. phyſico-mechan. cont. II. art. V. exp. 11.

do in recipiens immissus est, qui statim magna, ac frequenti respiratione correptus duobus minutis interiit (*e*). Tertius carduelis unico minuto mortuus est; quartus demum paullo ultra semi-minutum vitam traxit. Posteriores aves, quae, aëre jam valde depravato, in recipiens immissae sunt vehementibus convulsionibus, vomitu, sopore occupabantur. Aqua post primas quatuor horas sensibiliter amplius non ascendit.

Post haec infusa exterius aqua est, sicque aër sub campana ita condensatus, ut aqua ad libellam restitueretur, tum carduelis alius in recipiens immissus: ne minutum quidem vixit, nec aëris elaterium amplius imminuit.

Ex quibus confirmatur aërem ab animalibus ita vitiari, ut immissa animalia alia citissime extinguat.

2. Neque solum flamma, & animalia in aëre ab alia flamma, aut animali vitiato suffocantur, sed ipsae quoque stirpes, ut ex aëris interclusione paullatim languent (*f*), sic citissime intereunt, si aër ille ab inclusis antea stirpibus fuerit vitiatus, & cum aëris elasticitatem infringant, similiter infringere desinunt, si aër, cum quo intercluduntur ab immissa antea stirpe elasticitatis jacturam jam fecerit (*g*).

3. Porro diuturnitas vitae animalium in aëre interclusorum, caeteris paribus, esse solet in ratione directa voluminis aëris, inversa numeri animalium, ut Cl. VERATTI observavit (*h*). Anomaliam tamen quamdam in ranis se deprehendisse testatur, quae sive plures, sive pauciores, aeque tamen cito interirent (*i*): Idemque animadvertit ne ulla quidem difficultate respirandi in iis angustiis ipsas labo-

(*e*) Bullae aliquot aëris, dum traduceretur cavea, per aquam in recipiens penetraverant.

(*f*) Confer Cl. HALLERUM in BOERH. tom. 2. par. 1. pag. 89. not. 38. elem. phys. tom. 3. p. 315. n. f. g.

(*g*) HALES Statiq. des Végétaux exp. 122. n. 7. p. 278. 279. 280.

(*h*) Com. Bon. t. 2. par. 2.

(*i*) Ibid. p. 275. 276.

laboraſſe (*k*), quamquam & aëris elaſticitatem infringant (*l*), & ex interclufione aëris, ut ipſe exiſtimat, inſtar aliorum animalium perimantur (*m*).

Equidem, ut alia praetermittam, ranas aërem vitiare, ex eo confirmari videtur, quod aërem flammae alendae imparem non minus reddant, quam caetera animalia (*n*); in vitiato autem aëre diutius vivere non poſſe, vel inde conſtat, quod artificiali aëre tam cito laedantur (*o*).

4. Cum itaque haec phoenomena quid miri, ac ſingularis praeſeferant, placuit eadem per experimenta perſequi: & *primum* libuit experiri, quantum reſpiratio ranis eſſet *neceſſaria*. De iis quidem legimus 10′ in vacuo torricelliano ipſas interire (*p*), in boyleano autem tribus horis ita torpeſcere, ut vitam recuperare adhuc poſſint (*q*), ſex autem (*r*), aut ad ſummum ſeptem horis (*ſ*) penitus extingui quamquam alias, aut horis duabus extinguerentur (*t*), aut ad horas viginti ſeptem, & ultra in ipſo boyleano vacuo languidam vitam producerent (*u*). Verumtamen dubium eſſe poteſt an ranae in vacuo defectu preſſionis, an reſpirationis intereant: idcirco quamdiu ſub aquis vivere poſſint explorandum ſuſcepi; & quoniam ad aquae ſuperficiem reſpirandi cauſſa identidem feruntur, propterea ipſas vinculis ſub aquis coëgi. Poſt horam unam jam mortuae videbantur, ut concuſſae hac illac cadaverum inſtar moverentur abſque ullo proprii motus indicio: cum vero ipſas attentius obſervarem

depre-

(*k*) P. 277.
(*l*) P. 276. (*m*) p. 274.
(*n*) Miſcel. tom. praeced. p. 48. §. 45.
(*o*) Boyl. phyſico mech. cont. II. art. V. exp. 4. 5. 7.
(*p*) Florentini p. 51. col. Acad.
(*q*) Boyl. nov. exp. pneum. tit. 2. exp. 1. & in tranſ. n. 62.
(*r*) Id. l. c. exp. 2.
(*ſ*) Id. l. c. exp. 5.
(*t*) Id. exp. phyſico-mech. cont. II. art. VI. exp. 7.
(*u*) Muſſch. in Ciment. p. 51. 52.

deprehendi, post octavum, aut decimum quodque minutum aliquot respirationis motus sub ipsis aquis edidisse, dein conatas fuisse, ut a vinculis sese expedirent, postremo mortuarum instar iterum jacuisse, donec post idem tempus eadem phoenomena recurrerent. Quinta ab immersione hora cum jam nullus hujusmodi motus appareret unam eduxi; cum vero postea adhuc in reliquis motum aliquem respirationis mihi videre visus sim cunctatus sum horam alteram, ut secundam ab aquis elicerem: septima demum elapsa hora cum jam motus nullus amplius cerneretur, quae sub aquis adhuc erant tres reliquas eduxi; singulas distinctis locis seposui, atque post horas aliquot priores duas, quae quinta, & sexta ab immersione hora eductae fuerant vitam recuperasse comperi; postremas autem tres, quae per septem horas sub aquis permanserant nec sponte, nec admoto calore, aut stimulis in vitam revocari amplius potuisse. Experimenta autem haec mense septembri, liquore in thermometro ad 15°. circiter supra o scalae reaumurianae existente, instituta sunt, quod utique monendum censeo, cum videam in aliis experimentis (v) sex diebus, aut diutius ranas sub aquis vixisse, & contingere possit, celeberrimo HALLERO notante, ut ranae, quemadmodum caetera animalia, frigore torpentes absque respiratione vitam diutius conservent (x).

5. Quae autem in aëre interclusio phoenomena ranae exhibuerunt hujusmodi sunt. Ex ranis quatuor unam in vase inclusi, quod uncias duodecim; secundam in vase alio, quod duplum; tertiam in vase, quod quadruplum aquae recipere potuisset; quartam in libero aëre reliqui: thermometrum tunc indicabat gradum 20. caloris in scala reaumuriana. Post 48. horas vivebant adhuc omnes; post horas 60. omnes ita mortuas inveni, ut vitam recipere amplius non possent:

(v) BROWNE erreurs populaires lib. III, p. 315.
(x) Elem. physiol. tom. III. p. 266.

ſent: laeſae reſpirationis indicia ante mortem in his ranis in aëre interclusis aut nulla, aut dubia extiterunt, cum earum reſpiratio a ranae in libero aëre relictae reſpiratione ſenſibiliter non differret.

6. Cum porro viderem aequali propemodum tempore ranas & in aperto, & in intercluſo aëre periiſſe, inde ſuſpicio mihi nata eſt, eas non tam intercluſione aëris, quam aliqua alia cauſſa, imprimiſque aquae defectu interiiſſe; ſiquidem notum eſt ranas in aqua etiam puriſſima abſque alimento ad hebdomadas, imo & ad menſes vitam protrahere poſſe (*y*). Hinc ranas una cum aqua in aëre intercludendas putavi, ut ſublata altera mortis cauſſa, quantam vim habeat intercluſi aëris vitium ad ipſas enecandas tutius judicare liceret.

7. Itaque in vaſorum vitreorum aequalium altero ranam unam, in altero tres cum aqua incluſi: (ſpatium ab aqua relictum, & ab aëre occupatum tantum erat in utroque vaſe, ut uncias 20. aquae capere adhuc potuiſſet) ranam aliam cum pari aëris quantitate abſque aqua intercluſi; aliam demum in aperto aëre reliqui: thermometrum tunc erat ad 5° ſupra o ſcalae reaumurianae. Poſt quindecim horas vivebant adhuc omnes: poſt horas 20. ranas tres cum aqua, & aëre ſimul intercluſas mortuas inveni, quae, aperto vaſe, vitam non recuperarunt; rana quae cum aqua, & aëre ſola fuerat intercluſa poſt quinquaginta quinque horas adhuc vivebat, hora ſexageſima tertia mortua erat; quae cum aëre abſque aqua fuerat intercluſa poſt viginti ſex horas adhuc vivebat, vigeſima octava hora mortuam inveni, datoque aëre amplius non revixit; quae demum in aperto aëre relicta fuerat quinto die langueſcebat quidem, adhuc tamen vivebat. Eodem experimento repetito ex tribus cum aqua intercluſis ranis una per horas viginti, altera per horas triginta;

(*y*) Swamerdam. Bib. natur. p. 170. col. Acad. Idipſum ſaepe obſervavi.

ginta; tertia post tringinta quinque jam mortua erat; sic singularum vita in summam collecta ultra octuaginta quinque horas non perduravit; quae rana sola cum aqua, & aëre fuerat interclusa post septuaginta quinque horas jam mortua videbatur, aperto tamen vase vitam recuperavit; quae absque aqua in aëre fuerat interclusa post horas viginti quatuor jam mortua erat; quae demum in aperto aëre fuerat relicta decima die adhuc vivebat.

8. Ranae porro cum aqua interclusae principio sub aquis delitescebant, nec nisi identidem respirandi caussa ad superficiem innatabant; progressu tamen temporis frequentius ad aquae superficiem ferebantur; ac tandem sub finem perpetuo innatabant, & perpetuo respirabant. Respiratio primo frequens, & parva erat, dein frequens, & magna, ac laboriosa; quando ad extremum pervenerant vix se amplius sustinere ad aquae superficiem poterant, & capite sub aquis demergebatur; identidem tamen magno nisu innatabant, & magnas aliquot, vehementesque respirationes edebant. Frequentes quoque eo tempore convulsiones apparuerunt. Quae in aëre absque aqua intercludebantur ranae, convulsiones nullas passae sunt, & minus evidenter laesam respirationem habuerunt.

9. Ex his itaque patet ranas cum aqua in aëre interclusas vitam fere ducere, quae sit ut quantitas aëris simul interclusi; easdemque non secus ac caetera animalia ex difficultate respirandi interire, quodque rem conficere videtur jam morituras, & dyspnoea, ac convulsionibus laborantes similiter renovato aëre restitui.

10. Quandoquidem vero, ut dictum est, in postremis experimentis (7) ranae, quae in aperto aëre relictae fuerant multo diutius vivebant illis, quae in aëre absque aqua fuerant interclusae secus, ac in primo experimento (5) contigisset, sive id a peculiari ranarum constitutione, sive a tempestatis varietate repetendum esset, placuit iterum ranas absque aqua numero vario in vasis ejusdem capacitatis cum aëre inter-

tercludere; & iterum observavi, perinde ac quando cum aqua intercludebantur, vitae durationem longiorem fuisse ubi pauciores ranae erant, etsi inversam numeri ipsarum rationem minus exacte sequeretur, & quasdam mortuarum instar jacentes, aëre renovato, restitutas vidi.

11. Quoniam igitur ranae, quando citius in intercluso aëre, quam in aperto intereunt, intereunt etiam eo citius, quo plures sunt in pari aëris quantitate (9. 10.) patet vel ab alia caussa, quam ab interclusione aëris ipsarum interitum accelerari, vel certe earum vitam esse in ratione quantitatis aëris: quemadmodum autem hujusmodi anomaliae frequentes sunt, si ranae absque aqua intercludantur (3. 5.), ita, concessa iisdem aqua, & nulla hujusmodi inconstantia apparet, & ex aëris interclusione pereunt, & eo citius, quo minorem aëris quantitatem habent, iisdemque demum symptomatibus, quibus caetera animalia, perimuntur, similiterque periturae ex aëris renovatione refocillantur (7.8.).

12. Quemadmodum vero animalium, ita & flammarum durationem in eodem recipiente inversam fere numeri ipsarum rationem secutam fuisse experimento comperi, dummodo candelae essent aequales, & aeque arderent: & in aequalibus quidem recipientibus, ex aequalibus candelis accensis diutius ardere illam, quae in ampliori interclusa sit, docuit Halesius; sin autem recipientia essent aequalia, candelae inaequales, majorem flammam citius extingui (*a*); ut appareat flammas, caeteris paribus, non secus ac animalia in intercluso aëre citius extingui, quando minorem aëris quantitatem habent. Equidem idem monuit Halesius in ampliori recipiente aequalem flammam minus durare, quam pro ratione quantitatis contenti aëris debuisset, sed cum simul adnotaverit parem candelam in majori recipiente aëris quantitatem longe majorem absorpsisse (*b*), hinc

(*a*) Exp. 103. p. 198.
(*b*) Exp. 106. 107. p. 200. 201. 202.

hinc verosimile sit candelam in majori recipiente positam paullo magis arsisse, ideo & minus perdurasse: enim vero postea constabit absorpti aëris quantitatem flammae magnitudini, quam proxime respondere (30). Quod vero opinionem nostram confirmat illud est, pondus amissum sive ab una, sive a pluribus candelis homogeneis fere secutum fuisse rationem capacitatis vasis, seu quantitatis aëris, cum qua intercludebantur: similiter Cl. Beccaria expertus est (ut ipse mihi narrabat) cum limaturam stamni, aut plumbi in vitris hermetice clausis calcinationi subjiceret, portionem tantum limaturae ex subjecto igne in calcem redigi potuisse, at eo majorem, quo vacui in vase vitreo spatii amplitudo major erat.

13. Cum vero hactenus exposita experimenta in aëre ejusdem densitatis fuerint instituta, illud praeterea dignum consideratione videbatur, quantum pro varia aëris densitate *simul* interclusorum animalium vita brevior, diuturniorve evaderet. Cum itaque phialam haberem vitream quinquaginta librarum aquae capacem, cujus collum cochlea cuprea munitum erat, latera autem utrimque tubulum vitreum continuum habebant, horum alteri syphonem vitreum hermetice adglutinandum curavi, ut ex immissi in ipsum mercurii altitudine variam aëris interclusi densitatem cognoscerem; alterum. ad machinam pneumaticam aptavi: dein passerculum in phialam immisi, eademque cochleae ope firmiter obturata, aërem cito hausi, donec mercurius in syphone pol. 16. lin. 10. supra libellam elevatus esset: tunc commercium inter antliam, & phialam intercepi; eo autem tempore 2′ ab immisso passerculo erant praeterlapsa.

Passerculus principio vomuit (c) convulsiones nonnullas passus

(c) Similiter alauda in aëre ad dimidium rarefacto ter vomuit, dein melius se habuit, ut post horae $\frac{1}{4}$ mortis periculum adhuc abesset. Boyl. nov. exp. pneum. tit. XI. exp. 4. & in transf. n. 63.

paſſus eſt, poſtea aliquamdiu bene ſe habuit. Reſpiratio ipſi primum parva erat, & frequens (*d*), dein minor adhuc, & frequentior evaſit, poſtea frequens, ac magna, poſtremo magna, & rara, quando, ſupervenientibus convulſionibus, ſublatus eſt: mercurius paullatim in ſyphone elevabatur, ut mortis tempore lin. 4. $\frac{1}{2}$ circiter ejus altitudo adaucta eſſet. Vixit paſſerculus a clauſo tubo, qui cum antlia pneumatica commercium faciebat 35′. Cum poſt mortem paſſerculi tantum novi aëris in recipiens admiſiſſem, ut 3. pol. mercurius ſubſideret poſt horas 1. $\frac{1}{2}$ iterum paullo ultra lineam unam mercurium elevatum fuiſſe obſervavi; ſed non auſim affirmare alicui caloris viciſſitudini eam mutationem adſcribendam non eſſe; etſi mercurius in proximo thermometro nullum ejus rei indicium praebuerit.

Poſt haec paſſerculum parem in eamdem phialam prius lotam ſimiliter immiſi: aërem ſimiliter exantlavi, ut tamen mercurius in ſyphone pol. 13. lin. 5. tantummodo elevaretur, & phialae commercium cum anthlia intercepi, quae omnia pari celeritate, 2′ ſcilicet ab immiſſo paſſerculo abſoluta ſunt. Paſſerculus eadem paſſus eſt, quae prior: vixit 70′, cum mercurius ſeptem lineis ſupra priorem locum mortis tempore altior eſſet.

Demum in eadem phiala cum aëre nativae denſitatis par paſſerculus interclusus (altitudo mercurii in barometro tunc erat pol. 27. lin. 6.) eadem paſſus eſt praeter convulſiones, quae nullae fuerunt: vixit horas 3. $\frac{1}{2}$; mercurius in ſyphone mortis tempore pol. 1. lin. 1. $\frac{1}{2}$ circiter altius conſcenderat.

14. Porro in hujuſmodi experimentis quantitates aëris intercluſi erant uti numeri 128. 169. 330., adeoque fere uti

(*d*) Etiam in rariſſimo aëre montium peruvianorum reſpiratio frequens, anheloſa (Bouguer *Mém. de l' Acad.* 1744. *p.* 261.) in aëre condenſato contra reſpiratio rarior (Boyl. phyſico-mech. cont. II. art. 4. exp. 6.)

uti 3. 4. 8., duratio autem vitae fuit uti 35. 70. 210., seu uti 1. 2. 6., ex quo primo patet in aëre diversae densitatis durationem vitae non respondere quantitati aëris; sed majori in proportione augeri, quam aëris quantitas, quando densitas major evadit; adeoque eamdem aëris quantitatem diutius animalium vitam sustentare quum condensata, quam quum fuerit rarefacta.

Quod autem in aëre nativo rariori experti sumus, id in densiori expertus similiter est BOYLEUS, qui cum mures duos in paribus recipientibus inclusisset, in quorum altero aër nativam, in altero duplam densitatem habebat vidit in duplo densiori mus 15. vicibus diutius vixisse, quam in nativo aëre, etsi conclusi aëris quantitatem duplam tantummodo haberet (e).

15. Illud deinde ex hisce experimentis deducitur, imminutionem elasticitatis aëris majorem esse, caeteris paribus, quando aëris densitas major est, & quantitatem imminutionis densitatis fere rationem sequi: imo novi admissi aëris, post animalium mortem, elasticitatem iterum imminui ex iisdem probabiliter deducitur.

16. Quod vero de animalibus dictum est; idipsum de flamma observavit HALESIUS; in aëre nimirum ad dimidium rarefacto eamdem flammam multo minus quam dimidium tempus perdurare; adeoque ipsius durationem conclusi aëris rationem nequaquam sequi (f).

17. Quum igitur eadem aëris quantitas, prout addensatur eo tardius flammae, aut animalibus exitialis evadat; inde intelligitur, cur 522. pollices aëris, qui in nativa densitate hominis respirationi per 2′ $\frac{1}{2}$ tantum inservire possunt (g) in campana urinatoria aquae pondere compressi, &

(e) Loco ult. cit.
(f) Statiq. des Végét. p. 234.
(g) Ibid. append. exp. vi. p. 372.

& condensati per 5′, & ultra respirationi apti sint (*h*), inde etiam verosimile fit eamdem aëris quantitatem campana urinatoria inclusam eo diutius respirationi inservire posse, quo profundius demissa campana, ex incumbentis aquae pondere aër in angustius spatium adigitur (*i*).

18. Ex his etiam eruitur rariorem aërem ob raritatem animalibus, aut flammae nocuum non esse, sed quod cito ob hanc ipsam pervertatur, idcirco nocuum celeriter fieri: enimvero animalia in eo aëre per aliquod tempus optime respirant (*k*), & respiratio pedetentim laeditur, & eo tardius, quo recipientis amplitudo major est, & eodem demum modo, quo in nativo aëre intercluso laedi solet (13); at si propria raritate aër noceret, aeque cito nocere deberet, quacumque posita recipientis amplitudine: patet ergo vitium ipsius raritati non esse adscribendum: praeterea vero manifestum est tantam densitatem aëris respirationi sustentandae sufficere, quae apta sit pressione sua dilatandis pulmonibus; pressio autem dilatandis pulmonibus necessaria tanta est, quanta requiritur pulmonum vi contractili superandae (nullus enim est aër thoracicus, qui resistentiam augeat), adeoque pressionem 2. pol. mercurii vix superat (*l*), ex quo conficitur aërem etiam praetermodum rarum pressione quidem sua mechanismo respirationis perficiendo aptum esse.

19. Ut

(*h*) Nam centum pollices pro 1′ sufficiunt HALLEY philos. trans. n. 349. DESAGUL. *leçons* t. II. p. 236. 473.

(*i*) Docet tamen DESAGUL. l. c. p. 236. tempus quo aër pervertitur esse uti ipsius volumen, quaecumque fuerit ejusdem densitas.

(*k*) Si excipias frequentiam majorem, quae etiam in montano aëre observatur. Vid. §. 13. n. *d*.

(*l*) HALES l. c. exp. 112. p. 214. 215. in mortuis quidem brutis experimentum institutum; & iterum exp. 113. p. 216. 217. applicito ad apertum canis latus syphone, vidit in ordinatia inspiratione vix sex pollicibus, in vehementissima ad summum triginta poll. in syphone vini spiritum elevatum fuisse: tanta igitur erat vis, qua distentus pulmo inspirati aëris pressionem sustinebat.

19. Ut vero eo certius cognoſcerem quantam nam aëris raritatem animalia tolerare poſſint ſequens experimentum inſtitui. Paſſerculum in phialam vitream immiſi, cujus aperturam flaceſcente ampla veſica arcte ad collum phialae circumligata obturavi: phialam cum paſſerculo alio ſub recipiens pneumaticum poſui, aëremque exantlavi, donec mercurius ad 19. pollic. altitudinem in appenſo ſyphone elevaretur (altitudo ejuſdem in barometro tunc erat poll. 27. $\frac{1}{2}$) dein tantum aëris per epiſtomium admiſi, ut mercurius duobus pollicibus ſubſideret; mox parem aëris quantitatem prompte iterum exantlavi, ſicque alterne, & celeriter eamdem aëris menſuram & haurire, & reddere continuavi per horae dimidium: hoc pacto uterque paſſerculus ſemper verſatus eſt in aëre adeo raro, ut 7. $\frac{1}{2}$ ad ſummum 9. $\frac{1}{2}$ mercurii pollices ſuſtinere poſſet, cum eo tamen diſcrimine, quod paſſerculus phiala incluſus eumdem ſemper aërem haberet, extra phialam ſub recipiens poſitus aſſidue renovatum: ille principio vomitu correptus eſt (*m*), poſtea bene ſe habuit, ut finita ſemihora integer, alacerque educeretur; hic dyſpnoea ſenſim ingraveſcente, & convulſivis demum motibus correptus, non multo poſt quam eductus eſſet, interiit.

20. Ex his confirmatur aërem ſub recipiente pneumatico etiam admodum rarefactum vitae, ac reſpirationi ſuſtentandae aptum eſſe, dummodo renovetur, indeque fit, ut animalia majores mutationes denſitatis tollerent, quando denſitas nativa intercluſi aëris augetur, quam cum imminuitur (*n*), inde

(*m*) Et reſpirationem minorem, frequentioremque perpetuo habuit; vomitus repentinae mutationi aëris (vid. not. *c*. §. 13.), reſpiratio frequentior ipſi aëris raritati adſcribenda (vid. ib. n. *d*, & §. 18. n. *k*.)

(*n*) Homines in campena urinatoria aërem ferunt novem vicibus denſiorem (MUSSCH *eſſai* §. 1411.) & animalia in machina compreſſoria ex aëre etiam octuplo denſiore nullum incommodum paſſa ſunt (ex BIRCH. HALLEAUS l. c. p 194. not. *o*.) alauda contra in aëre quadruplo tantum rariore 2' interiit (BOYLE nova exp. pneum. tit. XI. exp. 3.)

inde etiam ratio pendet, propter quam in rariori altissimorum montium aëre, & flamma ardet, & animalia optime se habent (*o*), in aëre contra per antliam ad parem raritatem perducto cito extinguuntur (*p*): ille scilicet aër apertus est, & sponte renovatur, hic interclusus brevi perverti debet; verosimile propterea est aërem montanum interclusum aeque cito laethalem futurum, ac ille, qui in aequali recipiente ad parem raritatem est perductus.

21. Jam si comparemus phoenomena exposita cum phoenomenis liquorum in clauso spatio evaporantium iisdem accurate respondere comperiemus: vidimus nimirum primo. Evaporationem in clauso spatio paullatim imminui, ac tandem omnino desinere, ut novi vapores in id spatium erumpere amplius non possint. 2. Durationem autem evaporationis, caeteris paribus, fere esse ut amplitudinem recipientium. 3. demum, si aër rarefiat, evaporationem accelerari, & recipiens vaporibus multo citius repleri; ita ut tempus, quo repletur majori in proportione imminuatur, quam densitas aëris (Differt. praec. §. 9. 10.): quae quidem omnia etiam in flamma, & animalibus in aëre interclusis vera esse observavimus; nam & paullatim illa languere vidimus, ac tandem extingui, & immissam novam flammam, aut novum animal tunc statim suffocari (1), & durationem utriusque in eadem aëris densitate esse, uti quantitatem aëris conclusi (3. 11. 12.), in diversa hanc rationem non amplius sequi; sed eo celerius desinere, posita aequali aëris interclusi quantitate, quo rarior aër esset, eo tardius, quo

(*o*) Vid. Hallerum l. c. p. 189. not. *i*, k, p. 193. not. *b*, *c*, p. 197. not. *o*, *p*, *q*.

(*p*) Vid. not. *n* praeced. inde forte factum est, ut plerique doceant aves aërem $\frac{2}{3}$ leviorem ferre non posse; sed discrimen hujusmodi inter aërem montanum, & aërem antlia rarefactum jamdudum est adnotatum. Vid. Haller. l. c. p. 193. not. *s*.

quo denſior (14. 15.). Dum vero flammam, & animalia in interclufo aëre vaporibus ſuffocari concludimus, nondum aut eorum naturam licet definire, aut peculiarem modum, quo noceant; num ſcilicet novis tantummodo coërcitis vaporibus, an potius mutatis phyſicis, aut mechanicis aëris qualitatibus; ſed de his deinceps nonnulla erunt addenda.

22. At ſi vapores flammae nocent, qui fit, ut in propoſitis alibi experimentis aër non per candens tantummodo metallum, ſed & per vitrum trajectus flammam extingueret (*q*), & ex admoto extrinſecus ad vitream phialam igne contentus aër flammae deinceps alendae ineptus evaderet (*r*)? Ad primum, quod ſpectat experimentum, in quo, flamma intra recipiens binis verticalibus foraminibus pertuſum conſtituta, ad inferius foramen candens vitrum admovebatur, non prava qualitate ex vitro contracta, ſed *impetu*, & unda ſua aërem vitri calore rarefactum flammam extinxiſſe cognovi; aliter enim experimentum ceſſit, quando cautum eſt, ne aëris a vitro rarefacti, & nimio impetu ad flammam impulſi unda in eamdem irrueret. Ad alterum, quod attinet experimentum maxime dubito ne per tenues vitri parietes (*ſ*), aut per latentem rimulam halitus admoti extrinſecus ignis in ipſius cavum penetraverint, vel fortuita alia adfuerit erroris cauſſa; quandoquidem craſſioribus vitris in caſſum deinceps tentavi: nec diſſimulatum eſt a nobis in ſuperiori tomo frigidis etiam animalibus corruptum aërem alendae flammae imparem fieri, unde de prioris opinionis veritate dubitare coepimus (*t*): caeterum & Desagulierius monuit aërem per candentia metalla trajectum non perverti, niſi quatenus aut ipſorum metallorum (*u*), aut

(*q*) Tom. praec. §. 32. 34. 35.
(*r*) Ib. §. 36.
(*ſ*) Vid. Borrichium Act. Hafn. tom. 2. pag. 137. 138.
(*t*) L. c. §. 45. 46. 47.
(*u*) Ut aër, qui a candente auricalco lapidis calaminaris halitus recipit. *Leçons* tom. 2. p. 467. 468.

aut prunarum, in quas immersa metalla sunt vaporibus (*v*) inficitur, & HAUKSBEI experimenta esse castiganda: expertus demum sum aërem phiala inclusum per menses in praecalido hypocausto servatum nullam noxiam qualitatem contraxisse. Atque haec quidem de hujusmodi experimentis: argumenta caetera, quae vaporum hypothesim nobis oppugnare videbantur (*x*) minoris momenti esse deinceps constabit.

23. Verum si phoenomena consideremus imminutae ab animalibus imprimis aëris elasticitatis luculentius constabit vapores in caussam suffocationis esse addùcendos. Constat enim aëris elasticitatem a vaporibus iis infringi, qui vehementer adeo ad ejus particulas adhaerent, ut interpositione sua mutuam ipsarum vim repulsivam imminuant (*y*). Hinc 1.° vis elastica aëris principio a vaporibus magis imminuitur, dein sensim minus, prout aër vaporibus onustus novis recipiendis minus aptus efficitur, ut demum 2. Aëre vaporibus jam saturato ejus elasticitas infringi amplius non possit (*z*). Tunc vero 3., novo aëre in recipiens admisso nova fit elasticitatis deperditio (*a*). Hinc 4. aër factitius, qui vaporibus jam saturatus prodit, in vacuum, aut aërem vaporibus jam saturatum emissus nullam elasticitatis jacturam patitur (*b*), quam tamen in purum aërem emissus pati vi-

(*v*) Ut in HAUKSBEI experimentis immisso in prunas ferro, aut aere. . Ibid. p. 439.

(*x*) §. 24. 25. 28. 33.

(*y*) Ita DESAG. l. c. p. 42. 43, HALES. passim.

(*z*) HALES exp. 106. p. 202.

(*a*) Et novus aër cum impuro effervescit. Id. append. exp. 3. p. 342., & sequent.

(*b*) Si subitam eam excipias, quae ex ipsius aëris geniti, aut admixtorum vaporum refrigeratione dependet. Sic aër factitius ex cornu cervi in vacuo per speculum causticum combusto post horam nullam amplius patitur elasticitatis jacturam (BOYLE contin. II. art. VIII. exp. 2. p. 375.) imo vero nec aër ipse ex charta sulphurata in vacuo combusta (Id. l. c. exp. 1. p. 374. 375.), nec aër ex aqua forti, & nitro fixo in vacuo mixtis (Id. l. c. art. XI. exp. 5. p. 390.), aut ex aqua forti, & cupro (PAPIN. trans. an. 1675. n. 119.)

videtur, ex eo, quod vaporibus suis hujus elasticitatem imminuat (*c*): ex quibus 5. intelligitur, cur corpora quaedam, quae in vacuo, aut aëre vaporibus jam saturato aërem emittunt, in aëre nativo, puroque interclusa, aliquando videantur absorbere (*d*), quod scilicet decrementum elasticitatis interclusi aëris ex vaporibus majus sit ejusdem incremento ex novo aëre adjecto: cur item 6. corpora quaedam in aëre interclusa aërem alterne gignere, & absorbere videantur, quando, harum caussarum altera alteram alterne superante, elasticitas interclusi aëris alterne adaugetur, vel imminuitur (*e*): cur tamen 7. corpora etiam, quae principio aëris interclusi elasticitatem imminuebant, postremo adaugeant, quando interclusi aëris vaporibus jam onusti elasticitas ab erumpentibus novis vaporibus ita imminui amplius non potest, ut ejus decrementum ex hac caussa incrementum superet, quod ab erumpente novo aëre producitur (*f*).

24. Et haec quidem phoenomena maxime consentanea sunt iis, quae ab interclusis in aëre animalibus producuntur. 1. Enim ab iisdem vis elastica aëris principio celerius, dein tardius, tardiusque imminuitur (*g*), ut demum 2. aëre iis vaporibus jam saturato ejus elasticitas imminui amplius non possit; tunc vero 3. novo aëre admisso,

(*c*) Hales l. c. exp. 76. p. 163.

(*d*) Sic sulphur in vacuo fluidum elasticum vi ignis emittete, cum aërem in Halesii experimentis absorpsisset adnotat Mussch. in Ciment. pag 31. Similiter spiritum nitri cum ferri limatura in vacuo fluidum elasticum gignere ut pol. 4. $\frac{1}{2}$ mercurius deprimeretur (Mussch. l. c. p. 201. §. 166.), contra sub recipiente aëre pleno aërem absorpsisse (Hales exp 94. p. 190.), etiam repetito, si novus aër in recipiens admitteretur (Id append. exp. 3. n. 6. p. 344.)

(*e*) Hales p. 256.

(*f*) In quinque tubis successive admixto minerali *de Walton* cum aqua forti sub eodem recipiente immoto aëris pleno, priores tres miscelae aëris elaterium imminuerunt, posteriores duae auxerunt (Id. append. p. 350.)

(*g*) Veratti l. c. p. 277.

misso, ex admixtis cum eodem vaporibus, nova elasticitatis deperditio fieri nobis visa est (15). Quoniam vero, aëre vaporibus semel saturato, ejus elasticitas ab iisdem debilitari amplius nequit, ex eo fit, ut 4. quantitas imminutionis non animalium numero, sed interclusi aëris quantitati respondeat (§. cit.), & in eadem aëris quantitate, quovis numero fuerint animalia, par fere elasticitatis imminutio fiat (*h*), quod nempe, quovis fuerint numero, ultra certam vaporum quantitatem in aërem illum effundere; atque adeo ejus elasticitatem ultra certum terminum enervare non possint: hinc 5. si animalia in aërem aliorum halitibus jam saturatum immittuntur, cito pereunt, quin aëris elaterium sensibiliter amplius imminuant (1), quinimo 6. animalia, quae per aliquod tempus in aëre vaporibus saturato supervivere possunt (4), in aëre interclusa, sub finem ejus elaterium non modo non pergunt enervare, ut contra novum aërem ante mortem gignant (*i*), quemadmodum de miscelis quibusdam dictum, quae cum purum aërem absorbere videantur, in aëre propriis halitibus saturato novum producunt (n. 7. §. praeced.)

25. Quare cum admixti animalium vapores ii sint, qui aëris elasticitatem infringunt, perperam nonnulli ex absorpto per pulmones aëre, & in sanguinem traducto hujusmodi elaterii imminutionem repetendam putant: etsi enim vel maxime per pulmones aër in sanguinem penetret, necesse nihilominus

(*h*) Ex uno cypselo in aëre interclufo mercurius digit. 1. lin. $\frac{1}{2}$ descendit, ex duobus sub eodem recipiente lin. 10, ex tribus digit. 1.; scilicet fere aequaliter descendit in experimentis VERATTI, quod ut Cl. Auctor advertit numerus ipsorum vitae brevitate compensetur (l. c. p. 271. 172.) Eamdem legem in ranis deprehendit (p. 276.), videtur tamen aliquanto diversam observasse in coturnicibus (p. 272.) HALESIUS quoque in majoribus recipientibus absorptionem aëris, proportione habita ad capacitatem, minorem observavit, sed ejusdem speciei animalia non adhibuit, exp. 7. p. 202. 203.

(*i*) De ranis idem Cl. VERATTI p. 277. 278.

nus erit, ut aequalis aëris quantitas per pulmones ipsos, aut per viam aliam e sanguine erumpat; adeoque nullus hujusmodi effectus apparebit (*k*). Dein si vera hypothesis, sequeretur in eodem recipiente plus aëris a pluribus, quam a paucioribus animalibus absorberi (vid. n. 4. §. praec.): postremo constitutis in rariori aëre animalibus nulla fieri deberet elasticitatis deperditio; quinimo erumpens e sanguine, & humoribus densior aër elasticitatem ambientis aëris augere deberet, cum tamen contrarium evenire experimenta ostendant (15).

26. Juxta easdem generales leges (13) imminuitur etiam aëris elaterium ab interclusis stirpibus; dum enim hae per interclusum aërem vapores disperdunt ejus elaterium paullatim enervant, &, imminuta pari passu evaporatione, languescunt, & demum ante interitum eousque aëris interclusi elasticitatem vaporibus suis imminuunt, ut immissa nova stirps, & cito pereat, & eam aëris elasticitatem debilitare amplius non possit (2).

27. Equidem phoenomena imminutae a flamma aëris elasticitatis non parum a prioribus discrepant 1. enim flamma in aëre interclusa principio ejus elasticitatem non modo non minuit, quin potius adauget, dein sensim imminuere incipit, haecque imminutio ea lege augetur, ut, extincta flamma, maxima evadat (*i*) 2. flammae, quo majores, aut plures in eodem recipiente, etsi pari proportione minus perdurent, & ponderis decrementum idem patiantur (12), quod innuit parem halituum quantitatem in eum aërem diffundere; eo tamen magis aëris elaterium enervant (*l*), & con-

(*k*) Enormis certe aëris quantitas intra sanguinem accumularetur, si 100. grana, seu 351. pollices aëris quavis hora in ipsum penetrarent, quemadmodum ex Halesii computatione, l. c. exp. 110. p. 211. 212.

(*i*) Hales exp. 106. p. 200.

(*l*) Majores candelas in eodem recipiente plus absorbere, Hales exp. 106. p. 201. Pluribus flammis cum animali interclusis hydrargiri descensus majores, celeriosque fuerunt, Cl. Laghi Comment. Bonon. tom. 4. pag. 82.

contra in recipientibus utcumque inaequalibus par propemodum elasticitatis imminutio ab aequalibus flammis producitur (*m*), ut adeo non quantitati aëris, aut durationi flammae, sed ejus magnitudini absorptio respondeat: hinc 3. flamma in aëre alterius flammae halitibus jam infecto, etsi cito extinguatur, & sub quintuplum tempus ad summum perduret (*n*) haud minus tamen, quum prior flamma ejus elaterium enervat (*o*). Quin 4. in aëre fervidae fumis referto, etsi flamma minus perduret $\frac{1}{5}$ plus ipsius elaterium debilitat (*p*).

18. Quae omnia demonstrant elaterii imminutionem, quae a flamma producitur aëris rarefactioni tribuendam esse, quae a pari flamma, quaecumque fuerit recipientis amplitudo, aequalis producatur; a majori, aut pluribus, in eodem quamvis recipiente, major existat; & aequalis iterum sit, sive flamma in purum, sive in infectum aërem immergatur, major vero, quo aër humidior, atque adeo ex calore magis dilatabilis est: quando enim flamma languere incipiet, multoque magis quando extinguetur, aër minus, minusque calore rarefactus sese contrahet, unde ejus elaterium pari ratione decrescere videbitur, ac calor imminuitur.

19. Ut vero rarefactionis effectus ab effectibus effluviorum aëris elaterium imminuentium secernerem, hujusmodi experimentum tentavi. In aqua vase contenta accensum cereo-

(*m*) Equidem Halesius monuit flammam sub majori recipiente aliquanto plus absorbere, sed cum simul adnotaverit & absorptionem, & durationem minorem fuisse, quam pro ratione contenti aëris esse debuisset: hinc verosimile flammam paullo majorem extitisse, unde & plus absorberet, & minus perduraret, quemadmodum innuimus §. 12.

(*n*) Confer. §. 1. n. *c*.

(*o*) Hales exp. 106. p. 201. exp. 103. p. 198.

(*p*) In hujusmodi aëre flamma 64" perduravit, cum in pari quantitate aëris puri 70" perduraret, & tamen in priori experimento $\frac{1}{8}$ plus aëris absorpta fuit. Id. exp. 121. p. 256. 257.

reolum fulcro fustentatum collocabam, postea campana vitrea tegebam, & syphonis ope aqua prius ad libellam composita, statim syphonem in aquam immergebam, ut ablatae inter aërem externum, & aërem campana inclusum communicatione, ex aquae sub campanam ascensu decrementum elasticitatis aëris dimetiri possem. Cum primum flamma contrahi, ac minui incipiebat, aqua elevabatur, & multo celerius eo momento, quo interibat: aliquamdiu post ascendere pergebat aqua, donec aër penitus refrixisset: tunc altitudinem summam, ad quam aqua pervenerat accurate metiebar.

Postea idem experimentum repetebam, applicito cereolo accenso ad crus syphonis, quod sub campana recipi debebat: cereolum autem ad ejus cruris latus ita adplicitum erat, ut, inclinato syphone, primo crus, & statim postea flamma sub aquas demergeretur, atque extingueretur. Res ita peracta erat eo consilio, ut vix dum ablata communicatione inter aërem campana inclusum, & externum aërem, a quo jactura elasticitatis a flamma producta reparari poterat, flamma statim extingueretur, nulla mora temporis concessa, qua aërem consumere posset; adeout ascensus aquae campana inclusae supra libellam exterioris aquae post flammae extinctionem ex toto fere aëris condensationi esset tribuendus, quin absorptioni, aut imminutae aëris elasticitati quidpiam adscribi posset: verumtamen non minus in hoc, quam in praecedente experimento aqua ascendit, etiamsi in illo flamma diu perdurans aërem absorbere potuerit, si revera absorbet; aliqua dumtaxat anomalia observata est pro varia flammae magnitudine, quam prout accuratius aequalem in utroque experimento esse curabamus, minus etiam inaequalis erat aquae ascensus (*q*).

30. Ex

(*q*) Hujus experimenti socium habui Cl. Comitem Salutium.

30. Ex quibus jam patet aëris elaterium a flamma quidem ex cera vix, ac ne vix quidem debilitari, & elevationem aquae sub recipientibus, sub quibus flamma extinguitur, condensationi aëris a flamma prius rarefacti potius quam elaterii imminutioni tribuendum esse, & demum decerni non posse utrum flamma magis, vel minus quam animalia aëris elaterium infringat, donec effectus rarefactionis ab imminutae elasticitatis effectibus non fuerint secreti.

31. Quoniam vero phosphorus etiam caustico vitro intra recipiens accensus, aut accensus in clauso vase ex admoto extrinsecus calore (r) aëris elaterium enervat, & enervat etiam pyrophorus, dum intra recipiens clausum sponte incalescit, aut accenditur (s); quoniam fumi sulphurei etiam frigefacti per circumpositam frigidam, si iterum circumfusa fervida calefiant, iterum aëris elasticitatem infringunt (t); quoniam imminutio elasticitatis ab incenso sulphure, aut flamma etiam communi producta post viginti, aut triginta horas ab eadem extincta fieri perseverat, multo scilicet postquam omnia refrigerata sint (u), & demum sulphur (v), aut etiam communis flamma (x) per vitrum causticum intra vitreum recipiens accensa aëris elaterium imminuunt, inde sequi videtur flammas saltem aliquas, forte etiam communes aëris elaterium nonnihil enervare. Et quidem pro varietate pabuli modo aëris elaterium infringi, modo

(r) Hales pag. 147. 257.
(s) Id. exp. 54. p. 151. 152. Boyl. noctiluc. obs. 10. p. 11.
(t) 13. pol. aëris quinque diebus absorpsit. Hales exp. 101. p. 196.
(u) Id. p. 147. & exp. 106. p. 200. Si tamen consideremus aërem tardissime refrigerari, probabile fit in amplioribus recipientibus vel permultas horas requiri prius quam ad ambientis temperaturam se restituat: quam tarde autem frigefiat aër thermometrum amontosianum ostendit.
(v) Accensum sulphur ultra 2. mensuras *pintes* aëris a detonante prius nitro producti absorbebat. Id exp. 121. p. 257.
(x) Accensa est per chartam sulphuratam, & nitratam. Id. p. 201. Sed quantum aëris elatetium imminuerit non narrat.

modo novum aërem a flammis produci demonstrare videntur experimenta HALESII, qui ex corporibus quibusdam inflammabilibus distillatis aëris elaterium infringi observavit, cum corpora alia similiter inflammabilia, & olea ipsa copiosum aërem producerent (*y*).

32. Verum ex iis ipsis experimentis, quae memoravimus constat imminutionem elasticitatis a flammae vaporibus productam imminutione ea, quae ex refrigeratione, & condensatione aëris fit, longe minorem esse: nam & sulphur distillatum multo minus, quam accensum aëris elaterium imminuit (*ζ*), & duo grana phosphori accensa, & sub recipiens immissa viginti octo pollices aëris absorbebant, cum intra vas clausa, dein accensa ex admoto extrinsecus igne tredecim tantum consumerent (*&*), quae rursus ostendunt, quam imperfecte imminuti elaterii mensura ab aquae, aut mercurii ascensu exhibeatur.

33. Caeterum quando flammae aëris elaterium imminuunt, id non absorpto aere efficere, sed vaporibus suis, qui vim repulsivam partium aëris, cum quibus admiscentur, imminuunt (23), vel eo constat, ut notat Cel. HALESIUS, quod post sulphuris deflagrationem, nonnisi terra sicca supersit, quae certe aërem nullum continet (*a*).

34. Postquam vero evictum est vapores esse, qui flammam, & animalia in intercuso aëre suffocant, illud primum quaerendum sese offert, num vapores iidem sint, qui flammae, & animalibus nocent. Et vidimus quidem aërem animalibus, sive calidis, sive frigidis (*b*) corruptum, immissam flammam statim suffocare. Vidit etiam PAPINUS flammam in vase clausam, ut nonnisi per tubum aër circum ipsam reno-

(*y*) De oleis exp. 62., de cera exp. 64.
(*ζ*) Id. exp. 76. p. 163.
(*&*) Id. exp. 54.
(*a*) Exp. 120. p. 256.
(*b*) Tom. praec. l. c. §. 44. 45.

renovari posset, extinctam fuisse quotiescumque loco puri aëris aërem ab homine exspiratum recipiebat (*c*) : at aër flamma vitiatus, quocumque demum pabulo alatur, etsi flammam aliam quamvis confestim suffocet (*d*), non perinde animalibus nocet, sed pro varietate pabuli modo noxius admodum, modo vix notabiliter molestus est : sic Cl. LAGHIUS observavit animalia cum flammis communibus interclusa diu iisdem supervixisse (*e*), & licet animalia aliquanto citius interiisse adnotaverit, quando flamma simul interclusa erat (*f*), cum tamen etiam citius periisse animadverterit, quando plures flammae simul intercludebantur (*g*), ex hoc ipso erui videtur flammas eas halitibus suis animalibus non nocuisse; nam a flammis sive pluribus, sive paucioribus in idem spatium eadem quantitas halituum disperditur, cum eo citius finiant quo plures, & idem ponderis decrementum patiantur (12). Verosimilius igitur ideo animalibus nocuisse, quod aërem rarefacerent, eoque magis, quo plures, unde & paucior aër intra recipiens relinqueretur, & aqua altius assurgeret (*h*), pari prorsus modo, quo passerculus in recipiente, in quo aër exteriori calore fuerat rarefactus, ne horam quidem vixit, cum par passerculus in eodem recipiente, cui calor similiter admotus fuerat, sed ita, ut aër undique interclusus rarefieri non posset, ad 73′ vitam protraxerit (*i*). De flamma vero ex vini spiritu

(*c*) Act. lipsiens. ann. 1689. p. 466. Col. Acad.
(*d*) Vid. §. 1. n. c.
(*e*) Comm. Bonon. tom. 4. p. 88. Mus sub eodem recipiente cum cerea candela accensa interclusus, & novies, aut decies diutius quam vixisset flamma sub recipiente relictus, laesus non apparuit (BOYL. de relat. inter aërem, & flammam vital. animal. tom. III. exp. 1. p. 168.
(*f*) Passerculus sub recipiente halitibus candelae referto vixit horas 4. 48′, cum sub eodem nativo aëre pleno vixerit hor. 5. 24′, l. c. p. 81.
(*g*) Modo singulae aeque arderent p. 82.
(*h*) Id. l. c.
(*i*) Id. l. c. p. 87.

ſpiritu BOYLEUS narrat (*k*), & ſaepe etiam ſum expertus, aviculam cum ea flamma in aëre interclufam huic diu ſupervixiſſe: lignorum etiam quorumdam flamma animalibus parum noxia (*l*), dum aliorum infenſa admodum (*m*), ut & flamma prunarum, quae aperto igne parantur parum animalibus nocet, cum carbonum ligneorum, aut lithantracis flamma iiſdem pernicioſiſſima ſit (*n*). Admodum etiam pernicioſus halitus ſulphuris, aut pulveris pyrii (*o*) incenſorum.

35. Quod ſi igitur flammarum quarumdam halitus, qui flammae manifeſte quidem nocent, animalibus vix, ac ne vix quidem moleſtiam afferunt, inde concludi poſſe videtur diverſos omnino halitus eſſe, quibus flamma, & animalia ſuffocantur (*p*); ac propterea flammas, quae animalia ſuffocant ſimul cum halitu flammam extinguente caeteris flammis communi, halitum alium emittere, qui animalibus perniciem afferat: & in carbonibus quidem halitum animalia extinguentem diſtinctum ineſſe, & ab illo diverſum, quo flamma perimitur, demonſtrare videtur ſpiritus carbonis, qui cum animalia ſuffocet, flammam non modo non extinguit, ut imo ab admota flamma incendatur (*q*). Jam vero hujuſmodi halitus ignem, & animalia extinguentes conjunctos adeſſe patet tum in reſpirato aëre, tum in aëre facti-

(*k*) Quinquies, aut ſexies diutius quam vixiſſet flamma ſub recipiente relicta avicula laeſa non apparuit (loc. ult. cit. p. 167.) Aërem tamen, qui per flammam ex vini ſpiritu in vacuum penetrat linariam intra 2′ ſuffocare, DESAG. t. II. p. 467. 468.

(*l*) HALES exp. 121. p. 237. Déſcriptions des arts & mêtiers par Mrs. de l'Acad. Art du charbonier p. 3.

(*m*) De flamma ligni quaercus viridis MUSSCH. *eſſai t. II.* §. 1330. *n.* 3.

(*n*) Art du charbonier p. 2. 3. & alibi.

(*o*) Mus ſuffocat $\frac{1'}{4}$ BOYLE phyſico-mech. cont. II. exp. 8.

(*p*) Flammam vulgarem, & vitalem diverſis ſubſtantiis ali, aut ſaltem eo alimento multo magis indigere flammam vulgarem, BOYLE l. c. exp. 2. Similia Cl. LAGHIUS l. c. p. 88.

(*q*) Tranſ. philoſ. n. 452.

factitio plurium corporum, tum demum in aëre plerarumque mephitidum; cum contra alias hujusmodi halitus singillatim erumpant, ut e flammis, quae animalibus non nocent, aut e corporibus, quae cum animalia suffocent, vicissim flammam non laedunt (*r*), aut etiam inflammabilem halitum emittunt (*s*).

36. Quae cum ita sint minus tutum indicium est quo ex quantitate pabuli dato tempore a flamma consumti de aëris salubritate, aut insalubritate judicium fertur, cum aeque aptus alendae flammae esse possit aër animalibus admodum infensus, & contra.

37. Ignis porro, & flamma aërem animalibus vitiatum, aut halitibus aliis, non quidem corrigunt, sed eumdem expellunt, ut novus in ipsius locum succedere possit (*t*); hinc quando aër halitibus hujusmodi saturatus est igne non modo emendari non potest, ut imo hunc ipsum extinguat (*u*).

38. Si vero de eorum halituum natura, qui flammam, aut animalia in clauso aëre suffocant, quaerere libeat, illud primum manifestum est, fumos non esse, qui flammae noceant; nam & aër flamma infectus diu id vitium retinet postquam fumi subsederunt (*v*), & percolatione per liquida varia, quibus fumi retinentur, aër hujusmodi corrigi non potest (*x*), & flamma etiam, quae fulgines nullas emittit, qualis ea est, quae alcohole nutritur, in clauso aëre non minus

(*r*) Aut minus manifeste (LAGHI p. 84. 85.): certe spiritus sanguinis humani animalibus infensissimus (Ibid.) flammae non nocuus, quum contra ejus halitus admota flamma accendatur. Vid. inf. §. 40.

(*s*) Aëris factitii inflammabilis exempla HALESIUS habet exp. 57.

(*t*) De renovatione aëtis, quae per ignem fit fuse diximus tom. praec. a §. 5. ad 17. Et ignem quidem ad aërem renovandum utiliter adhibent in fodinis (transf. phil. n. 5.) & in locis aliis. Ibid. n. 462. 463. SUTTON in libro in eam rem conscripto. DUHAMEL *art de préserver a p. 121. ad* 128.

(*u*) Quemadmodum notat DESAG. l. c. p. 475.

(*v*) Tom. praec. §. 28.

(*x*) Ibid. §. 24. 25.

minus suffocatur (*y*), & demum combustibilium corporum fumi flammam non suffocant, cum ipsi inflammabiles sint (*z*). Igitur non phlogisto, sed vapore eo, qui fit ex phlogisto, seu ignis pabulo vi ipsius ignis permutato, flamma in interclusо aëre suffocatur.

39. Ad halitus quod spectat, quibus animalia in aëre interclusa perimuntur perspicuum est eosdem ex perspiratione, inprimisque pulmonali provenire; nam & vitri interna superficies iis mortuis obnubilatur, & aperto recipiente odor putidus stomaco infensus percipitur (*a*): ex his vero constat halitus hujusmodi non mere aquosos esse (*b*), tum etiam ex eo, quod aëris elaterium infringant (24), quod mere aquosi halitus non praestant (*c*); demum ex eo, quod aqua saepe majori quantitate in aëre communi adsit, quam in respirato, quin tamen veneficam qualitatem praeseferat (*d*).

40. Cum vero ab allatas rationes putrido vapori similis sit is, qui animalia in interclusо aëre suffocat, ob idipsum ex alkalino volatili sale inprimis constare videbatur, eo vel maxime, quod Cl. Laghius observaverit interclusa animalia ex hujus salis vapore, cujusmodi est spiritus sanguinis humani multo celerius sublata fuisse: placuit vero ejus etiam salis vim in flammam experiri. Itaque in interclusum aërem, qui jamdiu exhalantis spiritus salis ammoniaci calce parati halitibus fuerat saturatus, flammam immisi totumque statim aërem illum concepta flamma deflagrasse observavi; idemque fuit eventus quando flammam immisi in interclusum

(*y*) Ibid. §. 2.
(*z*) Hoc argumento utitur Helmontius l. c.
(*a*) Cl. Laghi l. c. p. 82. 83.
(*b*) Ex aqua fiunt oleoso volatili halitu praegnante, olente, non acida, nec alkalina, & praecipua caussa sunt vitii, quod ex respirantium hominum turba in angusto spatio aër contrahit Haller el. phys. tom. II. p. 37. 38. tom. III. p. 353. 354.
(*c*) Hales. exp. 121. p. 260.
(*d*) Hoc argumento utitur idem Halesius p. 375.

ſum aërem halitibus tincturae ſulphuris volatilis ſimiliter ſaturatum; quoniam vero aër reſpiratus flammam non modo non concipit, verum etiam extinguit (34), inde conficitur halitus, quibus aër reſpiratus foedatur, vel a ſalis volatilis halitibus diſcrepare, vel cum iiſdem alios admiſceri, qui & flammam ſuffocent, & ipſorum inflammationem impediant: ex his vero inſuper confirmatur quod aliis jamdudum experimentis fuerat evictum pinguem ſubſtantiam ad ſalis volatilis conſtitutionem requiri, & intelligitur, cur putridorum corporum vapor aliquando inflammabilis ſit, alias contra alkali volatili jam diſſipato, aut vapore alio cum eodem admixto, vel eidem ſuccedente flammam extinguat (*e*).

41. Aër autem hujuſmodi ex flamma immiſſa accendebatur etiam aliquot menſes, poſtquam dictis halitibus fuerat ſaturatus, ut propterea vapores ſemel per aërem diſperſi diutiſſime eidem inhaereant, unde intelligitur quando aër flamma infectus, aut reſpiratus, aut artificialis id vitium diutiſſime retineat (*f*).

42. Dum vero dicimus halitus, quibus intercluſa in aëre animalia ſuffocantur ad putridorum halituum naturam accedere ſimul notandum innumeros alios eſſe, qui animalibus noceant; idque demonſtrant Cel. HAUKSBEI, DESAGULIERII, LAGHII experimenta, & ingens multitudo ſtirpium noxios halitus emittentium, & venefica vis factitii aëris ex tot diverſis corporibus prodeuntis; indeque fit ut halitus venefici aliquando aëre ſint leviores (*g*), alias fere graviores (*h*) aliquan-

(*e*) Vid. HALLER elem. phyſ. tom. III. n. k. *l.*

(*f*) Tom. praec. §. 28. 46.

(*g*) Hujuſmodi eſſe videntur halitus omnes, qui in aperto, tranquilloque aëri innocui, in intercluſo admodum pernicioſi ſunt, ut halitus animalium: hinc in noſocomiis, in quibus foetor purum gravis eſt, vix tolerabilis evadit, ſi prope laquear conſcendas, DUHAMEL l. c. p. 77. 277.

(*h*) Tales eſſe videntur halitus mephitidum quarumdam, quae aperto aëri expoſitae ſunt: hinc ex phiala in phialam ita transfundi poſſunt, ut interpoſitam flammam in tranſitu extinguant. *Sauvages effets de l'air* §. 119.

aliquando sonum intercipiant (*i*), alias non item (*l*), olentes demum aliquando sint, alias vix ullum odorem praeseferant (*m*).

43. Illud nunc inquirendum, quomodo collecti flammae, aut animalium vapores eadem in intercluso aëre suffocent: & ut primo de flamma dicamus, imminutam a vaporibus aëris elasticitatem in extinctionis caussam adduci non posse alibi demonstravimus (*n*): simplicissima vero ratio in eo sita videtur, quod aër flammae vaporibus semel saturatus novorum vaporum, in quos per combustionem ignis pabulum fuisset resolvendum, eruptionem cohibeat, pari modo, quo in caeteris evaporationibus contingit (diss. praec. §. 9.). Sane interclusae in aëre flammae aeque diuturna duratio est, sive superiora, sive inferiora recipientis teneat, & non aër solum inficitur, qui ipsam ambit, aut supra ipsam eminet, sed totus aër undequaque aequabiliter vitiatur, ut immissa nova flamma in limine suffocetur (1); quod argumento est ut dicamus non a calore (22), sed ab halitibus quaquaversum diffusis vitium illud proficisci: caetera etiam phoenomena evaporationis in clauso vase suppressae cum phoenomenis suffocationis flammae in aëre interclusae apprime convenire superius ostendimus (14).

44. Nec dissimilis ratio est ob quam stirpes in intercluso aëre pereunt; nam & aëris elaterium infringunt paullatim minus, & pari passu languescunt, adeo ut, quando demum perierunt, immissa ejusdem generis stirps & cito pereat, & aëris elaterium infringere amplius non possit (2. 26.), quae sane ostendunt vapores, ex quibus aëris elaterium imminuitur paullatim cohiberi, hinc aëreae elasticitatis jacturam

ram

(*i*) Sauvages l. c. §. 160.
(*l*) Saggio delle transf. filosof. tom. 5. p. 10. 11.
(*m*) Vid. Cl. Haller l. c. p. 113. n. *f.*
(*n*) Tom. praec. §. 2. 3.

ram minorem fieri, & ſtirpem languere, tandem vero omnino ſupprimi, hinc & elaſticitatem aëris non amplius infringi, & ſtirpem interire: ſtirpibus enim neceſſaria exhalatio eſt, ut novum ſuccum per radices haurire poſſint, ex cujus jugi affluxu earum vita, & incrementum dependet: ex quibus facile eſt intelligere cur ſtirpes ſolitariae ramos undique aequabiliter diffundant, altiores, graciliores ſque ſint quae in ſylvis adoleſcunt (*o*); nam ſolitariae ſtirpes aequabiliter undique exhalant; & propterea aequabilis fit nutritii laticis affluxus, & aequabile incrementum; in iis vero, quae confertae in ſylvis ſunt lateralium ramorum evaporatio minor eſt, quod ambientium ſtirpium halitibus refertus aër eamdem cohibeat: hinc ad verticem copioſius affluens nutritius humor eaſdem in altitudinem magis, quam juxta aliam dimenſionem expandit.

44. Obſcurius aliquanto eſt, quo pacto infectus ex interclusione aër animalibus perniciem afferat: illud quidem facile eſt demonſtrare, perinde ac de flamma diximus (43), vapores non ideo iiſdem nocere, quod aëris elaſticitatem imminuant: nam in aëre aliorum animalium halitibus jam infecto intereunt, etiamſi aut, aperto vaſe, aditus externo aëri concedatur, ut ad aequilibrium ſe componat, aut adjecta aqua, ſicque condenſato intra recipiens aëre, ad nativam elaſticitatem reſtituatur (1): mihi etiam aliquando obſervare contigit ut immiſſa in recipiens avicula interiret, immoto mercurio in appoſito ſyphone, quod indicio fuit hiatum aliquem patuiſſe, per quem aër & inſinuari, & renovari etiam ex parte potuerit, quod & paullo conſueto diuturnior animalis vita confirmavit (*p*), quo quidem in caſu cum non elaſti-

(*o*) Hales l. c. p. 300.
(*p*) Boyleo etiam aliquando contigit, ut in aëre intercluſa animalia interirent, etſi mercurius in indice immobilis perſtaret (nov. exp. pneum. tit. XV. exp. 1. 2. & in tranſ. n. 63. art. 1.), aut exterior aër admitteretur, aperto vaſe (Ibid.).

elasticitate, sed pondere aër ageret, manifestum est imminutam a vaporibus aëris elasticitatem in mortis caussam adduci non posse. Porro demonstravit Cel. HALLERUS animalia ex perenni inspiratione ob eamdem rationem suffocari, propterquam in interclufo aëre pereunt (*q*), id autem, vel inde confirmatur quod, caeteris paribus, inspirationem eo breviorem edant, quo rarior aër citius inficitur, eo tardiorem, quo densior aër est, tardiusque pervertitur (13), atqui tamen dum in aperto aëre animalia inspirant, aëris pulmone contenti elasticitas tanta esse debet, ut cum aëris adglottidem incumbentis pondere aequilibretur, atque adeo immutata esse debet; ergo nec animalia spiritum retinentia, nec propterea in aëre interclusa ob imminutam ipsius elasticitatem suffocantur.

46. Si aër infectus per pulmones permearet, alter esset modus mechanicus, quo respirationi ineptus posset evadere; at in cuniculis, quos ejus rei experiundae caussa, in intercluso aëre suffocaveram, detecta pleura, pulmonem ei undique contiguum observavi, eademque sub aquis perforata, nullas bullas aëreas prodiisse vidi, manifesto argumento, aërem etiam respiratione corruptum pulmonem non permeare: ex quibus jam constat, mechanicis quidem qualitatibus, aërem respiratione corruptum dilatando pulmoni aptissimum esse, nec dubium quin machina, quae respirationis functionem imitatur (*r*), hanc aeque feliciter in hujusmodi aëre exhibere possit.

47. Quod si in physicos modo inquiramus, quibus inquinatus aër animalia suffocet primo quidem occurrit imminuta, aut etiam suppressa perspiratio a similibus vaporibus, quibus aër jam refertus sit, ac saturatus, cum ejus elasticitas ab immissis aliis animalibus infringi amplius non possit (24),

(*q*) Elem. phys. tom. III. p. 258. 359. 260.
(*r*) Vid. apud HALLER. l. c. p. 236. 237.

(14), & ex ea ſane cauſſa fieri videtur ut homines, qui ex puro in infectum aërem, etiam frigidiorem ſe transferrunt, ſenſu caloris corripiantur, qui faciem imprimis invadit (*ſ*): verumtamen adeo neceſſaria non videtur perſpiratio, ut animalia, hac etiam ſuppreſſa, brevi adeo debeant ſuffocari (*t*), & aliae evacuationes ejus defectum ad tempus ſaltem poſſent compenſare, & demum in aëre admodum denſo, in quo perſpiratio tantopere imminuitur, animalia commode vivunt (20).

48. Alia vero, quae ſeſe offert phyſica cauſſa eſt nervoſi ſyſtematis a deleteriis in aëre congeſtis vaporibus irritatio, ac perturbatio, unde bronchia, & pulmones contrahantur, & aëri expanſuro negent cedere. Hujuſmodi vim ſulphureis vaporibus BOERHAAVIUS tribuit (*t*), & Cl. SOVASIUS mephitico cuidam vapori etiam adſcribit (*u*), etſi odore, & ſapore deſtituatur (*x*): eo igitur veroſimilius tribui poſſe videtur vaporibus, quibus reſpiratus aër inficitur, quique, Cl. LAGHIO notante, foetent adeo, ut ſtomachum moveant (*y*); & reſpirationis quidem viciſſitudines, quae interclusis in aëre animalibus contingunt, conjecturae favere maxime videntur: principio enim, quando aër vaporibus foedari incipit, reſpiratio paullatim frequens, ac parva evadit, quod vix inſpiratus aër moleſtia ſua ad expirationem ſtatim ſollicitet; deinde vero, pluribus collectis vaporibus, ex brevi, & parva in brevem, magnamque mutatur (*z*), & in aëre vaporibus jam foedato hujuſmodi reſpiratione animalia ſtatim afficiuntur (*t*), quod ſignificare videtur, aërem illum non ſolum moleſtum eſſe, ſed etiam bronchia vi ſua irritante conſtringere; ita ut eidem ingreſſuro magis reſiſtant, unde

(*ſ*) DUHAMEL l. c. p. 28. 29.
(*t*) De morb. nervor. p. 259.
(*u*) L. c. §. 148. eaque ſententia Cl. HALLERO placuit l. c. p. 254. n. *d*.
(*x*) Id. l. c. §. 144.
(*y*) L. c. p. 82. 83.
(*z*) LAGHI l. c. p. 82. VERATTI l. c. p. 269.

unde anxietas nascatur, quam laboriosa, ac magna inspiratione animal superare conetur: quoniam vero effectus idem est, sive vis aëris in pulmonem irruentis imminuatur, sive resistentia pulmonis adaugeatur, inde forte factum est, ut imminuta aëris elastica pressio a multis accusaretur; ast non imminutae pressioni aëris, sed auctae pulmonis resistentiae hanc respirationis laesionem tribuendam esse tum superius dicta (45. 46.) suadent, tum confirmant HALESII, & BOYLEI experimenta: hic enim cum aërem corruptum, in quo animal laborabat, condensaret, nihil levatum fuisse observavit (*a*); ille autem, compressa vesica, quae ad sectam vivi canis trachaeam adnexa erat, etsi aërem non renovaret, animal tamen refocillari perspexit (*b*). In primo nimirum experimento vis omnis aëris in pulmonem irruentis a dilatatione thoracis pendebat, ita ut, quacumque posita aëris densitate, ejus in pulmonem impetus tantus semper esset, quanta vis erat, qua pectoris cavum dilatabatur (18. not. l.), mirum propterea non est animal inde minus laboriosam respirationem assecutum non fuisse; secus vero in altero experimento, compressa vesica, aëris in pulmonem vis augebatur, quin necesse esset majorem nisum a pectoris parietibus exerceri, inde magis dilatabatur pulmo, & animal minori cum labore respirabat.

49. Ex his vero intelligitur, cur HALESIUS ex vesica (*c*), aut recipiente flexilibus parietibus instructo (*d*) aërem respirans perfocationis sensum perceperit, & canis, cui vesica ad trachaeam adnexa erat, reapse fuerit suffocatus (*e*), & animalia intra vasa flaccescentibus vesicis obturata non minus intereant (*f*), etiamsi in hisce adjunctis aër exterior vesicarum,

(*a*) Ita tamen, ut novum aërem non adderet, cont. II. art. IV. exp. 18.
(*b*) L. c. exp. 114. p. 217.
(*c*) Exp. 108. p. 204. 205.
(*d*) Exp. 116. p. 225. 227. 228.
(*e*) Ib. exp. 114. p. 257. & seq.
(*f*) LAGHI l. c. p. 83.

rum, aut flexilis vafis parietibus incumbens eos ita comprimere debeat, ut inclufi aëris elafticitas cum atmofpherae pondere perpetuo aequilibretur; intelligitur etiam cur animalia in condenfato aëre interclufo intereant, quando ipfius elafticitas nativi aëris elafticitate adhuc major eft, quemadmodum barometrum indicat (*g*): cur in nativo aëre interclufo intereant, etfi mercurii defcenfus in barometro minor fit, quam a mutata tempeftate produci foleat (*h*): cur contra in montano aëre, aut etiam in aëre per antliam rarefacto, dummodo renovetur, optime fe habeant, etiamfi ipfius in pulmonem preffio longe minor fit (20): cur demum aër mephiticus (*i*), aut artificialis (*k*), qui eodem fere modo ac aër interclufus animalibus infenfus eft, etiam in aperto loco animalia fuffocet, ubi tamen non elafticitate, fed pondere aëris pulmones dilatantur, quod a vaporibus hujufmodi immutari nequit, ut facile apparet, & barometrum oftendit (*l*): cur hujufmodi aër citius etiam, quam vacuum animalia fuffocet (*m*), & animalia etiam, quae diu vacui vim tolerare poffunt (*n*).

50. Vi-

(*g*) Mussch. in Ciment. p. 59.

(*h*) Notante Cel. Hallero l. c. p. 208. 209. Profecto Halesius (append. exp. 6. pag. 371.) perfocationis fenfum percepit, quando in recipiens, ex quo aërem refpirabat, 18. pollices aquae penetraverant: recipientis vero diameter erat 9. pol., adeoque altitudo ejus aquae fupra libellam 3. lin. circiter effe debuit; hinc preffio elaftica refpirati aëris tantumdem; hoc eft 3. lin. aquae, aut $\frac{3}{14}$ lin. mercurii imminuta tantum erat.

(*i*) Vid. *Encyclop. artic. gas.*

(*k*) Hoc argumento Halesius inductus eft ut crederet, artificialem aërem neutiquam nocere ob elafticitatis defectum l. c. p. 370. 371.

(*l*) Vid. Haller. l. c. pag. 213. n. h.

(*m*) Vacuum torricellianum aviculas $\frac{1'}{2}$ interimit (Cimentin. p. 49. 50.) aër ex pafta $\frac{1'}{4}$ (Boyl. conf. II. art. V. exp. 5.) tum ex uvis ad folem exficcatis (Ibid. exp. 10.)

(*n*) De ranis ib. exp. 7. p. 371., de cochleis exp. 6. p. 367.

50. Videtur utique respiratus aër ea in re a mephitico discrepare, quod convulsiones nullas producat (*o*), quas tamen nullas observari verosimilius est, quod pedetentim halitibus aër saturetur, sicque interclusa animalia vel iisdem paullatim assuescant, vel paullatim debilitata, aut stupefacta minus ab iisdem afficiantur: etenim in aërem ab aliis animalibus jam infectum immissa animalia gravibus convulsionibus torqueri observavimus (1), & in aëre rariori, qui citius inficitur, ex convulsionibus interiisse (13) (*p*), & demum in nativo etiam, puroque aëre interclusa animalia ex convulsionibus periisse vidi, quando recipiens adeo angustum erat, ut cito foedatus aër eadem promte suffocaret (*q*).

51. Quum igitur nocua aëris vis ab admixtis vaporibus proveniat, mirum non est aërem corruptum directione quavis agitatum, aeque tamen nocere (*r*), imo vero cum vapores tenaciter plerumque aëri adhaereant (23. & seq.), inde est ut percolatione per liquida varia aër hujusmodi hactenus depurari non potuerit (*ſ*): frigore potius vehementi vapores cogente corrigi potuit (*t*). Equidem si peculiaris vaporum natura perspecta esset forte, aut liquores hujusmodi reperiri possent, qui vapores nocuos absorberent, reti-

(*o*) Cl. Laghi l. c. p. 88.

(*p*) Quae convulsiones non confundendae cum iis, quibus principio animal corripiebatur ex repentina mutatione densitatis aëris, quaeque paullo post sedabantur. Vid. §. 13. not. c.

(*q*) In angusto recipiente nativo aëre pleno interclusos cuniculos intra dimimidiam horam gravissimis convulsionibus correptos interiisse vidi. Boyleus etiam murem observavit in recipiente nativo aëre pleno, sed adeo angusto, ut 24′ tantum vixerit, ex convulsionibus periisse. cont. II. art. IV. exp. 6.

(*r*) Flamma in intercluso aëre extinguitur, quacumque directione agitetur (tom. praec. §. 21.), & accensae prunae licet interclusus aër rapidissimo motu adversus illas insuffletur (Shaw *leçon de chym. leç. 2. exp.* 5.) & animalia (Tabor exerc. medic. p. 173.)

(*ſ*) Tom. praec. §. 25.

(*t*) Ib. §. 39. Vel ipse spiritus salis ammon. calce paratus usque adeo volatilis frigore artificiali ex nive, & nitri spiritu in glaciem densatur (Martine diss. IV. art. VI p. 211.)

retinerentque, maxime ſi aër infectus per eoſdem percolaretur; aut corpora alia invenirentur, quorum ſalutares halitus vel nocuos vapores ab aëre ſepararent, vel cum his coaleſcentes, eoſdem in mediam, minimeque noxiam naturam converterent, quae quidem hactenus occulta, penituſque incomperta eſſe videntur (*u*). Sed alius ſuppetit aërem depurandi modus, qui, etſi in uſum revocari vix poſſit non parum tamen facit ad confirmandum noxiam aëris vim vaporibus eſſe adſcribendam. Cum enim vapores minus quam aër elaſtici ſint, & aëre rarefacto minus quam ipſe dilatentur, ſemel autem ab eodem ſeparati, nonniſi lente, ac tarde cum ipſo iterum permiſceantur (Diſſert. praec. §. 12. 13.), propterea alterna, ac repetita rarefactione, ac condenſatione aër maxima ex parte vaporibus expurgatur. Et hoc quidem artificio paſſerculum in eodem aëre alterne, & repetito ad dimidium rarefacto, ac ad nativam denſitatem reſtituto per hor. 3. 50′ vivum ſervavi (*v*), cum in aëris immoti aequali quantitate par paſſerculus h. 1. 11′ interiiſſet. Sed de peculiaribus quibuſdam hujus experimenti adjunctis, deque aliis aërem depurandi modis accuratiora alias me ſpero prolaturum.

(*u*) De Halesii experimentis ſale tartari inſtitutis dubitationes noſtras propoſuimus tom. praec. §. 46., quae eo firmiores videntur, quod vapores nocui aquoſi non ſint §. 39. tum quod oleum tartari, aqua jam ſaturatum minorem quidem quam ſal tartari, aliquem tamen effectum produxerit (exp. 116.), qui nullus eſſe debuiſſet, ſi in humidi abſorptione vis corrigens poſita eſſet: ſimiliter in recipiente induto tela lanea oleo tartari imbuta flammam aeque perduraſſe vidit, ac in nudo, etſi $\frac{1}{8}$ recipientis a tela occuparetur (exp. 117. p. 231.) verum & abſorptus aër $\frac{1}{8}$ minor ſignificare videtur flammam tantumdem minorem fuiſſe (§. 12. 30.) ideo in anguſtiori ſpatio aeque perduraſſe.

(*v*) Scilicet paſſerculus incluſus erat phiala, cujus orificium flaccida ampla veſica obturabatur: phiala vero ipſa ſub recipiente pneumatico poſita erat, quemadmodum §. 19. Hujuſmodi experimentum a Boyleo olim in alium finem fuerat tentatum, ut ſcilicet decerneret num animalia rariori aëri aſſueſcere poſſent (nov. exp. pneum. tit. XIV. & in tranſ. n. 63. art. 1. eodem tit.), idque ſibi alias repetendum propoſuerat (ib. in poſt ſcripto.)

FOELICIS

FELICIS VALLE
TAURINENSIS
FLORULA CORSICAE
EDITA
A CAROLO ALLIONO.

*Scripsi olim * periisse totam illam suppellectilem herbarum, quas in Insula Corsicae legit Cl.* VALLE, *& fasciculum maritimarum Stirpium, quas acquisieram, ad Savonae territorium pertinere. Certior factus cum fuerim hasce stirpes etiam in Insula Corsicae circa* S. Fiorenzo *ab eodem fuisse collectas, in Botanicorum commodum eas recenseo, additis rariorum icone & descriptione.*

ACHILLEA foliis lanceolatis obtusis acute serratis. *Linn. syst. p.* 1224.
Balsamita minor. *Dod. pempt.* 295.

AGROSTEMMA glabra, foliis lineari lanceolatis, petalis emarginatis coronatis. *Linn. syst. p.* 1038.
Lychnis foliis glabris calyce duriore. *Bocc. sic.* 27.

ALISMA foliis ovatis acutis, fructibus obtuse trigonis. *Linn. syst. p.* 993.
Plantago aquatica. *Cam. epit.* 264.

ALLIUM caule planifolio umbellifero, foliis inferioribus hirsutis, staminibus subulatis. *Linn. syst. p.* 977.
Moly angustifolium umbellatum. *Bauh. pin.* 75.

ALO-

* V. Rar. ped. spec. pag. 23.

Alopecurus panicula villosa oblonga folio involuto. *Linn. syst. p.* 871.

Gramen alopecurum minus, spica longiore. *Bauh. pin.* 4.

Andryala *Ger. galloprov. p.* 171.

Sonchus villosus luteus major, & minor. *Bauh. pin.* 124.

Anthyllis herbacea foliis quaterno pinnatis, floribus lateralibus. *Linn. syst. p.* 1160.

Trifolium halicacabum. *Cam. hort.* 171. *t.* 47.

Anthyllis fruticosa foliis pinnatis aequalibus, floribus capitatis. *Linn. syst. p.* 1160.

Barba jovis pulchre lucens. *Bauh. hist.* 1. *p.* 885.

Antirrhinum foliis ternis ovatis. *Lin. syst. p.* 1160.

Linaria triphilla minor lutea. *Bauh. pin.* 212.

Antirrhinum foliis hastatis alternis, caulibus procumbentibus, corollis calcaratis. *Linn. syst. p.* 1110.

Elatine folio acuminato in basi auriculato, flore luteo. *Bauh. pin.* 253.

Antirrhinum procumbens ramosum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimis, floribus candatis axillaribus. *Misc. Taurin. tom.* 1. *p.* 88.

Hujus brevem descriptionem dedimus l. c., modo iconem exhibemus. Tab. I.

Arenaria foliis subulatis subtus hispidis. *Linn. syst. p.* 1033.

Arum acaule, foliis cordato-oblongis, spatha inflexa, spadice incurvo. *Linn. syst. p.* 1250.

Arisarum latifolium majus. *Bauh. pin.* 196.

Asphodelus caule nudo, foliis strictis subulatis striatis subfistulosis. *Linn. syst. p.* 982.

Asphodelus minor. *Clus. hist.* 1. *p.* 197.

Aster foliis lanceolatis integerrimis carnosis glabris, ramis inaequalibus, floribus corymbosis. *Linn. syst. p.* 1216.

Tripolium majus caeruleum. *Bauh. pin.* 267.

Astragalus caulescens procumbens, leguminibus subulatis recurvatis glabris. *Linn. syst. p.* 1174.

Securidaca lutea minor corniculis recurvis. *Bauh. pin.* 349.

Astragalus caulescens procumbens leguminibus capitatis cordatis acutis hirsutis complicatis. *Linn. syst. p.* 1174.
Astragalus hispanicus siliqua epiglottidi similis flore purpureo major. *Herm. lugdb. t.* 75.

Bellis caule subfolioso. *Linn. syst. p.* 1220.
Bellis leucanthemum annuum Italicum. *Mich. gen. p.* 34.

Briza spiculis cordatis, flosculis septendecim. *Linn. syst. p.* 875.
Gramen tremulum maximum. *Bauh. pin.* 2. *Scheuch. gram,* 204.

Bunias siliculis ovatis laevibus ancipitibus. *Linn. syst. p.* 1136.
Eruca maritima italica, siliqua hastae cuspidi simili. *Bauh. pin.* 99.

Bupleurum involucris universalibus nullis, foliis perfoliatis. *Linn. syst. p.* 953.
Perfoliata vulgatissima arvensis. *Bauh. pin.* 277.

Butomus. *Linn. syst. p.* 1010.
Juncus floridus major. *Bauh. pin.* 112.

Calendula seminibus radii cymbiformibus echinatis, disci bicornibus. *Linn. hort. cliff.* 425.
Caltha arvensis. *Bauh. pin.* 275.

Campanula caule dichotomo, foliis sessilibus utrinque dentatis, floralibus oppositis. *Linn. syst. p.* 295.
Rapunculus minor foliis incisis. *Bauh. pin.* 92.

Campanula foliis radicalibus reniformibus, caulinis linearibus. *Linn. syst. p.* 925.
Campanula minor rotundifolia vulgaris. *Bauh. pin.* 93.

Cardamine foliis pinnatis, axillis stoloniferis. *Linn. syst. p.* 1131.
Nasturtium aquaticum majus, & amarum. *Bauh.* 3. *pin.* 104.

Cata-

Catananche squamis calycinis inferioribus ovatis. *Linn. syst. p.* 1197.

Chondrilla caerulea, cyani capitulo. *Bauh. pin.* 130.

Centaurea calycibus setaceo spinosis, foliis decurrentibus sinuatis spinosis. *Linn. syst. p.* 1232.

Carduus galactites. *Bauh. hist.* 3. *p.* 54.

Chrysanthemum . . . . . .

Chrysanthemum latifolium. *Bauh. hist.* 3. *p.* 105.

Tota planta leviter pilosa est. Folia amplexicaulia cum auriculis; inferiora spatulata, superiora fere linearia, omnia brevibus, & acutis dentibus simplicibus secta. Squamae calycis membranaceae, ut in chrysanthemo segetum, *sed sub hirsutae. Semiflosculi lutei longiores, & graciliores quam in* chrysanthemo segetum, *viginti circiter.*

Cistus arborescens foliis linearibus sessilibus, utrinque pubescentibus trinervis, alis nudis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus ladanifera monspeliensium. *Bauh. pin.* 467.

Cistus herbaceus exstipulatus, foliis oppositis trinerviis, racemis ebracteatis. *Linn. syst. p.* 1078.

Helianthemum flore maculoso. *Col. ecphr.* 2. *p.* 78. *t.* 77.

Cistus arborescens, foliis oblongis tomentosis incanis sessilibus supra enerviis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus mas folio oblongo incano. *Bauh. pin.* 464.

Cistus . . . . . .

Chamaecistus luteus toroso folio hispanicus. *Barrel. ic.* 436.

Cistus frutescens foliis ovatis petiolatis utrinque hirsutis, alis nudis. *Linn. syst. p.* 1077.

Cistus foemina folio salviae. *Bauh, pin.* 464.

Cistus suffruticosus stipulatus, erectus, foliis oblongo ovatis, acuminatis, subtus subincanis, minime ciliatis. *V. Tab. II. Plurimum accedit ad* Helianthemum vulgare flore luteo C. B. *a quo distinguitur foliis ex ovato sensim acuminatis, nec ellipticis, obscure virentibus, brevissime pilosis, nullis ciliatis. Caules duri lignosi, subrubentes, rotundi, subincani,*

cani , *& aliquantulum piloſi ſunt in hac ciſti ſpecie.*

CLYPEOLA perennis ſiliculis bilocularibus ovatis diſpermis. *Linn. ſyſt. p.* 1130.

Thlapſi narbonenſe centunculi anguſto folio. *Tabern. ic.* 461.

CNEORUM. *Linn. ſyſt. p.* 867.

Chamaelea tricoccos. *Bauh. pin.* 462.

CONVOLVULUS foliis palmatis cordatis ſericeis, lobis repandis, pedunculis bifloris. *Linn. ſyſt. p.* 922.

Convolvulus argenteus folio althaeae. *Bauh. pin.* 295.

CONVOLVULUS foliis linearibus acutis, caule ramoſo ſubdichotomo, calycibus mucronatis piloſis. *Linn. ſyſt. p.* 923.

Convolvulus linariae folio. *Bauh. pin.* 295.

CONVOLVULUS foliis reniformibus, pedunculis unifloris. *Linn. ſyſt. p.* 924.

Soldanella maritima minor. *Bauh. pin.* 295.

CORIS. *Linn. ſyſt. p.* 931.

Coris caerulea maritima. *Bauh. pin.* 280.

CYNOSURUS paniculae ſpiculis ſterilibus pendulis ternatis, floribus ariſtatis. *Linn. ſyſt.* 836.

Gramen barcinonenſe panicula denſa aurea. *Tournef. inſt.* 523.

CYTISUS floribus ſubſeſſilibus, pedunculatiſque, foliis conduplicatis tomentoſis, caulibus fruticoſis. *Linn. ſyſt. pag.* 1167.

Trifolium argenteum, floribus luteis. *Bauh. hiſt.* 2. *p.* 359.

ECHIUM caule ſimplici erecto, foliis caulinis lanceolatis hiſpidis, floribus ſpicatis lateralibus. *Linn. ſyſt. p.* 916.

Echium vulgare. *Bauh. pin.* 254.

ECHIUM calycibus fructeſcentibus diſtantibus, caule procumbente. *Linn. ſyſt. p.* 916.

Echium creticum latifolium rubrum. *Bauh. pin.* 254.

EUPHORBIA umbella multifida: dichotoma, involucellis ſubcordatis: primariis triphyllis, caule arboreo. *Linn. ſyſt. p.* 1050.

Tithy-

Tithymalus dendroides. *Cam. epit.* 965.

EUPHORBIA umbella quinquefida: trifida, dichotoma, involucellis diphyllis reniformibus, foliis amplexicaulibus, cordatis serratis. *Linn. syst. p.* 1049.

Tithymalus characias, folio serrato. *Bauh. pin.* 290.

EUPHORBIA umbella quinquefida, trifida, bifida, involucellis ovatis, petalis integris, fol. lanceolatis subpilosis apice serrulatis. *Linn. syst. p.* 1049.

Tithymalus paluſtris villoſus mollior erectus. *Barr. rar.* 41. *t.* 885.

EUPHORBIA dichotoma; fol. integerrimis semicordatis, floribus solitariis axillaribus, caul. procumbentibus. *Linn. syst. p.* 1048.

Peplis maritima folio obtuso. *Bauh. pin.* 293.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis lanceolatis, foliis linearibus. *Linn. syst. p.* 1048.

Tithymalus S. Esula exigua. *Bauh. pin.* 291.

EUPHORBIA umbella subquinquefida simplici, involucellis ovatis: primariis triphyllis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoso. *Linn. syst. p.* 1048.

Tithymalus maritimus spinosus. *Bauh. pin.* 291.

EUPHORBIA umbella trifida: dichotoma, involucellis ovatis, fol. integerrimis obovatis petiolatis. *Linn. syst. p.* 1048.

Peplus S. Esula rotunda. *Bauh. pin.* 292.

EUPHORBIA umbella suboctifida: bifida, involucellis subovatis, fol. spathulatis patentibus carnosis mucronatis margine scabris. *Linn. syst. p.* 1050.

Tithymalus myrsinites legitimus. *Cluſ. hist.* 2. *p.* 189.

EUPHORBIA umbella quadrifida: bifida, foliis cuneiformi-linearibus tridentatis. *V. Tab. III.*

Procumbere videtur haec Euphorbiae *species, quae ex radice alba simplici tortuosa varios fundit cauliculos semipalmares. Folia glabra habet sessilia sublinearia in fine ampliora, & tridentata. Umbella quadrifida. Involucri universalis folia*

quatuor

quatuor ex cordato ampliori principio, deinde linearia apice tridentato. Umbellula bifida. Involucella diphilla foliis amplioribus. Fructus glabri.

EUPHORBIA umbella quinquefida : dichotoma involucellis cordatis acutis, foliis lineari-lanceolatis, ramis floriferis. *Linn. hist. p.* 1049.
Tithymalus annuus lunato flore linariae folio longiore. *Mor. ox.* 111. *p.* 339.

EUPHRASIA foliis dentato-palmatis, floribus ſubcapitatis. *Linn. ſyſt. p.* 1107.
Euphraſia tertia latifolia pratenſis. *Col. ecphr.* 200. *t.* 201. *f.* 2.

FILAGO floribus ſeſſilibus terminalibus, foliis floralibus majoribus. *Linn. ſyſt. p.* 1235.
Gnaphalium roſeum hortenſe. *Bauh. pin.* 263.

FRANCHENIA foliis obovatis retuſis ſubtus pulveratis. *Linn. ſyſt. p.* 989.
Frankenia maritima quadrifolia ſupina, chamaeſyces folio, & facie. *Mich. gen.* 23.

FUMARIA pericarpiis monoſpermis racemoſis, caule diffuſo. *Linn. ſyſt. p.* 1153.
Fumaria officinarum, & dioſcoridis. *Bauh. pin.* 143.

GALIUM foliis verticillatis lineari-ſetaceis, pedunculis folio longioribus, *Linn. ſyſt.* 892.
Galium nigropurpureum montanum tenui folium. *Col. ecphr.* 1. *p.* 298.

GALEOPSIS internodiis caulinis aequalibus : verticillis omnibus remotis. *Linn. ſyſt. p.* 1100.
Sideritis arvenſis anguſtifolia rubra. *Bauh. pin.* 233.

GENTIANA corollis octofidis, foliis perfoliatis. *Linn. ſyſt. p.* 952.
Centaurium luteum perfoliatum. *Bauh. pin.* 278.

GERANIUM pedunculis multifloris calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis ſublobatis. *Linn. ſyſt. p.* 1143.

Gera-

Geranium folio althaeae. *Bauh. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis ternatis lobatis. *Linn. syst. p.* 1143.

Geranium acu longissima. *Bauh. pin.* 319.

GLOBULARIA caule fruticoso, foliis lanceolatis tridentatis, integrisque. *Linn. p.* 888.

Alypum monspeliensium, s. Frutex terribilis. *Bauh. hist.* 1. *p.* 598.

GLOBULARIA caule herbaceo, foliis radicalibus tridentatis, caulinis lanceolatis. *Linn. syst. p.* 888.

Bellis caerulea, caule folioso. *Bauh. pin.* 262.

GNAPHALIUM foliis linearibus, caule fruticoso ramoso, corymbo composito. *Linn. syst. p.* 1210.

Elichrysum s. Staechas citrina angustifolia. *Bauh. pin.* 264.

GNAPHALIUM caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus. *Linn. sp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum nostras stoechadis citrinae foliis tenuissimis. *Pluk. alm.* 172. *t.* 298. *f.* 2.

GNAPHALIUM caule simplicissimo foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo composito terminali. *Misc. Taurin. tom.* 1. *p.* 95. *cum descript.*

Hujus iconem exhibet Tab. IV.

HIPPOCREPIS leguminibus sessilibus solitariis. *Linn. syst. p.* 1169.

Ferrum equinum siliqua singulari. *Bauh. pin.* 349.

HYOSCYAMUS foliis petiolatis, floribus sessilibus. *Linn. syst. p.* 932.

Hyoscyamus albus major. *Bauh. pin.* 169.

HYOSERIS fructibus subglobosis glabris, caule ramoso. *Linn. syst. p.* 1196.

Hedypnois annua. *Tournef. inst.* 478.

HYOSERIS scapis unifloris nudis, foliis glabris lyrato-hastatis angulatis. *Linn. syst. p.* 1196.

Dens

Dens leonis minor foliis radiatis. *Bauh. pin.* 129.

ILLECEBRUM floribus bracteis nitidis obvallatis, caulibus procumbentibus, fol. laevibus. *Linn. ſyſt. p.* 943.

Paronychia hiſpanica. *Cluſ. hiſt.* 2. 183.

INULA foliis dentatis hirſutis; radicalibus ovatis, caulinis lanceolatis amplexicaulibus, caule paucifloro. *Linn. ſyſt. p.* 1218.

Aſteris altera ſpecies apula. *Col. ecphr.* 1. *p.* 251. *t.* 253.

INULA foliis oblongis integris hirſutis caule piloſo corymboſo floribus confertis. *Linn. ſyſt. p.* 1218.

Conyza 3. auſtriaca. *Cluſ. hiſt. xx.*

LAGURUS ſpica ovata ariſtata. *Linn. ſyſt. p.* 878.

Gramen ſpicatum tomentoſum longiſſimis ariſtis donatum. *T. Scheuch. gram.* 58.

LAPSANA calycibus fructus undique patentibus, radiis ſubulatis, foliis lanceolatis indiviſis. *Linn. ſyſt. p.* 1197.

Hieracium ſiliqua falcata, *Bauh. pin.* 128.

LATHYRUS pedunculis unifloris cirrho terminatis, cirrhis diphyllis: foliolis linearibus. *Linn. ſyſt. p.* 1164.

Lathyrus anguſtiſſimo folio, ſemine anguloſo. *Tournef. inſt.* 395.

LATHYRUS pedunculis unifloris, cirrhis aphyllis, ſtipulis ſagittato-cordatis. *Linn. ſyſt. p.* 1164.

Vicia lutea, foliis convolvuli minoris. *Bauh. pin.* 345.

LAVANDULA foliis lanceolato-linearibus, ſpica comoſa. *Linn. ſyſt. p.* 1097.

Staechas brevioribus ligulis. *Cluſ. hiſt.* 1. *p.* 344.

LAVATERA caule arboreo, foliis ſeptemangularibus tomentoſis plicatis, pedunculis confertis unifloris axillaribus. *Linn. ſyſt. p.* 1147.

Malva arboreſcens. *Dod. pempt.* 653.

LEPIDIUM foliis lanceolatis amplexicaulibus dentatis. *Linn. ſyſt. p.* 1127.

Draba

Draba umbellata, five draba major capitulis donata. *Bauh. pin.* 109.

Linum calycibus fubulatis, foliis lanceolatis ftrictis, mucronatis, margine fcabris. *Linn. fyft. p.* 968.

Pafferina lobelii. *Bauh. hift.* 3. *p.* 454.

Lotus leguminibus fubquinatis, arcuatis compreffis, caulibus diffufis. *Linn. fyft. p.* 1179.

Lotus peculiaris filiquofa. *Cam. hort.* 91. *t.* 25.

Lotus capitulis aphyllis, foliis feffilibus quinatis. *Linn. fyft. p.* 1179.

Dorycnium monfpelienfium. *Lob. ic.* 51.

Lotus capitulis dimidiatis, caule diffufo ramofiffimo, foliis tomentofis. *Linn. fyft. p.* 1179.

Lotus filiquofa maritima lutea cytifi facie. *Barrel. ic.* 1031.

Lysimachia calycibus corollam fuperantibus, caule erecto ramofiffimo. *Linn. fyft. p.* 919.

Linum minimum ftellatum. *Bauh. pin.* 214.

Lythrum foliis alternis linearibus, floribus hexandris. *Linn. fyft. p.* 1045.

Salicaria hyffopi folio latiore. *Hall. jen.* 147. *t.* 2. *f.* 3.

Medicago pedunculis racemofis, leguminibus cochleatis fpinofis, caule procumbente tomentofo. *Linn. fyft. p.* 1180.

Medica marina. *Cluf. hift. p.* 243.

Medicago leguminibus reniformibus, margine dentatis, foliis pinnatis. *Linn. fyft. p.* 1180.

Loto affinis filiquis hirfutis circinnatis. *Bauh. pin.* 333.

Medica pedunculis multifloris, leguminibus cochleatis fpinulis hamatis, ftipulis integris. *Ger. Galloprov. p.* 518.

Medica echinata hirfuta. *Bauh. hift. p.* 386.

Menyanthes foliis cordatis integerrimis, corollis ciliatis. *Linn. fyft. p.* 918.

Nymphaea lutea minor, flore fimbriato. *Bauh. pin.* 194.

Myosotis feminibus nudis, foliis hifpidis, racemis foliofis. *Linn. fyft. p.* 913.

Echium luteum minimum. *Bauh. pin.* 255.

Ononis pedunculis unifloris filo subterminatis, foliis ternatis stipulis dentatis, *Linn. syst. p.* 1160.

Anonis pusilla villosa, & viscosa purpurascente flore. *Tourn. inst.* 408.

Orchis rad. subrotundis, galea longissime rostrata, labello vomerem referente *Hall. orch. n.* 6.

Orchis macrophilla. *Col. ecphr. p.* 321.

Orchis radicibus subrotundis labello holosericeo emarginato, medio processu brevissimo *Hall. orch. n.* 5.

Orchis fucum referens major foliis superioribus candidis, & purpurascentibus. *Bauh. pin.* 83.

Ornithopus foliis ternatis subsessilibus, impari maximo. *Linn. syst. p.* 1168.

Scorpioides postulacae folio. *Bauh. pin.* 287.

Ornithopus foliis pinnatis, leguminibus subarcuatis, *Linn. syst. p.* 1168.

Ornithopodium minus. *Bauh. pin.* 350.

Othonna foliis pinnatifidis tomentosis, laciniis sinuatis; caule fruticoso. *Linn. syst. p.* 1235.

Jacoboea maritima. *Bauh. pin.* 131.

Papaver capsulis subglobosis torosis hispidis, caule folioso multifloro. *Linn. syst. p.* 1072.

Argemone capitulo breviore. *Bauh. pin.* 172.

Passerina foliis carnosis extus glabris, caulibus tomentosis. *Lynn. syst. p.* 1004.

Thymelaea tomentosa, foliis sedi minoris. *Bauh. pin.* 463.

Phillyrea foliis lanceolatis integerrimis. *Lin. hort. Cliff.*

Phillyrea angustifolia. *Bauh. pin.* 476.

Pistacia foliis abrupte pinnatis: foliolis lanceolatis. *Linn. syst. p.* 1290.

Lentiscus vulgaris. *Bauh. pin.* 399.

Pistacia foliis impari-pinnatis: foliolis ovatolanceolatis. *Linn. syst. p.* 1290.

Tere-

Terebinthus vulgaris. *Bauh. pin.* 400.

PLANTAGO fol. linearibus dentatis, scapo tereti. *Linn. syst.* p. 896.

Coronopus sylvestris hirsutior. *Bauh. pin.* 190.

PLANTAGO caule ramoso suffruticoso, foliis integerrimis, spicis aphyllis. *Linn. syst.* p. 896.

Psyllium majus erectum. *Bauh. pin.* 191.

PLANTAGO foliis lanceolatis flexuosis villosis, spica cylindrica erecta, scapo tereti foliis longiore. *Linn. syst.* 895.

Holosteum hirsutum albicans majus. *Bauh. pin.* 190.

POLYGALA floribus cristatis racemosis, caulibus herbaceis simplicibus procumbentibus, fol. lineari lanceolatis. *Linn. syst. p.* 1154.

Polygala major. *Bauh. pin.* 215.

RHAMNUS inermis floribus divisis stigmate triplici. *Linn. syst. p.* 937.

Phylica elatior. *Bauh. pin.* 477.

RUBIA foliis senis. *Linn. syst. p.* 893.

Rubia sylvestris aspera. *Bauh. pin.* 33.

RUMEX floribus hermaphroditis: valvulis dentatis nudis, pedicellis planis reflexis. *Linn. syst. p.* 990.

Acetosa ocymi folio, bucephalophoros. *Col. ecphr.* 1. *p.* 151. *t.* 150.

SAGITTARIA foliis sagittatis acutis. *Linn. syst. p.* 1270.

Sagitta aquatica minor latifolia. *Bauh. pin.* 194.

SALVIA fol. sinuato-serratis, corollis calyce angustioribus. *Linn. syst. p.* 854.

Horminum verbenacae laciniis angustifolium. *Triumf. obs.* 66. *t.* 66.

SCIRPUS culmo tereti nudo, spica subovata imbricata. *Linn. syst. p.* 867.

Scirpus equiseti capitulo majore. *T. Scheuchz. gram.* 360.

Scorpiurus pedunculis subquadrifloris, leguminibus extrorsum spinis confertis acutis. *Linn. syst. p.* 1169.
Scorpioides bupleuri folio, corniculis asperis magis in se contortis, & convolutis. *Moris. hist.* 2. *p.* 127. *s.* 2. *t.* 11. *f.* II.

Scorzonera foliis linearibus dentatis acutis, caule erecto. *Linn. syst. p.* 1191.
Scorzonera foliis laciniatis. *Tournef. inst.* 477.

Scrophularia foliis cordatis: superioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris. *Linn. syst. p.* 1113.
Scrophularia peregrina. *Cam. hort.* 157. *t.* 43.

Scrophularia foliis cordatis, pedunculis axillaribus solitariis dichotomis. *Linn. syst. p.* 1114.
Scrophularia flore luteo. *Bauh. pin.* 236.

Sherardia foliis omnibus verticillatis, floribus terminalibus. *Linn. syst. p.* 590.
Rubeola arvensis repens caerulea. *Bauh. pin.* 334.

Sideritis herbacea decumbens, calycibus spinosis: labio superiore indiviso. *Linn. syst. p.* 1098.
Sideritis genus verticillis spinosis. *Bauh. pin. hist.* 3. *p.* 428.

Silene calycibus fructiferis pendulis inflatis angulis decem scabris. *Linn. syst. p.* 1032.
Viscago hirsuta sicula, lychnidis aquaticae facie supina. *Dill. elth.* 421. *t.* 312. *f.* 404.

Silene hirsuta, petalis emarginatis, flor. erectis, fructibus reflexis pedunculatis alternis. *Linn. syst. p.* 1031.
Viscago cerastii foliis, vasculis pendulis anglica. *Dill. elth.* 417. *t.* 309. *f.* 398.

Sisymbrium siliquis axillaribus sessilibus subulatis aggregatis, fol. repando-dentatis. *Linu. syst. p.* 1132.
Erysimum polyceratium s. corniculatum. *Bauh. pin.* 101.

Smilax caule aculeato angulato, foliis dentato-aculeatis, cordatis novemnerviis. *Linn. syst. p.* 1292.
Smilax aspera fructu rubente. *Bauh. pin.* 296.

Sonchus foliis omnibus integris denticulato spinosis, ramis unifloris, semiflosculis quinquedentatis. *Enum. nic. p.* 85. Sonchus pedunculo nudo, foliis lanceolatis amplexicaulibus indivisis, retrorsum argute dentatis. *Linn. syst. pag.* 1192. ?

Spartium foliis ternatis, ramis angulatis spinosis. *Linn. syst. p.* 1156.
Acacia trifolia. *Bauh. pin.* 392.

Stachis ramis ramosissimis, foliis lanceolatis glabris. *Linn. syst. p.* 1110.
Sideritis viscosa cretica bitumen redolens. *Zan. hist.* 136.

Statice caule nudo paniculato, foliis spathulatis retusis. *Linn. syst. p.* 967.
Limonium maritimum minus, foliis cordatis. *Bauh. pin.* 192.

Tamus foliis cordatis indivisis. *Linn. syst. p.* 1292.
Bryonia sylvestris baccifera. *Bauh. prodr.* 135.

Teucrium foliis subtriscupidatis linearibus, floribus sessilibus. *Linn. syst. p.* 1094.
Chamaepitys moschata foliis serratis. *Bauh. pin.* 249.

Thlaspi siliculis subrotundis, foliis amplexicaulibus cordatis subserratis. *Linn. syst. p.* 1128.
Thlaspi arvense perfoliatum majus. *Bauh. pin.* 106.

Tragopogon calycibus corolla brevioribus inermibus, foliis lyrato sinuatis. *Linn. syst. p.* 1191.
Chondrilla foliis cichorei tomentosis. *Bauh. pin.* 130.

Tragopogon calycibus corolla radio longioribus, foliis integris nudis, pedunc. superne incrassatis. *Linn. syst. pag.* 1191.
Tragopogon purpuro-caeruleum, porri folio, quod Artefi vulgo. *Bauh. pin.* 274.

Trapa. *Linn. syst. p.* 898.
Tribulus aquaticus. *Bauh. pin.* 194.

TRIFOLIUM ſpicis ſubovatis, calycibus inflatis, dorſo gibbis, caulibus proſtratis. *Linn. ſyſt. p.* 1178.

Trifolium pratenſe folliculatum. *Bauh. pin.* 329.

TRIFOLIUM ſpicis villoſis ovalibus, dentibus calycinis ſetaceis aequalibus. *Linn. ſyſt. p.* 1177.

Trifolium arvenſe humile ſpicatum s. Lagopus. *Bauh. pin.* 328.

TRIFOLIUM ſpicis villoſis conico-oblongis, dentibus calycinis ſetaceis ſubaequalibus, foliolis linearibus. *Linn. ſyſt. p.* 1177.

Trifolium montanum anguſtiſſimum ſpicatum. *Bauh. pin.* 328.

VALERIANA floribus monandris, foliis pinnatifidis. *Linn. ſyſt. p.* 860.

Valeriana foliis calcitrapae. *Bauh. pin.* 164.

VERONICA racemis lateralibus, fol. ovatis rugoſis dentatis ſeſſilibus, caule debili. *Gerar. p.* 324. *Linn. ſyſt. p.* 849.

Chamaedrys ſpuria minor rotundifolia. *Bauh. pin.* 249.

VERONICA, floribus ſolitariis, fol. cordatis inciſis pedunculo longioribus. *Linn. ſyſt. p.* 849.

Alſine veronicae foliis, floſculis cauliculis adhaerentibus. *Bauh. pin.* 250.

VICIA leguminibus ſeſſilibus reflexis piloſis pentaſpermis, corollae vexillis villoſis. *Linn. ſyſt. p.* 1166.

VICIA ſiliquis ſeſſilibus erectis foliis imis ovatis, ſuperioribus linearibus. *Hall. helv. p.* 598.

Vicia anguſtifolia. *Riv. t.* 55.

URTICA foliis oppoſitis ovatis ſerratis, amentis fructiferis globoſis. *Linn. ſyſt. p.* 1265.

Urtica urens pilulas ferens. *Bauh. pin.* 232.

ADDI-

ADDITION
AUX RÉFLEXIONS
Sur le Fluide Élastique
PAR M. DE SALUCE.

IL m'est tombé entre les mains un livre, qui a pour titre *l'Artillerie raisonnée*, après que mon mémoire a été imprimé, & j'y ai trouvé quelques propositions, qui sont entiérement opposées à ce que j'ai avancé, & qui en même-tems ne me semblent pas appuyées ni à une théorie fort-éclairée, ni à des expériences fort-exactes: je ne rapporterai que les plus frappantes de celles que j'ai déja parcouru.

1. La premiere (*pag.* 86.) porte en substance, qu'en parvenant à disposer le canal de la lumiére de maniére que le feu prenne au centre de la charge, il en résulte des petites différences dans les portées; je ne lui contesterai pas le fait, lorsque la charge sera proportionnée à l'arme; mai je dirai seulement en passant, que comme on réüssit à accélérer par là l'inflammation totale de la poudre, on peut aussi augmenter la charge, c'est ensuite à l'expérience à juger si l'avantage, qui résulte ainsi d'un plus grand effort, n'est point balancé par bien d'autres inconvéniens, & entr' autres par ceux que nous avons indiqué (*pag.* 138.).

2. La seconde proposition (*pag.* 91.) est que l'objet des chambres, qu'on fait aux piéces de 24 & de 16, *est de diminuer l'effort de la poudre sur la lumiére*, ce qui est absurde: car cet effort se faisant par la distribution uniforme du fluïde dévélopé, la pression est égale dans tous les points: il se serait d'ailleurs exprimé plus exactement dans

la

la seconde raison, qu'il apporte, savoir de *la plus grande épaisseur* de l'arme dans cet endroit, s'il avait dit, que l'effet en est modifié.

3. La troisiéme, qu'il parait déduire de l'expérience (*pag.* 105.) ne me semble pas mériter d'être réfutée sérieusement; je ne fairai qùe la rapporter dans son entier, & je prierai les Lecteurs de voir ce que j'ai dit à cet égard dans le Chap.[e] premier; *L'on a trouvé*, dit-il, *que les piéces chargées sans bouchon sur la poudre portoient réguliérement plus loin, que celles qu'on tirait avec des bouchons refoulés, savoir de six ou huit coups sur la poudre, suivant l'usage, & de six sur le boulet &c.* Nous observerons enfin, qu'il faut qu'il ait employé de très-petites quantités de poudre dans les piéces, dont il a fait usage, & cela devient alors très-naturel; mais c'est un des préjugés, dont on n'a pas encore pû se défaire, & qùi est la source de beaucoup de maximes équivoques, & souvent fausses; nous en avons un exemple dans *la théorie du jet des bombes*, que les Auteurs modernes n'ont pas encore voulu abandonner, quelqu'un d'entr'eux s'efforçant même de nous persuader, qu'elle est assès exacte, & que les différences, qui résultent dans la pratique ne sont d'aucune considération : généralement je crois, que les essais en petit dans ce qui regarde l'Artillerie sont non seulement superflus, mais même pernicieux, parceque nous ne connaissons point les loix, suivant lesquelles agissent toutes les causes, qui concourent dans un effet; c'est pour cela aussi que tous les Problèmes qui y ont raport se réduisent en parlant à la rigueur à des cas particuliers.

4. L'expérience nous apprend, que de deux qualités de poudre il arrive souvent, que dans les petites charges une a l'avantage sur l'autre, & que non seulement elle ne le conserve plus dans les grandes (*a*), mais que sa force en est alors diminuée, & j'observe, que c'est celle, qui est plus

(*a*) Manuel de l'Artificier. pag. 16.

plus facile à s'enflammer, jusqu'à un certain point, qui a l'avantage dans les petites charges, & au contraire, que celle qui a moins d'inflammabilité gagne dans le service en grand.

Ne ferait-ce point, parceque dans les grandes charges le plus ou moins grand effort, dépand entiérement de l'intensité de la flamme dont la matière est susceptible, au lieu que dans les petites charges il n'est pas nécessaire, qu'elle soit si grande, parceque elles sont bien-tôt détruites, & qu'elles sont dans un moindre raport avec l'arme, pendant que le diamètre de la lumiére semble en avoir un plus grand dans les petites, que dans les grandes armes?

5. Je ne sais de même pas concevoir ce qu'il prétend déduire par ce raisonnement (*pag.* 142. *à la fin*): *Le peu de longueur de l'ame du canon fait aussi que le boulet perd moins de son mouvement, & qu'il éprouve une moindre résistance de la part de l'air qui s'oppose à sa sortie.* Cette raison de la *moindre résistance de la part de l'air* ne me parait pas conforme aux principes de physique, car la colonne d'air pése & resiste également sur un cilindre, qu'il soit court ou long, puisqu'elle est toujours en équilibre avec le reste de l'Atmosphére. . . . .

ERRATA, ET ADDENDA.

Pag. 6.	lin. 12.	transversum	*lege*	transversim
	24.	&		ei
8.	7.	Ammeniana		Ammaniana
9.	3.	calyci		calyce
9.	18.	un		um den
11.	25.	albidus		dilute violaceus
12.	32.	sulco		& sulco
15.	6.	separat		superat
	18.	aliis		alis
16.	14.	autem		*dele* autem
18.	19.	parum		ex

Pag. 19.	lin. ult.	*Ebro*	*Ebrodunum*
27.	13.	neutrum	neutra
29.	3.	Jeman	Alyſſo M.
31.	23. & 24.	*dele* in M. Chetillon &c. uſque ad provenit	
33.	8.	forte	fere
37.	23.	recentiorem	recentiorum
39.	7.	lutea	lutea ſunt
44.	27.		*dele* ad caulem
45.	7.		*dele* ſynonimum columnae
	14.	ad caulem	amplexicaulibus
Pag. 51.	lin. 28.	*Lamium montanum &c.*	leg. *Lamium garganicum ſubinc. fl. purpuraſc. cum labio ſuperio-crenato D. Micheli apud* Tilli *piſ.*
52.	3.	Cilnopodium	leg. Clinopodium
53.	4.	pſiyllium	pſyllium
53.	10.	. . . . . . 16.	campanulatum
55.	6.	triba	triloba
55.	18.	phiſalodes	phyſalodes
62.	27.	. . . . . . 57.	Cardamine lunaria
63.	7.	viſcoſum	viſcoſa
64.	3.	hirſutus	hirſuta
	19.	ſquarroſum	incarnatum
65.	4.	galloprovinciale	caput galli
66.	17.	biennis	pimpinelloides
69.	14.	ſerpilifolia	ſerpillifolia
70.	19.	*Monoſtylae*	1. *Monoſtylae*
71.	7.	Aquilegia ſilveſtris	Aquilegia ſilveſtris*
	8.	Nigella damaſcena	Nigella damaſcena*
	18.	ulmaria	ulmaria *
73.	11.	*Tetrantherae*	*Pentantherae*
75.	24.	ſcalinus	ſecalinus

Stirpes

Stirpes praetermissae suis locis inserendae.

Pag. 50.		Veronica latifolia *
		Valeriana rubra *
51.	Post *Thymum*	Hyssopus officinalis *
		Satureja juliana *
		hortensis *
		montana *
	Ante *Lamium*	Ocynum basilicum
		frutescens
52.		Melissa grandiflora *
53.		Antirrhinum minus *
		Scrophularia vernalis *
54.	Post *Ilicem aquifolium*	Vitex agnus castus
57.		Aristolochia pistolochia
59.		Santolina annua
62.		Erysinum cheirantoides
65.		Lathyrus articulatus
		Robinia caragana
		Sium siculum
66.		Chaerefolium aromaticum
67.		Malva hispanica
68.		Rhus vernix
		toxicodendron
70.		Crataegus aria *
		Mespilus cotoneaster *
71.		Aquilegia alpina *
71.	Post *Isopyrum*	Ranunculus ficaria *
		sceleratus *
		aconitifolius *
		nivalis *
		bulbosus *
		repens *
		acris *
		arvensis *
		asiaticus

Pag.

Pag. 71. Potentilla verna *
rupestris *
supina
Potentilla *foliis ternatis hirsutis caule erecto umbellifero.* HALL. *gott. p.* 108.
71. Geum montanum *
71. Post *Geum* Drias octopetala *
74. Polygonum divaricatum *
75. Post *cyperum* Scirpus palustris *
76. Post *rutam murariam* Asplenium . . . *lingua cervina foliis costae innascentibus* T.
76. Polipodium cambricum

Pag.	lin.		leg.
80.	5.	praecipuae	praecipue
82.	23.	erupuisse	erupisse
	25.	spatium, exiguum	spatium exiguum
84.	14.	quidquod	quid quod
	28.	centesima	centesimam
86.	19.	tympanitide	tympanite
91.	16.	crusta in	crusta quando in
92.	21.	ut praeterea	ut propterea
144.	pen.	alkalici	alkalicis
148.	7.	bacillo, fit	bacillo fit,
162.	9.	(*k*)	(*l*)
	10.	(*l*)	(*k*)
	17.	Vid. inf. not. *g*.	Vid. inf. not. *q*.
	pen.	admicta	admixta
163.	pen.	*refroit-elle*	*refroidit-elle*
180.	25.	tollerent	tolerent
189.	ult.	elatetium	elaterium
195.	16.	quando	quomodo
	29.	aëri	aëre
198.	7.	quae rarior aër	quo rarior aër
205.	19.	caudatis	caudatis
210.	1.		*dele*

LETTRE

DE M. EULER A M. DE LA GRANGE.

Depuis ma dernière lettre j' ai réussi à ramener au calcul la propagation du Son, en supposant à l' air toutes les trois dimensions, & quoique je ne doute pas que Vous n' y soyés parvenu plus heureusement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers Votre Illustre Société qu' en lui présentant mes Recherches sur ce même sujet.

RECHERCHES SUR LA PROPAGATION DES ÉBRANLEMENS DANS UNE MILIEU ÉLASTIQUE.

En considérant le milieu dans l' état d' équilibre soit sa densité $= 1$, & son élasticité balancée par le poid d' une colomne du même fluide, dont la hauteur $= h$; Je commence par considérer un élément quelconque du fluide qui dans l' état d' équilibre se trouve au point Z (*fig.* 1.) determiné par les trois coordonnées perpendiculaires entr' elles $AX = X$, $XY = Y$ & $YZ = Z$, & que par l' agitation ce même élément ait été transporté en z, dont les coordonnées soient $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$, qui seront certaines fonctions des premiéres X, Y, Z pour un instant donné. Soit donc

$$dx = LdX + MdY + NdZ$$
$$dy = PdX + QdY + RdZ$$
$$dz = SdX + TdY + VdZ.$$

Ensuite je considére un volume infiniment petit de fluide, qui dans l' état d' équilibre ait la figure piramidale $Z\xi\eta\theta$ (*fig.* 2.) rectangulaire, qui par l' agitation soit transporté en $z\lambda\mu\nu$, dont la figure sera aussi piramidale, & posant pour l' état d' équilibre

du point	les coordonnées		
Z	$X,$	$Y,$	Z
ξ	$X+\alpha,$	$Y,$	Z
η	$X,$	$Y+\beta,$	Z
θ	$X,$	$Y,$	$Z+\gamma$

le volume de la piramide $Z\xi\eta\theta$ sera $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$.
On aura ensuite pour l'état d'agitation

du point	les trois coordonnées		
ζ.	$Ax = x,$	$xy = y,$	$y\zeta = \zeta$
λ.	$AL = x + L\alpha,$	$Ll = y + P\alpha,$	$l\gamma = \zeta + S\alpha$
μ.	$AM = x + M\beta,$	$Mm = y + Q\beta,$	$m\mu = \zeta + T\beta$
ν.	$AN = x + N\gamma,$	$Nn = y + R\gamma,$	$n\nu = \zeta + V\gamma$

Il s'agit maintenant de trouver le volume de la nouvelle piramide $\zeta\lambda\mu\nu$, qu'on voit être composée de ces prismes $ymn\zeta\mu\nu + yln\zeta\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylm\zeta\lambda\mu$. Prenant pour cela la solidité de chaque part, on trouvera cette solidité $=$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + n\nu)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(y\zeta + m\mu + n\nu)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(l\lambda + m\mu + n\nu)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(y\zeta + l\lambda + m\mu)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + V\gamma)\,\Delta\, yln \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, ymn \\ +\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta + V\gamma)\,\Delta\, lmn \\ -\frac{1}{3}(3\zeta + S\alpha + T\beta)\,\Delta\, ylm \end{array}\right\} =$$

$$-\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn - \frac{1}{3}T\beta\Delta yln + \frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm.$$

Ensuite

Enſuite on trouve les aires de ces triangles, à cauſe de $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il ſuit

$\Delta ymn = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} MN(2y + Q\beta + R\gamma) - \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) = \frac{1}{2} Q\beta \times xN - \frac{1}{2} R\gamma \times xM = \frac{1}{2} \beta\gamma (NQ - MR)$.

$\Delta yln = \frac{1}{2} xN(2y + R\gamma) + \frac{1}{2} LN(2y + P\alpha + R\gamma) - \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} R\gamma \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xN = \frac{1}{2} \alpha\gamma (LR - NP)$.

$\Delta ylm = \frac{1}{2} xM(2y + Q\beta) + \frac{1}{2} LM(2y + P\alpha + Q\beta) - \frac{1}{2} xL(2y + P\alpha) = \frac{1}{2} Q\beta \times xL - \frac{1}{2} P\alpha \times xM = \frac{1}{2} \alpha\beta (LQ - MP)$.

De-là nous tirons la ſolidité de notre piramide $\zeta\lambda\mu\nu$ dans l'état d'agitation $= -\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ - MR) - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma T (LR - NP) + \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma V(LQ - MP)$, & partant la denſité du milieu agité en ζ ſera $= 1 : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, & poſant Π pour la hauteur de la colomne qui y balance l'élaſticité, nous aurons $\Pi = h : (LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT)$, laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z poſons $d\Pi = EdX + FdY + GdZ$, de ſorte que $E = (\frac{d\Pi}{dX})$, $F = (\frac{d\Pi}{dY})$, $G = (\frac{d\Pi}{dZ})$. Soit pour abréger

 LQV

$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = K$, de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$; si nous concevons dans l'état d'équilibre un point Z' infiniment proche de Z déterminé par ces coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, ce point se trouvera après l'agitation en z', dont les coordonnées seront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$
$$y + PdX + QdY + RdZ,$$
$$z + SdX + TdY + VdZ,$$

donc réciproquement la position du point z' infiniment proche de z dans l'état troublé étant donnée par les coordonnées $X + \alpha$, $Y + \beta$, $Z + \gamma$ son lieu dans l'état d'équilibre sera déterminé par les coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, de sorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K}$$
$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K}$$
$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

Delà l'élasticité en z étant $\Pi = \frac{h}{K}$, elle sera en $z' = \Pi + EdX + FdY + GdZ$, ou bien si nous posons pour abréger

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$$
$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$$
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$$

l'élasticité en z' sera exprimée par $\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$ la densité y étant $\frac{1}{K}$.

Considérons maintenant un parallélepipéde rectangle infiniment petit $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 3.) dont les cotés paralleles à nos

nos coordonnées ſoient $\zeta b = \alpha$, $\zeta c = \beta$, $\zeta d = \gamma$, ſon *volume* ſera $= \alpha\beta\gamma$ & ſa maſſe $= \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Pour connoître les forces, dont ce parallélepipéde eſt ſollicité, cherchons d'abord l'élaſticité du milieu à chacun de ſes angles de la manière ſuivante

du point	les coordonnées			l'élaſticité
ζ	x,	y,	ζ,	Π
b	$x + \alpha$,	y,	ζ,	$\Pi + \frac{A\alpha}{K}$
c	x,	$y + \beta$,	ζ,	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x + \alpha$,	$y + \beta$,	ζ,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K}$
α	x,	y,	$\zeta + \gamma$,	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x + \alpha$,	y,	$\zeta + \gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K}$
γ	x,	$y + \beta$,	$\zeta + \gamma$,	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x + \alpha$,	$y + \beta$,	$\zeta + \gamma$,	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

De-là il eſt clair, que conſidérant les faces oppoſées $\zeta c \alpha \gamma$ & $b d \beta \delta$, les preſſions ſur celle-ci ſurpaſſent les preſſions ſur celle-là de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$; donc l'aire de ces faces étant $\beta\gamma$, il en réſulte une force ſuivant la direction $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$; de la même manière le parallélepipéde ſera pouſſé ſuivant la direction xy par la force $= -\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, & ſuivant la direction $y\zeta$ par la force $= -\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$. Donc la

maſſe

maſſe de ce parallélepipéde étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$ ſi nous introduiſons la hauteur g, par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde, en exprimant le tems écoulé t en ſecondes, nous aurons pour la connoiſſance du mouvement les trois équations ſuivantes.

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA,$$

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB,$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations poſſibles, je ne conſidére ici que les cas où ces agitations ſont quaſi infiniment petites; pour cet effet je poſe $x = X + p$, $y = Y + q$, & $z = Z + r$, de ſorte que p, q, r ſont des quantités infiniment petites; delà nous aurons

$$dp = (L-1)\,dX + M dY + N dZ;$$

$$dq = P dX + (Q-1)\,dY + R dZ$$

$$dr = S dX + T dV + (V-1)\,dZ,$$

& partant à peu-près $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$, & $K = 1$; mais pour le différentiel de Π nous aurons

$$E = -h\left(\left(\frac{dL}{dX}\right) + \left(\frac{dQ}{dX}\right) + \left(\frac{dV}{dX}\right)\right)$$

$$F = -h\left(\left(\frac{dL}{dY}\right) + \left(\frac{dQ}{dY}\right) + \left(\frac{dV}{dY}\right)\right)$$

$$G = -h\left(\left(\frac{dL}{dZ}\right) + \left(\frac{dQ}{dZ}\right) + \left(\frac{dV}{dZ}\right)\right)$$

Enſuite nous trouvons $A = E$, $B = F$, $C = G$. Pour nous débaraſſer encore des autres lettres, remarquons que $L = 1 + \left(\frac{dp}{dX}\right)$, $Q = 1 + \left(\frac{dq}{dY}\right)$, $V = 1 + \left(\frac{dr}{dZ}\right)$ de ſorte qu'outre les coordonnées X, Y, Z, avec le tems t il

il ne reste dans le calcul que les lettres p, q, r, qui marquent le déplacement de chaque point. Car substituant ces valeurs, que nous venons de trouver, le mouvement causé par une agitation quelconque mais fort petite, sera déterminé par les trois équations suivantes

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddq}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddr}{dXdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdY}\right) + \left(\frac{ddq}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dYdZ}\right),$$

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddp}{dXdZ}\right) + \left(\frac{ddq}{dYdZ}\right) + \left(\frac{ddr}{dZ^2}\right).$$

ou bien posant $\left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = u$ nous aurons $\left(\frac{ddp}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dX}\right)$, $\left(\frac{ddq}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dY}\right)$, & $\left(\frac{ddr}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{du}{dZ}\right)$, d'où il est aisé de conclure $\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right)$, d'où il faut déterminer la nature de la fonction u déterminée par les coordonnées X, Y, Z, & le tems t.

Delà il n'est pas difficile de trouver une infinité de solutions particuliéres, comme

$$p = \beta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$q = \gamma\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$
$$r = \delta\varphi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$$

pourvû que $\alpha = \sqrt{2gh(\beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta)}$ où β, γ, δ sont des quantités quelconques, & φ marque une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne on aura toujours le cas d'un certain ébranlement, dont on pourra déterminer la continuation. Mais pour notre dessein il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement initial aura été renfermé dans un petit espace, d'où il s'est répandu ensuite en tout sens.

Soit

Soit donc A le centre de l'agitation primitive & posons $p = Xs$, $q = Ys$, $r = Zs$, & s sera une fonction du tems t, & de la quantité $\surd(XX + YY + ZZ) = V$ qui marque la distance du point A. Donc puisque $ds = dt \left(\frac{ds}{dt}\right) + dV \left(\frac{ds}{dV}\right)$ nous aurons $ds = dt \left(\frac{ds}{dt}\right) + \left(\frac{XdX + YdY + ZdZ}{V}\right) \times \left(\frac{ds}{dV}\right)$, & puis $\left(\frac{dp}{dX}\right) = s + \frac{X^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, $\left(\frac{dq}{dY}\right) = s + \frac{Y^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, $\left(\frac{dr}{dZ}\right) = s + \frac{Z^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, donc $u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right)$; maintenant aiant $\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$, $\left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V}$, notre premiére équation deviendra $\frac{X}{2gb}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$ ou $\frac{1}{2gb}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$, à laquelle se réduisent aussi les deux autres; & l'éloignement du point Z depuis le centre A sera $Vs = s\surd(XX + YY + ZZ) = \surd(pp + qq + rr)$ qui en marque le déplacement par rapport à l'état d'équilibre, de sorte que le rayon d'une couche sphérique, qui dans l'état d'équilibre étoit $= V$, sera à présent $= V + Vs$. Donc si nous posons $Vs = u$, ou $s = \frac{u}{V}$ afin que u exprime le changement de cette couche, la particule u sera déterminée par cette équation

$$\frac{1}{2gb}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Après plusieurs recherches j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas, où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension. Que

φ ζ

φz marque une fonction quelconque de z, & qu'on indique son différentiel de cette façon $d \cdot \varphi z = dz\, \varphi' z$. Cela posé, on verra qu'on satisfait à notre équation en supposant

$$u = \frac{A}{V^2} \varphi [V \pm t \sqrt{(2 g h)}] - \frac{A}{V} \varphi' [V \pm t \sqrt{(2gh)}].$$

Donc pour le commencement de l'agitation nous aurons cette équation $u = \frac{A}{V^2} \varphi V - \frac{A}{V} \varphi' V$; d'où l'on voit que pour appliquer cette formule à la propagation du Son la fonction φz doit toujours être $= 0$ excepté le cas, où la quantité z est extrêmement petite, Or il faut que la fonction $\varphi' z$ ait la même proprieté & encore celle-ci $\varphi'' z$, en supposant $d\varphi' z = dz\, \varphi'' z$, afin que non seulement la quantité u, mais aussi la vitesse $(\frac{du}{dt})$ s'évanoüisse au commencement par tout, excepté dans le petit espace autour de A où s'est fait l'ébranlement primitif.

Que le caractère ψ marque des fonctions discontinues de la même nature, & nous aurons la solution générale qui suit

$$u = \frac{A}{V^2} \varphi [V + t \sqrt{(2gh)}] - \frac{A}{V} \varphi' [V + t \sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B}{V^2} \psi [V - t \sqrt{(2gh)}] - \frac{B}{V} \psi' [V - t \sqrt{(2gh)}]$$

& pour la vitesse

$$(\frac{du}{dt}) = \frac{A \sqrt{(2gh)}}{V^2} \varphi' [V + t \sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{A \sqrt{(2gh)}}{V} \varphi'' [V + t \sqrt{(2gh)}]$$
$$- \frac{B \sqrt{(2gh)}}{V^2} \psi' [V - t \sqrt{(2gh)}]$$
$$+ \frac{B \sqrt{(2gh)}}{V} \psi'' [V - t \sqrt{(2gh)}].$$

Delà il est clair qu'une couche sphérique, dont le rayon $= V$ demeure en repos tant que la formule $V - t\sqrt{(2gh)}$

ne devient afsès petite, ou moindre que le rayon de la petite ſpére ébranlée au commencement; & partant l'agitation primitive ſera répandue à la diſtance $= V$ après le tems t $= \frac{V}{\sqrt{(2gb)}}$ ſecondes, d'où il s'enſuit la même viteſſe du Son que Newton a trouvé, c'eſt-à-dire plus petite que ſelon les expériences. D'où je conclus qu'aïant ſuppoſé dans ce calcul les ébranlemens infiniment petits, leur grandeur cauſe une propagation plus prompte.

Enſuite ces formules nous apprennent que lorſque les diſtances V ſont fort grandes, en ſorte que les termes diviſés par V^2 s'évanouiſſent à l'égard des autres diviſés par V, tant les petits eſpaces u, que les viteſſes $\left(\frac{du}{dt}\right)$ diminuent en raiſon des diſtances; d'où l'on peut juſtement juger de l'affoibliſſement du Son par des grandes diſtances.

Voila mes Recherches que vous pourrés inſérer, MONSIEUR, *dans vôtre ſecond Volume ſi vous le jugés à propos, &c.*

Berlin ce 1.ͤʳ Janvier 1760.



NOU-

NOUVELLES RECHERCHES SUR LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON.

PAR M. DE LA GRANGE.

CHAPITRE PREMIER.

Remarques sur la Théorie de la propagation du Son, donnée par M. Newton.

1. Soient (*fig.* * *plan.* 1.) E, F, G trois particules d'air en repos, placées sur la droite BC à des distances égales l'une de l'autre; imaginons que ces particules parviennent, dans un tems quelconque t, en ε, φ, γ; & supposons avec M. Newton (*Prop.* 47. *liv. II. des Principes Mathématiques*) que la loi de leur mouvement soit renfermée dans une seule courbe PKS (*fig.* ** *plan.* 1.) de telle manière qu'en faisant $PH = t$ & prenant les portions d'arc HI, IK égales entr'elles, & qui aient un rapport donné aux distances primitives EF, FG, les abscisses correspondantes PL, PM, PN soient égales aux espaces parcourus $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$; il est clair qu'on aura $\varepsilon\gamma = EG - LN$; par conséquent, si on suppose que l'élasticité de l'air soit en raison inverse de sa densité, l'élasticité de l'air condensé en $\varepsilon\gamma$ sera à son élasticité naturelle, que je nomme E, en raison inverse de $\varepsilon\gamma$ à EG, ou de $EG - LN$ à EG; donc l'élasticité de la particule F transportée en φ, sera exprimée par $\frac{E \times EG}{EG - LN}$. Par le même raisonnement on trouvera, en coupant dans l'arc PKS, les parties HF, DK égales à HI, IK, & menant les ordonnées FQ, DR, que l'élasticité de la particule E en ε sera $= \frac{E \times EG}{EG - QM}$, & celle de la particule G en $\gamma = \frac{E \times EG}{EG - MR}$, d'où l'excès de l'élasticité de l'air en ε sur son élasticité

en γ sera $E \times EG \times \left(\frac{1}{EG - QM} - \frac{1}{EG - MR}\right) =$ $E \times EG \times \frac{QM - MR}{(EG - QM) \times (EG - MR)} =$ (à cause que les excursions des particules sont fort petites par l' hyp.) $E \times \frac{QM - MR}{EG}$. Cette quantité est la force qui fait mouvoir la partie du milieu ϕ, ou $r\gamma$, dont la masse est $D \times EG$, en posant D pour la densité naturelle de l'air; donc la force accélératrice de la particule φ sera $= \frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2}$; or la loi du mouvement de cette particule demande qu'elle soit sollicitée par une force accélératrice $= \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{DI^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{KH^2}$, h étant la hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems T; donc on doit avoir $\frac{E}{D} \times \frac{QM - MR}{EG^2} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{QM - MR}{KH^2}$ ce qui se réduit, en supposant $KH = \alpha EG$, à $\frac{E}{D} = \frac{T^2}{2b} \times \frac{1}{\alpha^2}$; d' où l'on tire $\alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{T^2 D}{2Eb}\right)}$, la nature de la courbe PKS demeurant indéterminée.

Delà résulte donc cette conclusion, dont l'exactitude ne peut être révoquée en doute, savoir que la loi des mouvemens des particules de l'air, n' est pas unique & déterminée, comme l' a crû M. Newton, mais que, soit celle des pendules adoptée par ce grand Géomètre, soit celle des corps qui tombent par leur pésanteur, que M. Cramer jugeoit absurde & contradictoire, ou toute autre qu'on imagine à volonté, a également lieu & peut être indifféremment emploiée dans la solution Analitique. Je dis dans la *solution Analitique*: car, lorsqu'il s'agira de déterminer cette loi dans des cas particuliers, il faudra encore avoir égard aux premiers ébranlemens des particules, donnés par l'hypotése.

2. J'avois

2. J'avois déja trouvé cette conclusion générale dans le premier Chap. de mes *Recherches sur la nature & la propagation du Son* (*) imprimées dans le Volume précédent; mais elle m'avoit paru alors si paradoxe & si éloignée de la nature de la question que j'avois cru pouvoir la regarder comme une preuve de l'insuffisance des Principes de M. Newton. Or je vais démontrer ici que cette même conclusion est au contraire entiérement conforme à la Théorie de la propagation du Son que j'ai donnée dans le Chap. I. de la seconde Section des *Rech. citées.*

Qu'on considére une particule quelconque de la fibre AD dont la distance à la particule E soit x dans l'état d'équilibre; on trouvera aisément, par la construction ci-dessus, que l'espace parcouru par cette particule dans le tems t sera égal à l'abscisse qui répond à l'arc $PH = t$ diminué d'un arc $= \alpha x$; c'est-à-dire à un arc $= t - \alpha x$. Or quelle que soit la nature de la courbe PHS, il est constant qu'on peut en regarder les arcs, comme des fonctions données des abscisses correspondantes, & de même les abscisses comme des fonctions des arcs; donc l'espace parcouru par une particule quelconque de la fibre AD, pendant le tems t sera exprimé généralement par $\varphi(t - \alpha x)$. Cette formule en faisant $t = 0$ doit représenter les ébranlemens primitifs de la fibre AD; donc, si on suppose comme dans l'endroit cité des *Rech. préc.* qu'une particule quelconque E soit ébranlée par le corps sonore, il faudra que la fonction $\varphi(-\alpha x)$ soit toujours nulle, excepté lorsque $x = 0$. Par conséquent la formule générale $\varphi(t - \alpha x)$ aura seulement une valeur réelle, lorsque $t - \alpha x = 0$, savoir $x = \frac{t}{\alpha}$; par où l'on voit que l'ébran-

(*) Comme j'aurai souvent occasion dans la suite de renvoïer à ces mêmes *Recherches* je les appellerai simplement *Recherches précédentes*. & j'en citerai les Chapitres & les Articles en chiffre Romain pour les distinguer de ceux de la Dissertation présente.

ébranlement excité dans la particule E se propagera dans la fibre AD de maniére que, dans un tems quelconque t, il parviendra à la particule qui est distante de la E par l'espace $\frac{t}{\alpha}$; d'où il s'ensuit que la vitesse du Son sera uniforme & $= \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{T^2 D}{2 E h})}} = \sqrt{(\frac{2 E h}{T^2 D})} =$ (en mettant au lieu de $\frac{E}{D}$ la hauteur A de l'air supposé homogéne) $\frac{\sqrt{2 A h}}{T}$ ce qui s'accorde avec *l'Art. LVI. des Rech. préc.*, & avec ce que M. Newton a trouvé par une méthode différente. *Prop.* 49. *liv. II. des Principes.*

Au reste il est clair, qu'à cause de l'ambiguité des signes de la valeur de α, la formule $\varphi\ (t - \alpha x)$ renfermera réellement les deux formules $\varphi\ (t - \frac{x}{\sqrt{c}})$, $\varphi\ (t + \frac{x}{\sqrt{c}})$ en posant, pour abreger, c au lieu de $\frac{2 h A}{T^2}$; donc, en prenant deux fonctions différentes l'une pour le signe $+$, & l'autre pour le signe $-$, & les ajoutant ensemble, on aura $\varphi\ (t - \frac{x}{\sqrt{c}}) + \psi\ (t + \frac{x}{\sqrt{c}})$: pour l'expression générale de l'espace parcouru par chaque particule de la fibre AD dans un tems quelconque t.

Nous verrons dans la suite les conséquences qui résultent de cette formule par rapport à la propagation du Son considérée d'une maniére générale; mais nous remarquerons d'avance que la vitesse de la propagation est toujours $= \sqrt{c}$ comme on l'a trouvé ci-dessus dans un cas particulier.

3. Telle est la solution générale qui peut se déduire des Principes de M. Newton; cet illustre Auteur n'en a tiré cepen-

cependant qu'une ſolution aſſés particuliére, & même peu exacte, mais qui l'a conduit néanmoins au même réſultat ſur la viteſſe de la propagation. C'eſt ce qu'il faut développer.

M. Newton commence par ſuppoſer que la courbe PKS eſt un cercle dont le diamètre PS eſt égal à la plus grande excurſion Ee de la particule E, & dont la circonférence eſt à l'intervalle BC *des pulſions* comme KH à EG, ſavoir comme $\alpha : 1$ ſelon nos dénominations; d'où il réſulte que le mouvement de chaque particule d'air eſt le même que celui d'un pendule qui décrit des arcs de cicloïde, & que la durée de chaque oſcillation eſt égale à la circonférence entiére du cercle $PKSkP$, ſavoir $\alpha BC = \frac{T}{\sqrt{2hA}} BC$.

M. Newton ſuppoſe enſuite que, dans le tems d'une oſcillation, *la pulſion* en avançant parcoure ſa largeur BC; c'eſt-à-dire qu'il ſe forme en CD une nouvelle fibre ſonore CD égale à la première BC; d'où il déduit la viteſſe du Son $= \frac{\sqrt{2hA} \times BC}{T \times BC} = \frac{\sqrt{2hA}}{T}$ préciſément comme on l'a trouvé ci-deſſus.

Je remarque d'abord que la premiére hypotéſe de M. Newton, ſavoir que la courbe PKS ſoit un cercle, ne peut être admiſe qu'analitiquement, & non rélativement à la queſtion de la propagation du Son. Car 1.° Les ébranlemens primitifs dépendent abſolument de l'impulſion du corps ſonore, laquelle peut être quelconque; par conſéquent il eſt impoſſible que ces ébranlemens ſoient toujours exprimés par la même courbe, & encore moins par un cercle; 2.° Comme le cercle eſt une courbe rentrente, il eſt clair qu'on peut toujours trouver un arc $= t - \alpha x$, dont l'abſciſſe repréſentera (ſuivant la conſtruction) l'excurſion d'une particule quelconque diſtante, comme l'on voudra de la particule E; d'où il s'enſuit que toutes les

par-

particules de la fibre *AD* infiniment prolongée de part & d'autre doivent être toutes en mouvement à la fois ; ce qui détruit la propagation du Son, & est directement contraire à la nature même de la question.

A l'égard des oscillations des particules qui forment *la pulsion BC*, nous démontrerons plus bas (*Art.* 15.) que leur durée est toujours la même quelle que puisse être la nature de cette *pulsion*; & qu'ainsi la formule $\frac{\sqrt{2hA}}{T} \times BC$, que donne l'hypotése particuliére de M. Newton, est exacte & conforme à la véritable Théorie de la propagation du Son.

Il en est de même de l'autre hypotése de M. Newton, savoir, qu'il s'engendre une seconde fibre égale à la premiére, lorsque cette premiére a achevé une vibration entiére. Cette hypotése est légitime, comme on le verra plus bas (*Art.* 12. 15.); mais doit-on l'admettre sans la démontrer? On est d'autant plus en droit d'en exiger la démonstration que, suivant la construction de M. Newton, les *pulsions AB*, *BC*, *CD &c.* ne se forment point l'une après l'autre, mais existent toutes à la fois & ne font que changer de place sur la fibre *AD*, comme il est aisé de s'en convaincre en examinant cette construction.

En voila assés pour prouver l'insuffisance de la Théorie de M. Newton, & pour rendre raison pourquoi elle conduit néanmoins aux véritables loix de la propagation du Son.

4. Nous venons de montrer que la courbe *PKS* ne peut être un cercle. Or je dis qu'elle ne peut pas même être une courbe algébrique, ou transcendante. Pour le prouver je remarque que la fonction $\varphi(t - \frac{xT}{\sqrt{2hA}})$ qui représente en général les excursions des particules de la fibre *AD* pour un tems quelconque t, doit aussi représenter les excursions primitives, telles qu'elles sont engendrées dans le premier instant par l'action du corps sono-

re sur les particules de l'air contigu. Or il est clair que cette impression ne sauroit s'étendre à l'infini, mais qu'elle devra même être renfermée dans un très-petit espace autour du corps, à cause de l'extrême petitesse de ses vibrations; d'où il suit, que dans le premier instant il ne peut y avoir qu'un certain nombre de particules, dans la fibre aétienne, qui soient mises en mouvement, & pour lesquelles la valeur de $\varphi\,(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}})$ doive être réelle; il faudra en conséquence, pour remplir cette condition, que la fonction $\varphi\,(t - \frac{xT}{\sqrt{2bA}})$ s'évanoüisse toujours d'elle même, lorsque, t étant $= o$, x surpassera une quantité donnée. Soit a la longueur de la portion de la fibre qui est ébranlée au commencement, il faudra avoir en général $\varphi\,(-\frac{(a+z)T}{\sqrt{2bA}})$ $= o$, prenant pour z une quantité quelconque positive.

Telle devra donc être la nature de la courbe PHS, d'où dépend la valeur de φ, que tous les arcs exprimés par $-\frac{(a+z)T}{\sqrt{2bA}}$ répondent toujours au même point de l'axe, où les abscisses ont leur origine; c'est ce qui ne sauroit avoir lieu dans aucune courbe soit géométrique, soit transcendante, puisque il faudroit pour cela que dans un tel point elle se transforma tout-à-coup en une droite perpendiculaire à l'axe.

CHAPITRE II.

Des fonctions irrégulières & discontinues.

Observations

Sur la nature & l'usage de ces fonctions.

5. Nous venons de démontrer que, pour trouver les ébranlemens des particules de l'air dans le cas de la nature, il faut se servir d'une ligne courbe, dont le cours devienne tout-à-coup rectiligne en un point donné, condition qui est absolument incompatible avec la loi de continuité, à laquelle toutes les courbes soit algébriques, soit mécaniques sont nécessairement soumises.

Delà on voit la nécessité d'admettre dans ce calcul d'autres courbes que celles, que les Géomètres ont considéré jusqu'à présent, & d'emploïer un nouveau genre de fonctions variables indépendantes de la loi de continuité, & qu'on peut très-bien appeller fonctions *irrégulières* & *discontinues*. Mais ce n'est pas ici le seul usage qu'on doit faire de ces sortes de fonctions; elles sont nécessaires pour un grand nombre de questions importantes de Dinamique & d'Hidrodinamique. Car, lorsque on a un sistème de corps, ou de points mobiles, dont le nombre est infini, & qu'on en cherche les mouvemens, après les avoir, comme que ce soit, derangé de leur état d'équilibre, il est facile de comprendre que tous ces mouvemens ne pourront être contenus dans une même formule, à moins qu'elle ne soit aussi applicable au prémier état du sistème, qui est tout-à-fait arbitraire, & dans lequel la loi de continuité est le plus souvent violée;

M. Euler

M. Euler est, je crois, le prémier qui ait introduit dans l' Analise ce nouveau genre de fonctions, dans sa solution du problême *de chordis vibrantibus* qui rentre dans la classe de ceux, dont nous venons de parler; mais nous avons exposé ailleurs (*art.* XV. *Rech. préc.*) les difficultés, dont cette solution est susceptible, & la nécessité où l' on étoit de l' établir & de la confirmer par une métode aussi directe & rigoureuse que celle que nous avons donné dans le *Chap.* V. *des Rech. citées*; M. Euler même m' a fait l'honneur de me l' avoüer dans une lettre particuliére qu'il m'a écrit au sujet de ma Théorie sur le Son. Cette métode cependant qui consiste à regarder d' abord le nombre des corps mobiles comme fini & indéterminé, est extrémement pénible & embarassante, & elle le devient encor beaucoup plus, lorsqu'il s' agit de rendre leur nombre infini. Un tel passage du fini à l' infini dans mes formules, n'aiant pas paru assès évident & démonstratif à deux grands Géomètres, Mrs. Daniel Bernoulli & D' Alembert, comme ils ont daigné me le faire sentir dans des lettres particuliéres; j' ai cru devoir chercher de nouveau une autre méthode plus simple, par laquelle on pût éviter tous les embaras qui se rencontrent dans la transformation des formules, & qui leva de même tous les doutes qui pourroient encore se présenter sur l' exactitude de mes résultats.

PROBLEME I.

6. *Etant donné un sistème d'un nombre infini de points mobiles, dont chacun dans l' état d'équilibre soit déterminé par la variable* x, *& dont le prémier & le dernier qui répondent à* $x = 0$, *& à* $x = a$ *soient supposés fixes; trouver les mouvemens de tous les points intermédiaires, dont la loi*

est

est contenue dans la formule $(\frac{d^2z}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2z}{dx^2})$, *z étant l'espace décrit par chacun d'eux durant un tems quelconque* t.

Qu'on multiplie cette équation par Mdx, M étant une fonction quelconque de x, & qu'on l'intégre en ne faisant varier que l'x; il est clair, que si dans cette intégrale prise ensorte qu'elle évanoüisse lorsque $x = 0$, on fait $x = a$, on aura la somme de toutes les valeurs particuliéres de la formule $(\frac{d^2z}{dt^2})\,Mdx = c\,(\frac{d^2z}{dx^2})\,Mdx$, qui répondent à chaque point mobile du sistème donné. Cette somme sera donc $\int(\frac{d^2z}{dt^2})\,Mdx = c\int(\frac{d^2z}{dx^2})\,Mdx$.

Or l'intégrale $\int(\frac{d^2z}{dx^2})\,Mdx$, où la différence d^2z ne dépand que de la variable x, peut se transformer par les régles connues en $(\frac{dz}{dx})\,M - \int(\frac{dz}{dx}) \times (\frac{dM}{dx})\,dx$; cette derniére intégrale se change de même en $z\,(\frac{dM}{dx}) - \int z\,(\frac{d^2M}{dx^2})\,dx$; de sorte qu'on aura $\int(\frac{d^2z}{dx^2})\,Mdx = (\frac{dz}{dx})\,M - z\,(\frac{dM}{dx}) + \int z\,(\frac{d^2M}{dx^2})\,dx$; or puisque $\int(\frac{d^2z}{dx^2})\,Mdx$ est $= 0$, lorsque $x = 0$, si on suppose que $\int z\,(\frac{d^2M}{dx^2})\,dx$ le soit aussi, il faudra que $(\frac{dz}{dx})\,M - z\,(\frac{dM}{dx})$ évanoüisse de même dans ce point; mais par hipotése l'on a ici $z = 0$, donc il suffira que l'on ait $(\frac{dz}{dx})\,M = 0$, ou bien $M = 0$, lorsque $x = 0$.

Par

Par là notre équation intégrale deviendra $\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx = c [(\frac{dz}{dx}) M - z (\frac{dM}{dx})] + c \int z (\frac{d^2 M}{dx^2}) dx$. Posons $x = a$; & puisque z s'évanoüit de nouveau par hipotése, faisons disparoître de même l'autre terme $(\frac{dz}{dx}) M$ par une valeur convenable de M.

Il ne restera, après cela, que la simple équation

$$\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx = c \int z (\frac{d^2 M}{dx^2}) dx.$$

Soit supposé $(\frac{d^2 M}{dx^2}) = kM$, k désignant une constante indéterminée dont on trouvera la valeur au moïen des conditions qu'on a déja attaché à la quantité M; on aura $\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx = kc \int z M dx$.

Soit encore $\int z M dx = s$; prenant la différence de part & d'autre, dans la supposition que le seul t soit variable, on a, à cause de $M =$ fonct. x, $\int (\frac{dz}{dt}) M dx = (\frac{ds}{dt})$; & différentiant une seconde fois $\int (\frac{d^2 z}{dt^2}) M dx = (\frac{d^2 s}{dt^2})$; ces valeurs substituées dans la derniére équation intégrale, il en résulte $(\frac{d^2 s}{dt^2}) = cks$, équation qu'il faut maintenant intégrer en ne regardant que le tems t comme variable. Nous avons donc deux équations différentielles à intégrer, dont l'une regarde simplement la variabilité de x, & l'autre celle de t, ce qui fait qu'elles rentrent dans la classe ordinaire des équations différentielles à deux changeantes.

Com-

Commençons par l'équation $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks$, & faisons usage de la méthode inventée par M. D'Alembert pour ces sortes d'équations.

Soit supposé $\frac{ds}{dt} = r$, on aura $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dr}{dt}$, & l'équation donnée se changera en $\frac{dr}{dt} = cks$; qu'on la multiplie par un coéficient quelconque μ, & qu'on la joigne avec celle qu'on a faite par hipotése, on aura $\frac{ds + \mu dr}{dt} = \mu cks + r = \mu ck\,(s + \frac{1}{\mu ck} r)$; soit fait $\mu = \frac{1}{\mu ck}$, & par conséquent $\mu^2 = \frac{1}{ck}$, $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{ck}}$, j'aurai donc $\frac{ds + \mu dr}{dt} = \frac{1}{\mu}$ $(s + \mu r)$, différentielle dont l'intégrale est par les méthodes connues, en ajoutant une constante A, $s + \mu r = Ae^{t:\mu}$; substituant la valeur de μ, on a, à cause de l'ambiguité des signes, les deux équations

$$s + \frac{r}{\sqrt{ck}} = Ae^{t\sqrt{ck}}$$

$$s - \frac{r}{\sqrt{ck}} = Be^{-t\sqrt{ck}}.$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Pour déterminer les valeurs de A & de B, supposons que s & r deviennent S & R, lorsque $t = 0$, nous aurons $S + \frac{R}{\sqrt{ck}} = A$; & $S - \frac{R}{\sqrt{ck}} = B$; substituant ces valeurs, & joignant ensemble les deux équations il nous vient

$$s = S \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + \frac{R}{\sqrt{ck}} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

de même, en retranchant l'une équation de l'autre, on trouve

$$r = R \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} + e^{-t\sqrt{ck}}}{2} + S\sqrt{ck} \times \frac{e^{t\sqrt{ck}} - e^{-t\sqrt{ck}}}{2}$$

ces

ces équations se réduisent à la forme suivante qui est beaucoup plus simple ; savoir

$$s = S \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} - \frac{R}{\sqrt{-ck}} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} + R\sqrt{-ck} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}.$$

Or s est par supposition $= \int z M dx$, & $r = \frac{ds}{dt} = \int (\frac{dz}{dt}) M dx$, ou bien, puisque $\frac{dz}{dt}$ exprime la vitesse qui répond à l'espace z & au tems t, si on dénote cette vitesse par u, on a $r = \int u M dx$. Pour avoir de même les valeurs de S & de R, supposons que Z soit en général la valeur de z, & V celle de u au commencement du mouvement, lorsque $t = 0$, on aura $S = \int Z M dx$ & $R = \int V M dx$, substituant ces valeurs on changera les équations précédentes en celles-ci

$$\int z M dx = \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} \int Z M dx - \frac{\operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} \int V M dx + \sqrt{-ck} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck} \int Z M dx.$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver la valeur de M par la résolution de l'équation $\frac{d^2 M}{dx^2} = kM$, qu'on intégréra par la même métode que nous avons pratiqué ci-dessus ; prenant deux constantes quelconques C & D on trouvera aisément que la valeur de M est en général $Ae^{x\sqrt{k}} + Be^{-x\sqrt{k}}$; or M doit prémiérement être $= 0$, lorsque $x = 0$, ce qui donne $A + B = 0$ & $B = -A$; par conséquent $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}})$. Changeons la constante A, & supposons la divisée par $2\sqrt{-1}$, on aura plus simplement $M = A \operatorname{fin.} x\sqrt{-k}$.

Il faut maintenant faire ensorte que M évanoüisse, lorsque $x = a$, d'où l'on a $A \operatorname{fin.} a\sqrt{-k} = 0$, & prenant pour n un nombre quelconque entier positif, ou négatif,

$a\sqrt{-k}$

$a \sqrt{-k} = \frac{\pi r}{z}$, ce qui nous apprend que $\sqrt{-k}$ peut avoir une infinité de valeurs différentes, qui rempliſſent toutes également les conditions données. Subſtituons à préſent pour M ſa valeur trouvée, & retenant pour plus de ſimplicité la quantité $\sqrt{-k}$, on aura après avoir diviſé par A

$$\int z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{coſ. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx + \frac{\text{ſin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{coſ. } t\sqrt{-ck} \int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck} \text{ ſin. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx$$

Ces deux équations doivent ſe vérifier pour toutes les valeurs qu'on peut donner à $\sqrt{-k}$, & c'eſt, d'après une telle condition, qu'il faut déterminer les valeurs cherchées de z & de u par celles de Z & V qui ſont ſuppoſées données.

Pour cela il faut commencer par faire diſparoître au moïen de quelques transformations, la quantité $\sqrt{-k}$ qui n'eſt point renfermée dans des *ſinus* ou des *coſinus*; ces transformations ne conſiſtent qu'à prendre les intégrales par parties comme nous l'avons déja pratiqué plus haut; enſorte que l'intégrale qui reſte ſe trouve naturellement multipliée, ou diviſée par $\sqrt{-k}$. Par ce moien on transformera d'abord l'expreſſion $\int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx$ dans celle-ci $= \text{ſin. } x\sqrt{-k} \int V dx - \sqrt{-k} \int (\text{coſ. } x\sqrt{-k} \int V dx)\, dx$. Je remarque maintenant que la valeur de ſin. $x\sqrt{-k}$ devient nulle dans les deux cas de $x = 0$, & de $x = a$, d'où il ſuit, que puiſque les formules intégrales que nous manions ici, doivent être priſes pour toute l'étendue de x depuis 0, juſque à a, on aura plus ſimplement

$$\int V \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = -\sqrt{-k} \int (\text{coſ. } x\sqrt{-k} \int V dx)\, dx.$$

Par une opération contraire on trouvera enſuite

$$\int Z \text{ ſin. } x\sqrt{-k}\, dx = -\frac{Z \text{ coſ. } x\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} + \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{dZ}{dx}\right)$$

coſ.

$\text{cof. } x\sqrt{-k}\,dx$; & puifque $Z = 0$, lorfque $x = 0$, & $= a$, par l'hipotéfe du problême, on aura pour notre cas

$$\int Z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \frac{1}{\sqrt{-k}}\int\left(\frac{dZ}{dx}\right)\text{cof. } x\sqrt{-k}\,dx.$$

Ces valeurs fubftituées, il en réfulte

$$\int z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck}\int Z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$-\frac{\text{fin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{c}}\int\left(\int V dx\right)\text{cof. } x\sqrt{-k}\,dx$$

$$\int u \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \text{cof. } t\sqrt{-ck}\int V \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx$$
$$-\sqrt{c}\,\text{fin. } t\sqrt{-ck}\int\left(\frac{dZ}{dx}\right)\text{cof. } x\sqrt{-k}\,dx.$$

Avant d'aller plus loin je remarque que comme on aura occafion dans la fuite de comparer des valeurs de Z & de V avec des valeurs de z & u qui ne répondent pas aux mêmes x, pour ne pas fe méprendre dans ces opérations, il fera utile de diftinguer par des expreffions différentes les x qui conviennent aux Z & V, d'avec ceux qui conviennent aux z & u; je défignerai les prémiers par la lettre X que je fubftituerai par tout dans les feconds termes des équations précédentes au lieu de x, en retenant néanmoins le dx qui ne peut caufer aucun embarras; j'obferve de plus, que les intégrales qui entrent dans ces termes fe rapportent uniquement à la variable x ou X, ce qui fait qu'on peut mettre auffi fous le figne ces quantités $\text{fin. } t\sqrt{-ck}$, & $\text{cof. } t\sqrt{-ck}$, qui font conftantes à leur égard; j'aurai donc $\int z \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \int Z \text{ fin. } X\sqrt{-k} \times \text{cof. } t\sqrt{-kc}\cdot dx$

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}\int\left(\int V dx\right)\text{cof. } X\sqrt{-k}\times\text{fin. } t\sqrt{-kc}\,dx.$$

$$\int u \text{ fin. } x\sqrt{-k}\,dx = \int V \text{ fin. } X\sqrt{-k}\times\text{cof. } t\sqrt{-kc}\,dx.$$
$$-\sqrt{c}\int\left(\frac{dZ}{dx}\right)\text{cof. } X\sqrt{-k}\times\text{fin. } t\sqrt{-kc}\,dx.$$

Je développe à préfent les produits des *finus* & *cofinus* par les métodes connues; j'obtiens

 $\int z$ fin.

$$\int z \text{ fin. } x \sqrt{-k}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int Z \text{ fin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int Z \text{ fin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (\int V dx) \text{ fin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (\int V dx) \text{ fin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx.$$
$$\int u \text{ fin. } x \sqrt{-k}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int V \text{ fin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int V \text{ fin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$- \frac{\sqrt{c}}{2} \int (\frac{dZ}{dx}) \text{ fin. } (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$$
$$+ \frac{\sqrt{c}}{2} \int (\frac{dZ}{dx}) \text{ fin. } (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx.$$

Ces équations font réduites maintenant à la forme néceſſaire pour en tirer les valeurs de z & de u. Voici comment je m' y prends.

Je conſidére, qu'en ſubſtituant pour $\sqrt{-k}$ ſa valeur $\frac{\nu\pi}{2a}$, le nombre ν qui peut être tel qu'on veut, pourvu qu'il ſoit entier, doit néceſſairement diſparoître de l' équation, puiſque elle doit être vraie pour toutes les valeurs poſſibles de ν. Il faut donc faire enſorte que la quantité $\sqrt{-k}$ diſparoiſſe elle même de l'equation qui la renferme; ce qu'on ne peut obtenir dans notre cas qu'en rendant égaux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$ dans tous les termes de l'une & de l'autre équation; mais comme on pourroit être embarraſſé dans les différentes valeurs qu'il faut donner à X, je ne retiendrai cette lettre X, que dans la ſeule expreſſion fin. $(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, & je mettrai dans l'autre expreſ-

expression fin. $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, X' au lieu de X, en désignant de même par Z' & V' les valeurs de Z & de V qui y répondent ; ainsi j'aurai par la comparaison des angles, après avoir divisé par $\sqrt{-k}$, $x = X + t\sqrt{c} = X' - t\sqrt{c}$; & ensuite les équations

$$z = \frac{Z}{2} + \frac{Z'}{2} - \frac{\int V dx}{2\sqrt{c}} + \frac{\int V' dx}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V}{2} + \frac{V'}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx} + \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ'}{dx}.$$

Maintenant, l'abscisse qui convient à Z & à V étant X, elle deviendra $= x - t\sqrt{c}$, qui est sa valeur tirée de l'*équation* ci-dessus ; on aura de même pour l'abscisse X' qui répond à Z' & à V', l'expression $x + t\sqrt{c}$; donc si, pour plus des commodité, on joint à chaque quantité son abscisse en forme d'exposant placé entre deux parenthèses, on aura enfin les valeurs de z & de u exprimées de la manière suivante

$$z = \frac{Z^{(x+t\sqrt{c})} + Z^{(x-t\sqrt{c})}}{2} + \frac{\int V dx^{(x+t\sqrt{c})} - \int V dx^{(x-t\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{V^{(x+t\sqrt{c})} + V^{(x-t\sqrt{c})}}{2} + \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\left(\frac{dZ}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})} - \left(\frac{dZ}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})}\right).$$

Telles sont donc les valeurs de z & de u pour chaque point mobile du sistême donné, & pour tous les instans de leurs mouvemens ; valeurs qui ne dépandent, comme on le voit, que des quantités Z & V données à volonté dans le commencement du mouvement.

7. Les formules qu'on vient de trouver nous ménent directement à la construction suivante. Sur l'axe $AB = a$ (*fig.* 1.), j'éléve à chaque point M la perpendiculaire MN, égale à la valeur de Z, c'est-à-dire à la valeur initiale de

z qui répond à l'abſciſſe $x = AM$. J'en fais autant à l'égard des valeurs initiales de u ſur un autre axe de même longueur AB (*fig.* 2.); & j'obtiens par ce moien les deux courbes ANB, AQB que j'appelle *courbes fondamentales*, & qui ſont les lieux géométriques des quantités Z & V.

Ces courbes ſeront réguliéres, ou irréguliéres, ſuivant la nature des quantités Z & V; mais elles ſe termineront toujours d'un côté & de l'autre aux extrémités A & B de l'axe, puiſque les valeurs de Z & de V dans ces points ſont nulles par ſuppoſition.

Je trace enſuite ſur deux autres axes égaux, AB, AB (*fig.* 3. & 4.) les nouvelles courbes anb, Aqb, telles, que chaque ordonné Mn de la prémiére ſoit toujours quatriéme proportionnelle à la ſoutangente MT de la courbe ANB, à l'ordonnée correſpondante MN, & à la quantité conſtante $\sqrt{c}$, & que l'ordonné Mq de la ſeconde ſoit égale à l'aire AQM de la courbe AQB, diviſée par la même quantité $\sqrt{c}$.

Ces quatre courbes ainſi données, ſi l'on cherche les valeurs de z & de u qui répondent à une abſciſſe quelconque $x = AM$, & à un tems quelconque t, on n'aura qu'à prendre de part & d'autre des points M, les points M' & $'M$ éloignés par des intervalles égaux MM' & $'MM = t\sqrt{c}$, & l'on aura

$$z = \frac{M'N' + 'M'N + M'q' - 'M'q}{2}$$

$$u = \frac{M'Q' + 'M'Q + M'n' - 'M'n}{2}.$$

Quelque générale que paroiſſe cette conſtruction que nous venons de trouver, elle ne l'eſt cependant pas tout-à-fait; car il y a une infinité de cas où elle ne ſauroit avoir lieu; c'eſt ce qui arrivera toutes les fois que les points $'M$ & M' tomberont au delà de A & de B.

Pour

Pour voir ce qu'il faudra faire dans ces cas, & comment les courbes données pourront être continuées de part & d'autre, il est nécessaire de reprendre les derniéres formules intégrales, d'où l'on a tirées les valeurs de z & de u, & de les examiner avec attention ; pour mieux y réussir nous réduirons ces formules à des constructions géométriques.

Soit imaginée la ligne ARB (*fig.* 5.) qui soit le lieu géométrique des valeurs de z pour tous les points de l'axe AB, & soit décrite sur le même axe la courbe ASB qui ait à chaque abscisse x l'ordonnée sin. $x\sqrt{-k}$. Il est manifeste que si l'on fait les produits des ordonnées correspondantes de ces deux courbes, l'aire d'une troisiéme courbe qui aura ces produits pour ordonnées sera la valeur de l'intégrale $\int z$ sin. $x\sqrt{-k}\,dx$.

Pour construire de même les autres formules intégrales supposons d'abord $t\sqrt{c} < a$, & aïant tracé (*fig.* 6.) la ligne ANB, qui renferme toutes les valeurs de Z, qu'on coupe de part & d'autre du point A les deux portions de l'axe AA', AA'' égales entr'elles, & $= t\sqrt{c}$, & qu'on transporte la courbe ASB en $A'S'B'$ & en $A''S''B''$, il est clair que si l'on prend de nouveau les produits des ordonnées de chacune de ces courbes par les ordonnées correspondantes de la courbe ANB, les aires des ces produits exprimeront les valeurs des intégrales
$\int Z$ sin. $(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$, & $\int Z$ sin. $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}\,dx$. Mais il faut remarquer, que comme ces intégrales ne doivent s'étendre que depuis $X=0$ jusque à $X=a=AB$, les aires, qui les exprimeront, ne pourront contenir que les parties de l'une & de l'autre courbe qui répondent à l'axe AB. D'où il s'ensuit que les deux portions $A'S'$ & $S''B''$ qui se trouvent au déhors de l'espace compris entre les ordonnées AS', BS'' élevées des points A & B, ne feront ici aucun usage; mais qu'il faudra au contraire ajouter à

l'une

l'une & l'autre courbe, ce qui lui manque par rapport à l'axe entier AB; c'est-à-dire que la courbe $A'S'B'$ devra être continuée jusqu'en $'S$, & de même la courbe $B''S''A''$ jusqu'en $''S$; ce qui étant exécuté, on aura les deux branches $S'B''S$ & $S''A''''S$, qui feront celles qu'on devra emploier dans la formation des aires proposées. Pour cela examinons la nature des fonctions sin. $(X + t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, & sin. $(X - t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui forment les courbes $A'S'B''S$ & $B''S''A''''S$, en comptant les abscisses X du point d'origine A; & voïons ce que ces fonctions deviennent au delà du point B' & en deça du point A''.

Puisque les deux courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$ ne sont que la même courbe ASB, dans laquelle, nommant x les abscisses, les ordonnées sont exprimées par sin. $x\sqrt{-k}$, la question se réduit à déterminer la valeur de sin. $x\sqrt{-k}$, lorsque x est négatif, & lorsque x est plus grand que a; soit donc en prémier lieu x négatif; on aura, comme on le fait, sin. $(-x)\sqrt{-k} = -$ sin. $x\sqrt{-k}$, c'est-à-dire que la fonction donnée de x ne recevra point d'autre changement, si non qu'elle deviendra négative. Soit ensuite $x > a$, mais $< 2a$, savoir $x = 2a - z$, on aura sin. $x\sqrt{-k} =$ sin. $(2a - z)\sqrt{-k} =$ sin. $(2a\sqrt{-k} - z\sqrt{-k})$. Or par la valeur déterminée ci-dessus de $\sqrt{-k}$, $2a\sqrt{-k} = \nu\pi$, & par les règles connuées de la Trigonométrie, sin. $(\nu\pi - z\sqrt{-k}) =$ sin. $(-z\sqrt{-k}) = -$ sin. $z\sqrt{-k}$; donc puisque $z = 2a - x$ on aura dans ce cas sin. $x\sqrt{-k} =$ sin. $(2a - x)\sqrt{-k}$. Delà il s'ensuit 1.° Que pour avoir la continuation $A''''S$ du côté des abscisses négatives de la courbe $A''S''B''$, on n'aura qu'à renverser la même courbe au dessous de l'axe, ensorte que le point A'' demeure immobile. 2.° Que pour avoir la continuation $B''S$ du côté des abscisses plus grandes que a dans la courbe $A'S'B'$ il faudra aussi renverser cette courbe de la même façon que l'autre; mais en prenant ici le point B' pour fixe.

Je

Je dis maintenant, que la portion de courbe $A'''S$ eſt la même que la $A'S'$; ainſi que la portion $B'S$ eſt la même que la $B''S''$; & que par conſéquent, au lieu des deux courbes $S'B'S$ & $S''A'''S$, on peut ſubſtituer les deux autres $A'S'B'$ & $A''S''B''$, lorſque il ne s'agit que d'avoir la ſomme des mêmes parties. Je dis enſuite que la ſomme des aires formées des produits des ordonnées de l'une & de l'autre courbe $S'B'S$ & $S''A'''S$ par celles de la courbe ANB ſera égale à la ſomme des aires qu'on pourra former de la même façon par les ordonnées des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, pourvu que dans les eſpaces AA', BB'', on prenne, pour ordonnées de la courbe ANB, celles qui conviennent aux eſpaces AA'' & BB' avec des ſignes contraires; d'où je déduis, que ſi l'on veut continuer la courbe même ANB de part & d'autre de l'axe, afin qu'elle réponde immédiatement à toute l'étendue des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, on n'a qu'à la renverſer deſſous l'axe en AN' & BN'', le point A demeurant immobile dans le prémier cas, & le point B dans le ſecond comme on le voit clairement dans la *fig.* 7.

Il réſulte donc de tout ce qu'on vient de démontrer que pour avoir la valeur de l'expreſſion compoſée
$\int Z \text{ ſin.} (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx + \int Z \text{ ſin.} (X - t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$, on n'a qu'à prendre la ſomme des deux aires qui ſe formeront par les produits des ordonnées des courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$ multipliées par les ordonnées correſpondantes de la courbe $N'ANBN''$. La moitié de cette ſomme, ſi l'on ſuppoſe $V = o$, devra donc être égale à l'aire formée par les deux courbes ARB, ASB.

Or puiſque les ordonnées de la courbe ASB, qui eſt la même que les deux courbes $A'S'B'$ & $A''S''B''$, renferment la quantité $\sqrt{-k}$, laquelle doit s'évanoüir de l'équation, on ne parviendra à ſe defaire de cette quantité, qu'en égalant la valeur de z, qui multiplie chaque ordonnée de ARB, à

la

la démisomme des valeurs de Z, qui multiplient la même ordonnée dans l'une & l'autre courbe $A'S'B'$ & $A''S''B''$; prenant pour ces valeurs de Z les ordonnées correspondantes de la courbe $N'ANBN''$; on coupera donc des points A' & A'', qui sont les origines des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, deux abscisses $= x$, ou bien, à cause de $AA' = AA'' = t\sqrt{c}$, on coupera du point A, origine de la courbe génératrice ANB, deux abscisses $x + t\sqrt{c}$ & $x - t\sqrt{c}$, & la démisomme des ordonnées correspondantes dans cette courbe, sera la valeur cherchée de z.

Si on suppose la courbe ANB anéantie, & qu'on y substitue la courbe AQB, on aura par la construction précédente les valeurs de la vitesse u dans le cas, où $Z = o$. Mais si l'on veut avoir égard à la fois aux deux courbes ANB & AQB; il faudra encore faire attention aux autres formules intégrales que nous avons négligées; & qui se construisent de la même façon que les précédentes avec cette seule différence qu'au lieu des courbes ANB, AQB il faut emploïer les anb & AqB. On s'y prendra donc à l'égard de ces derniéres courbes d'une manière parfaitement analogue à celle qu'on vient de pratiquer pour les prémiéres; il faudra seulement observer, que comme les deux formules intégrales, qui naissent de chacune d'elles, ont des signes différens, les branches $A'S'B'$ & $A''S''B''$ devront être situées l'une au dessus & l'autre au dessous de l'axe; c'est pourquoi la partie $A''{}'S$, qui doit servir de continuation à la branche $B'S'$ au lieu de sa partie $A'S$, se trouvera du même côté de l'axe, comme aussi que la partie $B''S$ à l'égard de l'autre branche $A''S''$, dont elle est le supplement au lieu de $S''B''$; d'où il s'ensuit que les branches de continuation dans les courbes Anb & aqb se trouveront au dessus de l'axe, comme on le voit dans la *fig.* 8. On prendra donc dans ces courbes ainsi continuées de part & d'autre les ordonnées qui répondent aux abscisses $x + t\sqrt{c}$ & $x - t\sqrt{c}$

en

en comptant du point A, & leur démidifférence donnera ce qu'il faut ajouter à la valeur de z & de u.

La construction que nous venons de trouver est la même, pour le fond, que celle qu'on a donné plus haut, mais elle en est plus générale en ce que les courbes ici se trouvent continuées de part & d'autre par une étendue égale à l'axe AB; ce qui suffit pour résoudre tous les cas, où $t\sqrt{c}$ ne surpasse point a comme on l'a supposé d'abord.

Tous les autres cas demanderont donc encore une nouvelle continuation, qu'on pourroit trouver aussi en suivant une méthode analogue à celle que nous avons emploïé ci-dessus, mais qu'on déduira plus aisément de la reflexion suivante. Je considére d'abord le *sinus* de l'angle $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, qui est celui qui donne des valeurs de X plus grandes que a; je trouve que ce *sinus* ne change point en retrachant de X un multiple quelconque de $2a$; car sin. $[(X-\sqrt{c})\sqrt{-k}-2\mu a\sqrt{-k}]$ devient (en substituant au lieu de $\sqrt{-k}$ sa valeur $\frac{\nu\pi}{2a}$) sin. $[(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}-\mu\nu\pi]$. Or, μ étant un nombre quelconque entier, $\mu\nu$ le sera aussi, & par conséquent par les règles connues ce *sinus* deviendra $=$ sin. $(X-t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, tel qu'il étoit d'abord. J'examine de même le *sinus* de l'autre angle $(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}$, d'où naissent les valeurs négatives de X; & je vois que ce *sinus* demeure le même, en ajoutant à X un multiple quelconque de $2a$; Car on trouve aussi sin. $[(X+t\sqrt{c})\sqrt{-k}+\mu\nu\pi] =$ sin. $(X+t\sqrt{c})$.

Ces deux propositions prouvent donc que les abscisses X peuvent être augmentées ou diminuées de $2a$, de $4a$ &c. sans qu'il en résulte aucun changement dans les formules intégrales; d'où il suit que les ordonnées à toutes ces abscisses ainsi augmentées ou diminuées seront nécessairement les mêmes. Donc puisque nous avons ci-dessus trouvé moïen d'étendre les courbes *fondamentales* jusques à l'abscisse $2a$

 d'un

d'un côté, & jusqu'à l'abscisse $-a$ de l'autre, on pourra à présent les étendre tant qu'on voudra, en appliquant à chaque abscisse exprimée par $z \pm 2\mu a$ l'ordonnée qui convient à la simple abscisse z, dont la valeur est supposée contenue entre les limites $+2a$, & $-a$. Il ne faudra pour cela que transporter successivement le long de l'axe toute la courbe qui répond à l'abscisse $= 2a$, & qui est composée de deux branches égales, situées l'une au dessus & l'autre au dessous du même axe; d'où il résultera une courbe continue, & de figure anguiforme, c'est-à-dire, contenant plusieurs ventres égaux, situés alternativement au dessus & au dessous de l'axe. Nous appellerons les courbes ainsi formées *courbes génératrices*.

Or fera la même chose à l'égard des autres courbes formées par les tangentes, & par la quadrature des courbes *fondamentales*; mais comme la portion de ces courbes, qui répond à l'abscisse $2a$, est composée de deux branches égales, situées l'une & l'autre du même côté de l'axe, la courbe, qui résultera de la repétition de cette partie, contiendra aussi plusieurs ventres égaux, mais tous placés du même côté de l'axe.

Voila comment par la simple déscription réitérée des branches données ANB, AQB, anb, Aqb, on peut prolonger toutes ces courbes à l'infini, & avoir par conséquent des ordonnées réelles pour toutes les abscisses exprimées par $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$, quelle que soit la valeur du tems t; ce qui suffit pour que la construction des valeurs de z & de u ne soit plus sujette à aucune exception.

Le problême, dont la solution nous a jusqu'à présent occupé, est le même que celui qu'on résolu dans le *Chap*. V. *des Rech. préced.*; car il est facile de voir que les équations de l'*Art.* XIX., dans le cas ou le nombre des points mobiles est infini, peuvent se réduire à la formule générale

(d^2z)

$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$. Auſſi la conſtruction que nous venons de trouver s'accorde entiérement avec celle qu'on a donné dans l'*Art.* XXXIX., & plus amplement dans l'*Art.* XLV.; ce qui doit être regardé comme une confirmation de la juſteſſe & de la bonté de nos calculs.

Remarques

Sur la ſolution précédente.

8. Quoique la ſolution précédente ſoit beaucoup moins compliquée que celle qui ſe trouve dans *mes Rech. ſur le Son*; elle l'eſt cependant encore à un point qui la rend aſſès difficile à ſuivre. C'eſt pourquoi il me paroit bon de l'éclaircir par quelques remarques, qui faſſent connoître plus à fond la nature & l'eſprit de la méthode qui nous y a conduit.

Comme la queſtion eſt de trouver les mouvemens d'une infinité de points mobiles, dans la ſuppoſition que leur état d'equilibre ait été dérangé d'une manière quelconque, on ne peut pas, ainſi qu'on l'a prouvé plus haut, exprimer tous ces mouvemens par une ſeule formule générale; mais il faut regarder au contraire chaque point mobile comme iſolé, & en chercher le mouvement, en reſolvant comme autant de problêmes à la fois, qu'il y a de points mobiles dans le ſiſtème donné. Une telle queſtion demande donc, pour être pleinement reſolue, d'autres procédés que ceux de l'Analiſe ordinaire; c'eſt ce que M. D'Alembert a eu ſoin de faire remarquer au ſujet des cordes vibrantes, dans l'*Art.* II. de ſon Addition au *Mémoire ſur la courbe que forme une corde tendue miſe en vibration*, imprimée parmis les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1750. *Dans tout autre cas*, di-t-il, (c'eſt-à-dire dans tous les cas où la courbe initiale n'aura point les conditions preſcrites par cet Auteur;

teur; *le problême ne pourra ſe reſoudre, au moins par ma méthode, & je ne ſais même s' il ne ſurpaſſera pas les forces de l' Analiſe connue. En effet on ne peut, ce me ſemble, exprimer y analitiquement d' une manière plus générale qu'en la ſuppoſant une fonction de* t *& de* s; *mais dans cette ſuppoſition on ne trouve la ſolution du problême, que pour le cas, où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une ſeule & même équation. Dans tous les autres cas il me paroit impoſſible de donner à* y *une forme plus générale.*

La méthode, que nous avons expoſé ci-deſſus, eſt une réduction de celle que j'ai inventé pour reſoudre le problême des vibrations d'une corde chargée d'un nombre indéfini de petits poids; ainſi elle remplit la condition, que tous les points mobiles ſoient conſidérés chacun en particulier, & en même tems elle n' eſt pas ſujette aux difficultés qui ſe préſentent en paſſant du nombre indéfini des points mobiles à un nombre réellement infini.

Le fondement principal de l' une & de l' autre de ces méthodes, c'eſt l' ingénieuſe Analiſe inventée par M. D'Alembert pour intégrer des équations différentielles d' un dégré quelconque, & contenant un nombre quelconque de variables, pourvu qu' elles ne paroiſſent que ſous une forme linéaire. Auſſi eſt-ce une juſtice qu'il faut rendre à ce ſavant Géomètre, que de reconnoître que nous lui devons le principal ſecours qui nous a aidé à franchir les difficultés, que lui même ſemble avoir cru inſurmontables à l' Analiſe.

A l' égard des procédés de nos deux métodes, ils ne différent d'abord entr'eux, que parce l'on a ſubſtitué, dans les derniers, des différentiations & des intégrations au lieu des ſommes & des différences algébriques qui ſe trouvent dans les autres; mais comme on pourroit craindre que ces opérations n' entrainaſſent les inconvéniens qu'on a indiqué dans l'*Art.* XV. des *Rech. préc.*, il me paroit utile de développer

velopper cet objet plus en détail, en rapprochant l' Analise que j' ai donné ci-dessus de celle du *Chap.* III. des *mêmes Rech.*

J' immagine d'abord qu'au lieu de la simple équation générale $(\frac{d^2 z}{dt^2}) = c (\frac{d^2 z}{dx^2})$, qui appartient à tous les points mobiles, il y en ait une infinité, dont chacune représente le mouvement de chacun des points en particulier; mouvement qui dépend d'ailleurs de tous les autres, puisque la différentielle $d^2 z$ qu'on prend, en ne faisant varier que x, exprime la différence seconde des valeurs de z pour trois points consécutifs. Je multiplie donc chacune de ces équations par un coéficient indéterminé M, ou plutôt par la quantité Mdx, en regardant M comme une variable qui peut convenir à toutes les équations en général; & j' en prens la somme par une intégration indiquée à la manière ordinaire.

Maintenant, comme il s'agit de joindre ensemble les coéficiens de chaque valeur de z qui répond à chaque point mobile, je transforme mon équation intégrale ensorte que les différentielles de z dépendantes de x, s' évanoüissent.

Les transformations, dont je fais usage dans cette occasion, sont celles qu'on appelle intégrations par parties, & qui se démontrent ordinairement par les principes du calcul différentiel; mais il n' est pas difficile de voir qu'elles ont leur fondement dans le calcul général des sommes & des différences; d'où il suit qu'on n'a point à craindre d'introduire par-là dans notre calcul aucune loi de continuité entre les différentes valeurs de z.

Après cela, je determine les valeurs de l' indéterminée M par la comparaison des coéficiens des termes correspondans z & $\frac{d^2 z}{dt^2}$; & je trouve pour cela une équation différentielle du 2 dégré qui contient une nouvelle indétermi-

née constante k, & dont l'intégration entraine encore dans la valeur de M deux autres constantes arbitraires. Je détermine ces constantes à être telles, que M s'évanoüisse, lorsque $x = o$, & lorsque $x = a$, puisque les valeurs de z étant nulles dans ces deux points, les M qui les multiplient ne doivent non plus avoir des valeurs réelles; par ce moïen on fait disparoître de l'équation intégrale les termes qui sont absolument algébriques, & qui auroient d'ailleurs empêché le reste des opérations. Ces deux conditions laissent encore indéterminée la valeur d'une constante, par laquelle toute l'expression de M est multipliée; mais cette constante s'évanoüit ensuite d'elle même par la division. A l'égard de la constante k, on trouve une infinité de valeurs différentes, qui toutes lui conviennent également, & dont le nombre répond à celui des équations particuliéres qu'on résout à la fois. C'est de ce nombre infini de valeurs de k, que dépand ensuite la détermination de toutes les valeurs de z.

Delà je passe à l'intégration actuelle de notre équation formée par l'addition de toutes les équations particuliéres. Cette intégration ne regarde que la variabilité de t, & elle s'achève selon les méthodes connues du calcul intégral, puisque ici la loi de continuité a lieu. Après cela je substitue la valeur de M, & il en résulte une équation asses simple qui renferme toutes les valeurs de z, pour chaque point mobile dans tous les instants du mouvement, avec les valeurs particuliéres des mêmes z & des vitesses u dans le prémier instant; valeurs qu'on suppose données à volonté, & qui ne sont point réglées par aucune loi de continuité. Je trouve en même tems une formule semblable pour les vitesses u de tous les points dans un tems quelconque.

Jusqu'ici cette Analise est parfaitement d'accord avec celles du *Chap. cité de mes Rech.*; mais elle en différe entiérement dans la suite, où il s'agit de tirer les valeurs de z & de u.

Comme

Comme il eſt néceſſaire que nos derniéres formules ſoient vérifiées, quelques valeurs qu'on donné à k, parmi le nombre infini de celles qu'on a trouvé; il eſt viſible qu'il faut chaſſer cette même quantité k, à l'aide d'autant d'équations particuliéres qu'il y a de différentes fonctions de k. C'eſt à quoi nous ſommes parvenus, en emploïant différentes tranſformations & réductions, dont on a rendu compte dans le cours de cette Analiſe; & qui me paroiſſent les ſeules capables de remplir l'objet propoſé.

La conſtruction qu'on a donné enſuite des valeurs de z & de u par le moïen des courbes *génératrices*, & la manière de continuer ces courbes à l'infini de part & d'autre dépendent d'une conſidération intime ſur la nature de nos formules. Il eſt vrai que les principes, d'où l'on a tiré cette conſtruction, pourroient paroître trop recherchés; mais elle n'en eſt pas moins démonſtrative & certaine; ce n'a été que pour conſerver une entière rigueur que j'ai été obligé d'avoir recours à de tels principes; car dès que l'on aura démontré dans deux ou trois problêmes de cette ſorte, que la nature des courbes *génératrices* eſt la même, que celle qu'on trouve en ſuppoſant ces courbes repréſentées par une fonction réguliére & continue, ainſi que l'a fait M. D'Alembert dans ſa ſolution du problême des vibrations des cordes, on ſera aſsès fondé à appliquer la métode de ces fonctions aux cas mêmes où l'on voudra ſuppoſer qu'elles n'aïent point lieu.

9. Après tout ce que nous venons d'expliquer, il ne ſera pas difficile de déterminer le dégré de généralité, dont notre méthode eſt ſuſceptible. On verra prémiérement qu'elle ne pourra réuſſir à moins que l'indéterminée z & ſes différences ne ſe trouvent que ſous une forme linéaire, & de plus qu'elles ne ſoient point mélées avec la variable t; lorſque ces conditions ſeront obſervées, quoique les différentielles de z montent a un dégré plus haut que le ſecond, & qu'il y ait

ait même un terme sans z, qui soit une fonction quelconque de t & de x, on pourra toujours se servir avec succès des artifices & des transformations enseignées; comme on le verra dans les solutions que nous donnerons dans la suite. Toute la difficulté ne tombera plus que sur l'intégration des équations en M & en s; équations qui se rapportent aux méthodes ordinaires du calcul intégral. En second lieu le succès de notre méthode demande, qu'on puisse faire disparoître des équations la quantité k, qui a toujours une infinité de valeurs; cette operation renferme des difficultés plus considérables, & je ne suis point encore parvenu jusqu'à présent à trouver pour cela une méthode directe & générale; cependant nous ferons voir dans la suite, que cet objet pourra toujours être rempli si non exactement, au moins en se servant des approximations & des séries.

Pour ce qui est de la prémiére condition qui est absolument indispensable dans notre méthode, il est aisé de démontrer qu'elle aura toujours lieu dans les mouvemens d'un sistème quelconque d'un nombre infini de points mobiles, lorsque ces mouvemens seront supposés infiniment petits, comme le sont tous les mouvemens réciproques qu'on observe dans la nature; d'où il suit qu'on pourra toujours les calculer soit exactement, soit seulement par approximation.

CHAPITRE III.

De la propagation du Son.

10. LA masse de l'air étant naturellement de trois dimensions, il est clair que, pour calculer la propagation du Son en toute rigueur, il faudroit résoudre les formules générales que M. Euler a donné dans ses *Recherches sur la propagation des ébranlemens dans un milieu élastique*; (*Voïés pag.* 1. *ci-dessus*) Mais ces formules n'étant point du nombre

bre de celles, sur lesquelles notre méthode peut avoir prise, il faut renoncer pour le présent, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on soit aidé par de nouveaux secours, à toute Théorie de la propagation du Son envisagée sous ce point de vûë. Cependant comme il est très-probable que les ébranlemens des particules de l'air pour produire le Son, doivent être infiniment petits, ainsi que nous tacherons de le prouver dans la suite; on pourra s'en tenir aux formules que M. Euler a aussi donné pour ce cas; formules qui sont sans comparaison beaucoup plus simples, que les prémiéres, & qui, par la raison qu'on a dit plus haut (*Art.* 9.), rentrent nécessairement dans la classe de celles qu'on peut soumettre à notre Analise.

Quoique la manière, dont M. Euler a trouvé ces formules, soit sans contredit la plus directe & la plus rigoureuse qui se puisse immaginer, cependant, puisque la supposition des ébranlemens infiniment petits rend le calcul incomparablement plus simple, j'ai cru qu'on ne saroit point faché de le trouver ici.

Soient X, Y, Z les coordonnées rectangles qui déterminent la position d'une particule quelconque de fluide dans l'état d'équilibre; supposons que ces coordonnées, dans le tems t, deviennent $X+x$, $Y+y$, $Z+z$; il ne sera pas difficile de voir que, si les quantités x, y, z sont supposées infiniment petites, le parallélepipéde $dXdYdZ$ qui représente une particule dans l'état d'équilibre, pourra être censé se changer en un autre $=(dX+dx)(dY+dy)(dZ+dz)=dXdYdZ+dXdYdz+dXdZdy+dYdZdx$, en négligeant les puissances plus hautes de dx, dy, dz. Delà il suit, qu'en nommant E l'élasticité naturelle de la portion infiniment petite de fluide renfermée dans le prémier parallélepipéde, l'élasticité de la même portion, lorsque elle remplira le second, se trouvera =

$$\frac{EdXdYdZ}{dXdYdZ + dXdYdz + dXdZdy + dYdZdx} = E -$$

$E\left(\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right)$ en négligeant ce qui se doit négliger. Soit prise maintenant la différence de cette quantité, en ne faisant varier que l'X, & l'on aura, E étant constant, $-E\left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ}\right)dX$ pour la différence d'élasticité de deux particules infinimens voisines & placées dans la direction de la ligne X; donc si l'on considére une autre particule intermédiaire à celles-ci, & qui leur soit contigue par tous les points des deux faces opposées $dYdZ$, il est clair que cette particule sera repoussée par l'excès de l'élasticité de la particule antérieure sur celle de la particule postérieure avec une force qui sera exprimée par $-E\left(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ}\right)dXdYdZ$. Cette force divisée par la masse à mouvoir, qui est ici (en posant D pour la densité naturelle du fluide) $DdXdYdZ$, sera donc $= -\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, h étant l'espace qu'un corps pesant parcourt dans le tems T; d'où l'on aura l'équation

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2x}{dX^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dXdY}\right) + \left(\frac{d^2z}{dXdZ}\right)\right).$$

On trouvera de même par un semblable raisonnement les deux autres équations

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2y}{dY^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dYdX}\right) + \left(\frac{d^2z}{dYdZ}\right)\right)$$

$$\frac{T^2}{2h}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{E}{D}\left(\left(\frac{d^2z}{dZ^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dZdX}\right) + \left(\frac{d^2y}{dZdY}\right)\right).$$

Il est visible que ces trois équations s'accordent avec celles de M. Euler, en posant selon les hipotéses de cet Auteur $h = g$, $\frac{E}{D} = h$, $T = 1$, & substituant p, q & r pour x, y & z.

11. Po-

11. Au reste ces formules sont fondées sur l'hipothèse que l'élasticité de l'air soit proportionelle à sa densité; mais il n'est pas difficile de les étendre à telle autre hipothèse qu'on voudra.

Pour embrasser la question dans toute la généralité possible, supposons que l'élasticité de l'air soit comme une fonction quelconque de la densité, de sorte que nommant s la densité dans un instant quelconque, l'élasticité correspondante soit exprimée par $E\varphi s$; il est clair par les calculs de *l'Art. préc.* que $s = \frac{D\,dX\,dY\,dZ}{(dX+dx)(dY+dy)(dZ+dz)}$ $= D - D\left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right]$; donc, à cause de dx, dy, dz infiniment petites par rapport à dX, dY, dZ, on aura $E\varphi s = E\varphi D - \left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right] ED\varphi' D$, φ' marquant une telle fonction de φ que $\varphi' s = \frac{d\cdot\varphi s}{ds}$.

Maintenant, comme D est une quantité constante, les différences de $E\varphi s$ seront exprimées simplement par $ED\varphi' D d\cdot\left[\frac{dx}{dX} + \frac{dy}{dY} + \frac{dz}{dZ}\right]$ d'où l'on voit que, pour avoir les équations du mouvement du fluide, il ne faudra qu'écrire au lieu de E dans les calculs de *l'Art. précéd.* $ED\varphi' D$, ou $E\varphi' D$ simplement, en posant $D = 1$.

Si le fluide étoit composé de parties de différentes densités, il faudroit regarder alors la quantité D non plus comme constante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de X, Y, Z. Ainsi l'on parviendroit aux trois équations suivantes;

$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2x}{dX^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dX\,dY}\right) + \left(\frac{d^2z}{dX\,dZ}\right)\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dX}\right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right)\right)$$
$$- \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot\varphi D}{dX}\right),$$

$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2y}{dY^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dYdX}\right) + \left(\frac{d^2z}{dYdZ}\right)\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dY}\right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right)\right)$$
$$- \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot\varphi D}{dY}\right);$$

$$\frac{T^2}{2b}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = E\varphi' D\left(\left(\frac{d^2z}{dZ^2}\right) + \left(\frac{d^2x}{dZdX}\right) + \left(\frac{d^2y}{dZdY}\right)\right)$$
$$+ \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot D\varphi' D}{dZ}\right) \times \left(\left(\frac{dx}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dY}\right) + \left(\frac{dz}{dZ}\right)\right)$$
$$- \frac{E}{D}\left(\frac{d\cdot\varphi D}{dZ}\right).$$

Suppoſons par exemple que la différente denſité des parties du fluide vienne du poid du fluide ſupérieur; dans ce cas, quelle que ſoit la fonction φ, on aura toujours $\frac{E\,d\cdot\varphi D}{dZ} = -D$ (en ſuppoſant que la direction de Z ſoit verticale), d'où l'on trouvera la valeur de D qui ſera une fonction de Z ſeulement. Delà on pourroit tirer les équations néceſſaires pour trouver les loix de la propagation du Son, en aïant égard à la denſité variable des couches de l'atmoſphère; mais, pour ne pas trop nous engager dans des difficultés de calcul, nous nous contenterons dans tout le cours des Recherches ſuivantes de regarder la denſité de l'air comme conſtante; ce qui ne nous éloignera pas ſenſiblement de la vérité, pourvu qu'on ne conſidére la propagation du Son, que près de la ſurface de la terre. C'eſt donc ſur les équations de *l'Art. précéd.* que nous fonderons principalement nos recherches ſur la propagation du Son; mais comme ces équations ſont encore trop compliquées à cauſe des trois variables qu'elles renferment, il ſera bon de commencer par les ſimplifier au moïen de quelques hipothèſes, qui limitent le mouvement de chaque particule de l'air. Or de toutes les hipothèſes qu'on peut emploïer pour cela, les plus com-

commodes, & les plus conformes à la nature, font les deux suivantes. La premiére consiste imaginer la masse de l'air réduite à une simple ligne phisique, dans lequel cas on fait disparoître à volonté deux variables quelconques x & y, avec leurs correspondantes X & Y. La seconde hipothèse est de supposer que les ébranlemens se propagent dans toute la masse de l'air par des ondulations sphériques autour du corps sonore; dans ce cas chaque couche concentrique d'air est supposée subir le même ébranlement dans toutes ses parties, d'où il suit que la détermination de l'ébranlement de chaque couche ne peut dépendre que du tems t, & du rayon de la couche, c'est-à-dire de la distance du corps sonore.

§ I.

De la propagation du Son dans une ligne phisique d'air.

12. Si l'on fait, selon la premiére hipothèse, x & y, & X & $Y = 0$, & qu'on pose pour abreger c au lieu de $\frac{2hE}{T^2D}$ on trouve l'équation $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dZ^2}\right)$ qui est la même que celle que nous avons appris à construire dans le *Probl. I.*, Z dénotant ici la même chose que x; d'où il suit, que pour avoir les loix de la propagation du Son dans cette hipothèse, il ne faudra qu'appliquer la construction donnée, suivant les différens ébranlemens excités par les corps sonores, & la nature du milieu élastique qui les environne. Quoique cette matière ait déja été traitée dans la seconde *sect. de mes Rech. sur le Son*, elle peut néanmoins l'être encor d'une manière beaucoup plus générale. Je la reprendrai donc ici avec d'autant plus de plaisir qu'elle me donnera occasion de faire plusieurs remarques nouvelles & importantes.

Que

Que la droite PQ (*fig.* 9.) repréfente une ligne phifique d'air étendue d'un côté & de l'autre à l'infini, & qu'au lieu de fuppofer (comme je l'ai fait dans la *fection citée*) que la feule particule P reçoive du corps fonore une impulfion quelconque, on imagine, que toutes les particules contenues dans l'efpace PQ foient ébranlées en même tems; PQ repréfentant, fuivant M. Newton, la *pulfion* primitive de la fibre fonore; il s'agit de déterminer les lois de la propagation de cette pulfion. Aïant tracé pour cela, felon ce qui a été enfeigné plus haut, les deux courbes *fondamentales*, qui repréfentent les déplacemens primitifs des particules, avec les viteffes qui leur ont été imprimées; & aïant conftruit de mêmes les deux autres courbes qui réfultent de la quadrature & des tangeantes de celles-ci, & que nous appellerons dorénavant courbes *dérivées*, on remarquera

1.° Que les courbes *fondamentales* fe termineront néceffairement aux deux points P & Q qui font les limites de l'agitation primitive, par fuppofition.

2.° Que puifque la fibre aérienne eft fuppofée s'étendre à l'infini de part & d'autre, aucune de fes particules ne pourra être abfolument fixe; d'où il fuit que les extrémités A & B des courbes *fondamentales*, qui font cenfées fixes, devront dans ce cas être reculées à l'infini, ce qui fera difparoître toutes les branches de continuation, en forte que les courbes *génératrices* ne renfermeront aucune ordonnée réelle au delà des points P & Q.

3.° Qu'il en fera de même pour les courbes *dérivées*, exceptée celle qui dépand des quadratures laquelle dégenerera du côté de Q en une droite paralléle à l'axe, comme il eft facile de le voir, en examinant la génération de cette courbe.

Ces chofes pofées & bien entendues, voici comme je raifonne. Je fuppofe que l'on demande l'état de la particule qui répond à l'abfciffe x pour un tems quelconque t, écoulé depuis le premier inftant du mouvement. Je n'aurai qu'à prendre la demifomme des ordonnées, dont les abfciffes

ses sont $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$ dans les deux courbes *fondamentales*, & la demidifférence des ordonnées pour les mêmes abscisses dans les courbes *dérivées*, & joignant ensemble la prémiére des demisommes, & la seconde des demidifférences, comme aussi la seconde demisomme, & la prémiére demidifférence, j'aurai l'espace parcouru par la particule pendant le tems donné t, & sa vitesse à la fin de ce tems. Je vois donc que cet espace & cette vitesse seront toujours nulles, lorsque l' abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ restera en deça du point P; ensuite que l' espace sera constant, & la vitesse nulle, lorsque l' abscisse $x \pm t\sqrt{c}$ tombera au delà de Q. D' où je conclus que, pour un tems quelconque t, il n' y aura, & il ne pourra y avoir d' autres particules en mouvement, que celles, pour lesquelles la valeur de $x \pm t\sqrt{c}$ sera plus grande que la distance du point P au point A, & moindre que la distance du point Q au même point A qui est toujours l'origine des abscisses, quoique placée à une distance infinie. Examinons séparément les deux cas de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$.

Soit p la distance entre le point A & le point P, & soit $x = p + z$, z sera une nouvelle abscisse qui aura son origine en P. Posons maintenant en prémier lieu $p + z - t\sqrt{c} = p$, on aura $z = t\sqrt{c}$; posons ensuite $p + z - t\sqrt{c} = p + PQ$, on aura $z = PQ + t\sqrt{c}$. Par là on peut avoir les limites de l'agitation des particules dans le tems t, en tant qu'elle résulte des termes dépendans de l'expression $x - t\sqrt{c}$; car il ne faut que prendre sur la ligne PQ, les points P' & Q' tels que $PP' = t\sqrt{c}$, & $P'Q' = PQ$; & la portion $P'Q'$ de la fibre sera la seule, où cette agitation aura lieu. On trouvera de la même manière les limites de l' agitation des particules, qui dépand de la valeur de $x + t\sqrt{c}$; car en faisant $p + z + t\sqrt{c} = p$ & $= p + PQ$, on a deux valeurs de z, savoir $z = -t\sqrt{c}$, & $z = PQ - t\sqrt{c}$. On prendra donc de nouveau, sur

la

la même ligne prolongée du côté opposé, deux autres points $'P$ & $'Q$, tels que $P'P = t\sqrt{c}$, & $P'Q = P'P - PQ$ c'est-à-dire, que $'P'Q = PQ$; & tous les mouvemens, dont la détermination dépendra de la valeur de $x + t\sqrt{c}$ seront renfermés dans ce dernier espace $'P'Q$.

De ce qu'on vient de démontrer il s'ensuit que la *pulsion* primitive, c'est-à-dire l'onde excitée par le corps sonores dans l'espace PQ de la fibre aérienne indéfinie, s'est comme divisée en deux autres, qui dans le tems t ont été transportées, l'une à droite en $P'Q'$, & l'autre à gauche en $'P'Q$, conservant toujours la même étendue PQ. Pour connoître la vitesse de la propagation de ces *pulsions* secondaires, on n'a qu'à chercher celle des points P' & $'P$, dont la position par rapport à P est déterminée généralement par les équations $z = t\sqrt{c}$, & $z = -t\sqrt{c}$; puisque donc z représente ici les espaces parcourus par ces points dans le tems t, il est évident que leur mouvement sera uniforme, & leur vitesse $= \sqrt{c}$, & que cela aura lieu quelle qu'ait été la nature de la *pulsion* primitive. Il est inutile de nous arrêter à examiner la valeur de $\sqrt{c}$ qui est $\frac{2h}{T^2} \times \frac{E}{D}$, puisque cette expression en substituant pour $\frac{E}{D}$, la quantité A, ou nk qui est sa valeur, devient la même que celle qu'on a trouvé ailleurs (*Art.* LVI.), & que M. Newton a déduit de sa Théorie, comme on l'a déja remarqué ci-dessus (*Art.* 1.).

13. Ce seroit ici le lieu de faire voir l'appliquation de la formule générale que nous avons trouvé d'après les Principes de M. Newton dans *l'Art. cité*; mais cette formule étant entiérement semblable à celle que M. D'Alembert a donné sur les vibrations des cordes, il est clair qu'en admettant les fonctions discontinues, qui sont indispensables dans la matière, dont il s'agit ici (*Art.* 4.), on aura la

même

même construction que nous avons donné dans *l'Art.* 7., & que par conséquent la Théorie de la propagation du Son, qui en résultera, ne sera point autre que celle qui vient d'être d'expliquée. Par-là on prouvera aisément ce que l'on a avancé plus haut (*Art.* 1.), que la vitesse de la propagation, selon cette Théorie est déterminée par la quantité $\frac{\sqrt{2hA}}{T}$ qui divise l'x dans les fonctions φ & ψ.

14. La manière dont nous venons de considérer la propagation du Son est beaucoup plus générale & plus conforme à la nature que celle, qu'on a emploïé dans le *Chap.* I. de la II. *Sect.* des *Rech. préc.* En effet l'hipotése que j'avois adoptée dans cet Ouvrage, savoir qu'une seule particule d'air fût ébranlée par le corps sonore à chacune de ses vibrations, ne paroit pas pouvoir subsister avec l'équilibre mutuel de toutes les particules de la fibre; il me semble beaucoup plus naturel d'imaginer, que la prémiére particule poussée par le corps sonore, condense jusqu'à une certaine distance les particules suivantes, pourvû que cette distance ne soit pas telle que les *pulsions* ou ondes sonores, qui se succéderont les unes aux autres, puissent se troubler & s'entredétruire; comme il arriveroit nécessairement, si le tems, qu'elles mettent à parcourir leur largeur, étoit moindre que l'intervalle du tems entre deux vibrations successives du corps sonore. On pourra déterminer les limites de la plus grande largeur des ondes, en prenant le nombre des vibrations que fait dans une seconde le son le plus aigu que nous puissions entendre, & divisant par ce nombre l'espace que les ondes sonores parcourent dans le même tems. Ce nombre peut se déduire rigoureusement de la formule connue des vibrations des cordes, que nous avons démontré être exacte pour quelque figure que la corde prenne; si donc on s'en tient à ce que dit

 M. Euler

M. Euler dans *l'Art.* XIII. de sa *Théorie de Musique*, on aura le nombre 7520., par lequel divisant le nombre 1240. qui exprime en piés l'espace parcouru par le Son dans une seconde, selon les expériences moiennes, il viendra pour quotient 1. pouce & 2. lignes environ, qui sera par conséquent la mesure de la plus grande étendue que puissent avoir les ondes sonores, pour former des sons distincts & perceptibles à l'oreille.

15. Jusqu'ici nous n'avons encor considéré que le mouvement progressif des ondes sonores; si on vouloit aussi connoître les mouvemens particuliers qui les composent, on les trouveroit aisément par les principes établis ci-dessus.

Supposons que x ou bien z soit donné, au lieu de t, dans les équations $z = t\sqrt{c}$, & $z = PQ + t\sqrt{c}$, la différence des deux valeurs de t nous donnera la durée du mouvement de chaque particule de l'onde $P'Q'$; laquelle sera $= \frac{PQ}{\sqrt{c}}$. Or puisque $\sqrt{c}$ est la vitesse constante, avec laquelle les ondes avancent continuellement, il est clair que l'agitation de chaque particule ne durera précisément que le tems que l'onde met à parcourir toute sa largeur PQ. Il en sera de même pour les ondes propagées du côté opposé, ce qu'il est aisé de reconnoître par le moien des deux équations $z = -t\sqrt{c}$, & $z = PQ - t\sqrt{c}$ qui leur appartiennent.

Pour ce qui est de la nature de chaque mouvement particulier, il faudra la déterminer par la construction générale des espaces & de vitesses. On trouvera pour cela, 1.° Que toutes les particules subissent successivement la même agitation dépendante de la nature de toute la *pulsion* primitive. 2.° Que, si on suppose que la *pulsion* primitive consiste dans le seul déplacement des particules, sans aucune vitesse imprimée, l'agitation de chaque particule ne sera

com-

composée que d'une seule allée, & d'un retour à son lieu d'équilibre, après lequel elle demeurera immobile. 3.° Que, si l'on suppose au contraire que la *pulsion* primitive ne consiste que dans l'impression d'une certaine vitesse, les particules, pendant tout le tems de leur agitation, s'écarteront continuellement de leurs propres points d'équilibre, & elles n'y reviendront plus comme auparavant. 4.° Qu'enfin, si la *pulsion* primitive dépand de l'une & de l'autre cause, l'agitation des particules sera composée de celles dont nous venons de parler; ce qui paroit être le cas de la nature.

16. M. Euler dans une lettre du 23. Octob. 1759. m'a fait l'honneur de me mander, que la lecture de *mes Rech. sur le Son* lui avoit suggéré le dénouvement d'une difficulté qui s'étoit présentée a lui depuis long-tems. Cette difficulté consistoit à savoir pourquoi, les ébranlemens primitifs se repandant d'abord naturellement de deux côtés opposés, les ébranlemens dérivatifs ne se propagent plus que d'un seul côté, & toujours suivant la même direction. La raison de cette différence dépand de la nature particulière des ébranlemens dérivatifs, qui est telle que leur propagation ne peut avoir lieu que d'un seul côté.

Pour s'en convaincre qu'on examine les formules des valeurs de z & de u trouvées à la fin de *l'Art. 6.*, & supposant que z & u soient les excursions & les vitesses données, qu'on cherche celles qui en résultent pour un tems quelconque t' & pour une particule quelconque déterminée par l'abscisse x'. Il est visible qu'il n'y a pour cela que à substituer z à la place de Z & u à la place de V; & désignant par z' & u' les valeurs cherchées, on aura

$$z' = \frac{z^{(x'+t'\sqrt{c})} + z^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2}$$

$$+ \frac{\int u\,dx^{(x'+t'\sqrt{c})} - \int u\,dx^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$u' =$

$$u' = \frac{u^{(x'+t'\sqrt{c})} + u^{(x'-t'\sqrt{c})}}{2}$$

$$+ \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\frac{dz}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c})} - \frac{dz}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c})}\right).$$

Maintenant on fait, par ce qu'on a démontré (*Art.* 12.); que les termes, dont les expofans font $x - t\sqrt{c}$, font les feuls qui déterminent la propagation fuivant la direction PP', & que l' autre la propagation fuivant $P'P$ dépend fimplement des termes qui renferment la quantité $x + t\sqrt{c}$; donc pour connoître la propagation des ébranlemens de l' onde $P'Q'$, il ne faudra fubftituer, au lieu de z & de u, que les feuls termes

$$\frac{Z}{2}^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{\int V dx}{2\sqrt{c}}^{(x-t\sqrt{c})} \;\&$$

$$\frac{V}{2}^{(x-t\sqrt{c})} - \frac{\sqrt{c}}{2} \times \frac{dZ}{dx}^{(x-t\sqrt{c})}$$ ce qui donnera

en pofant $x' + t'\sqrt{c}$ au lieu de x dans les expofans

$$z' = \frac{Z^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + Z^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$- \frac{\int V dx^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + \int V dx^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4\sqrt{c}}$$

$$+ \frac{\int V dx^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - \int V dx^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4\sqrt{c}}$$

$$- \frac{Z^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - Z^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$u' = \frac{V^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + V^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$- \sqrt{c}.\ \frac{\frac{dZ}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} + \frac{dZ}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$+ \sqrt{c}.\ \frac{\frac{dZ}{dx}^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})} - \frac{dZ}{dx}^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}$$

$$-\frac{V^{(x'+t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}-V^{(x'-t'\sqrt{c}-t\sqrt{c})}}{4}.$$

Dans ces formules il eſt viſible que les termes, dont les expoſans renferment la quantité $+t'\sqrt{c}$ s'évanoüiſſent tous d'eux mêmes, & qu'il ne reſte que ceux où la même quantité ſe trouve avec le ſigne négatif; d'où il s'enſuit que la propagation des ébranlemens z' & u' ne peut ſe faire que dans le ſeul ſens PP'.

On prouveroit la même choſe pour les ébranlemens propagés d'abord ſuivant la direction oppoſée $P'P$; car en ſubſtituant, pour z & u, les ſeuls termes dont les expoſans contiennent $+t\sqrt{c}$; on verra que les formules réſultantes ne feront compoſées que de termes, où la quantité $t'\sqrt{c}$ ſe trouvera avec le ſigne $+$.

17. Nous avons ſuppoſé ci-deſſus que la fibre aérienne étoit infinie de l'un & de l'autre côté; & cette hipotéſe nous a donné des courbes *génératrices*, compoſées d'une ſeule branche terminée de part & d'autre, & pour ainſi dire iſolée. Mais il n'en feroit pas de même ſi la fibre étoit elle même terminée des deux côtés, ou d'un ſimplement; car puiſque la manière de continuer les courbes *fondamentales*, & *dérivées* eſt générale, & que les extrémités fixes de la fibre ſont les points, autour deſquels on doit, pour ainſi dire, faire tourner chaque branche, pour en avoir la continuation, ainſi qu'on l'a enſeigné (*Art.* 7.), il eſt évident que, dans le cas d'une ſeule extrémité fixe les courbes *génératrices* feront compoſées de deux branches égales, & ſemblablement ſituées de part & d'autre du point qui conſtitue cette extrémité; & que dans le cas de deux extrémités fixes, les courbes *génératrices* auront un nombre infini de branches égales & ſemblablement ſituées autour des deux points qui conſtituent les extrémités données. Delà ſi on cherche la propagation des ondes ſonores par la méthode de l'*Art.* 12.; on trouvera ſans beaucoup de peine

que

que chaque onde, venant rencontrer une des extrémités fixes, devra se réfléchir, pour ainsi dire, & retourner en arrière avec la même viteſſe, & conſervant la même nature qu'elle avoit avant la réflexion, d'où il réſultera des *échos* ſimples ou compoſés, ainſi qu'on l'a expliqué (*Chap.* II. de la *Sect.* II. *des Rech. préc.*).

Je ne m'arreterai pas ici à démontrer plus en détail cette Théorie des *échos*, non plus que les autres propriétés du Son, qui dépendent des principes que nous venons d'établir. Il ne faut que relire attentivement la *Section citée* pour voir que les propoſitions qu'on a démontré, en ne conſidérant que des mouvemens inſtantanés dans les particules de l'air, ſont auſſi vraies dans l'hipotéſe préſente des ondulations.

Mais il eſt un point eſſentiel de la Théorie du Son, dont on n'a pas encore parlé juſqu'à préſent; c'eſt ſon intenſité. Or de ce que les ondes ſonores ne ſouffrent aucune altération en parcourant un eſpace quelconque, comme on l'a fait voir (*Art.* 12.), il eſt ſimple de conclure que l'intenſité du Son ſera conſtante & indépendante de la diſtance du corps ſonore. Mais cette concluſion ne peut avoir lieu que dans l'hipotéſe que le Son ſoit obligé de ſuivre une ſeule & même direction, comme ſi l'on ſuppoſoit l'air renfermé dans des tuïaux, ou des conduits aſsès étroits, par rapport à leur longueur; ainſi, dans les acqueducs de Rome, le P. Kircher rapporte que les Sons ne reçoivent point de diminution ſenſible par l'eſpace de 600. piés environ. Il n'en eſt pas de même pour l'air libre, dans lequel le Son ſe propageant de tous côtés à la ronde, doit s'affaiblir à méſure qu'il s'éloigne du corps ſonore; & c'eſt ce que l'expérience journaliére apprend, & que nous allons auſſi démontrer par la Théorie, en adoptant la ſeconde hipotéſe de *l'Art.* 11., qui reſte encore à examiner.

§. II.

§ II.

De la propagation du Son dans l'hipotése des ondes sphériques.

18. DANS cette hipotése on conserve à la masse de l'air ses trois dimensions ; mais on suppose que, aïant pris un point fixe pour centre, toutes les particules qui se trouvent dans la direction de chaque rayon se meuvent sans sortir de cette direction, & que leurs mouvemens ne dépandent que du tems t, & de la distance de chacune d'elles au centre. Delà il est clair qu'il doit se former dans l'air des ondulations sphériques & concentriques, dont la détermination soit contenue dans une seule équation, de même que dans le cas de l'hipotése précédente. Cette équation peut se trouver soit par l'appliquation des formules générales, ainsi que l'a fait M. Euler dans son *Mémoire pag.* 1. cidessus, ou plus simplement encore, quoique avec moins de rigueur, en considérant le mouvement d'un fluide élastique, renfermé dans un tuïau conique ; comme on le verra plus bas. Nous nous contenterons pour le présent d'emprunter l'équation de M. Euler, & d'y appliquer notre méthode, afin d'avoir une construction qui ne soit point assujetie à la loi de continuité, comme l'exige la Théorie de la propagation du Son. Cette équation, en substituant z pour u, & x pour V se réduit à celle-ci $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2c\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right)$, qui peut être traitée de la même manière que celle du Problême I.

PROBLEME II.

CONservant les mêmes noms & les mêmes suppositions du Problême I., avec cette seule différence que les mouvemens des

des particules soient contenus dans l'équation $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2c\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right)$ *construire cette même équation.*

Je commence par multiplier l'un & l'autre membre par Mdx (M étant une fonction quelconque de x); ensuite j'intégre en ne faisant varier que x; j'ai, $\int\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c \int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx + 2c\int\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right) Mdx$. Je transforme d'abord l'intégrale $\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) Mdx$ en $\left(\frac{dz}{dx}\right) M - \int\left(\frac{dz}{dx}\right) \times \left(\frac{dM}{dx}\right) dx$, ensuite en $\left(\frac{dz}{dx}\right) M - z\left(\frac{dM}{dx}\right) + \int z\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right) dx$. Je change de même l'autre intégrale $\int\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right) Mdx$ en $\frac{zM}{x} - \int \frac{z}{x} \left(\frac{dM}{dx}\right) dx$, & je tire par la substitution la nouvelle équation $\int\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c\left(M\left(\frac{dz}{dx}\right) - z\left(\frac{dM}{dx}\right) + \frac{2zM}{x}\right) + c\int z\left(\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx}\right) dx$.

Je dois maintenant supposer M tel, que $\frac{Mdz}{dx} - \frac{zdM}{dx} + \frac{2zM}{x}$ soit $= 0$, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$; or puisque l'on a déja dans ces deux cas $z = 0$, par hipotése, il suffit que M le soit aussi, ce qui donnera les mêmes conditions à remplir par les constantes de M, que l'on a eu dans le *Probl.* I.

L'équation restante sera donc $\int\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) Mdx = c\int z\left(\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx}\right) dx$, où il faudra supposer $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2dM}{xdx} = kM$.

Cette

Cette équation en M est intégrable par les méthodes connues ; mais en voici une qui est, si je ne me trompe, la plus simple qu'on puisse emploier dans ce cas.

Soit supposé $M = e^{\int \frac{dx}{p}}$, on aura par la substitution $- \frac{dp}{p^2 dx} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{px} = k$, savoir $kp^2 + \frac{2p}{x} + \frac{dp}{dx} = 1$. Je vois que cette équation peut s'écrire ainsi $k\,(p + \frac{1}{kx})^2 dx + d\cdot(p + \frac{1}{kx}) = dx$, donc si on fait $p + \frac{1}{kx} = q$, on aura $kq^2dx + dq = dx$; d'où l'on tire $dx = \frac{dq}{1 - kq^2}$ & intégrant par les logarithmes $x = \frac{1}{2\sqrt{k}}\, l.\, (\frac{1 + q\sqrt{k}}{1 - q\sqrt{k}})$ ou bien en passant aux exponentielles, avec l'addition d'une constante C, $q\sqrt{k} = \frac{Ce^{2x\sqrt{k}} - 1}{Ce^{2x\sqrt{k}} + 1}$, donc $p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}} \times \frac{Ce^{2x\sqrt{k}} - 1}{Ce^{2x\sqrt{k}} + 1}$. Il faut maintenant pour avoir la valeur de M, intégrer la quantité $\frac{dx}{p}$. Or il est visible que si l' on substitue pour p son expression telle qu'on vient de la trouver, on a une différentielle qu'il seroit assès difficile, peut être impossible de ramener à l' intégration ; mais on peut semplifier beaucoup le calcul, en supposant l' arbitraire C nulle ou infinie ; dans le prémier cas on a $p = -\frac{1}{kx} - \frac{1}{\sqrt{k}}$, & dans le second $p = -\frac{1}{kx} + \frac{1}{\sqrt{k}}$, & combinant l' une & l' autre valeur, $p = -\frac{1}{kx} \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$. On aura donc $\int \frac{dx}{p} = \int \frac{kx\,dx}{-1 \pm x\sqrt{k}} = -1 \pm x\sqrt{k} + l.\,(-1 \pm x\sqrt{k})$,

 &

& par conséquent, en ajoutant une constante A, $M = A(-1 \pm x\sqrt{k})\, e^{-1 \pm x\sqrt{k}}$; ou bien à cause de l'ambiguité des signes $M = A(-1 + x\sqrt{k})\, e^{-1+x\sqrt{k}} + B(-1 - x\sqrt{k})\, e^{-1-x\sqrt{k}}$. Or il faut que M soit $= 0$, lorsque $x = 0$, d'où il suit que $A + B = 0$, & par conséquent $B = -A$, donc en changeant la valeur de la constante A, $M = A(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}) - Ax\sqrt{k}\,(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}}$, ou bien encore $M = A(\text{sin.}\, x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}\,\text{cos.}\, x\sqrt{-k})$.

Telle est la valeur de M qu'il falloit trouver; si l'on en prend la différence, on a $\frac{dM}{dx} = -Akx\,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}$, d'où l'on voit qu'au commencement, où $x = 0$, on a aussi $\frac{dM}{dx} = 0$, de sorte que le terme $-z\frac{dM}{dx}$ s'évanoüit de lui même, sans qu'il soit besoin de supposer $z = 0$ dans ce point; ce qui nous montre que la valeur de z pourra être ici tout ce que l'on voudra.

Il faut maintenant déterminer k par la condition que M devienne nul, lorsque $x = a$; on aura donc pour cela $A(\text{sin.}\, a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k}\,\text{cos.}\, a\sqrt{-k})$, ce qui donne $a\sqrt{-k} = \frac{\text{sin.}\, a\sqrt{-k}}{\text{cos.}\, a\sqrt{-k}} = \text{tang.}\, a\sqrt{-k}$, c'est-à-dire que l'angle $a\sqrt{-k}$ devra être égal à sa tangente. Cherchant donc un tel angle, & le nommant φ on aura $\sqrt{-k} = \frac{\varphi}{a}$. Quoique il soit impossible d'exprimer cet angle algébriquement, on peut néanmoins, par la seule considération du cercle, se convaincre, qu'il n'est pas unique & déterminé, mais qu'il y en a une infinité qui ont tous la même propriété, de sorte que $\sqrt{-k}$ aura aussi une infinité de valeurs différentes, qui satisferont toutes également. On peut voir dans le *Tome* II. de *l'Introd. à l'Analise des infinimens petits de* M. Euler *le dernier Prob. du Chap.* XXII., on l'on trouvera une maniére assés simple de déterminer tous ces angles par approximation. Au reste

nous

nous n'aurons pas besoin dans la suite de connoître leurs valeurs, il nous suffira de savoir que leur nombre est infini.

Après avoir ainsi déterminé la variable M, si on suppose, comme dans le *Problême* I. $\int z M dx = s$, & qu'on pratique les mêmes différentiations à l'égard de t notre dernière équation intégrale, deviendra $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks$, qui est la même que nous avons déja intégré dans le *Problême cité*. On aura donc ici de même

$$s = S \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \operatorname{sin.} t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} - R\sqrt{-ck} \operatorname{sin.} t\sqrt{-ck},$$

& mettant à la place des quantités s, r, S, & R leurs valeurs en z, u, Z, & V,

$$\int z M dx = \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\operatorname{sin.} t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \operatorname{cos.} t\sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck} \operatorname{sin.} t\sqrt{-ck} \int Z M dx.$$

Il faut maintenant substituer la valeur de M, & faire les autres opérations que demande notre méthode; mais comme cette valeur de M est différente de celle du Problême I., il est clair que les mêmes procédés que nous avons suivi alors ne suffiront pas à présent; on pourra cependant s'en servir de nouveau avec succès, en préparant par une simple transformation les expressions $\int z M dx$, $\int u M dx$ avec les deux autres $\int Z M dx$ & $\int V M dx$ de la manière que voici. Substituant la valeur de M j'ai d'abord $\int z \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-k} \int z x \operatorname{cos.} x\sqrt{-k}\, dx$; or il est clair que si l'on n'avoit que le prémier membre de cette expression, on seroit exactement dans le cas du Problême I.; il ne s'agira donc que de ramener aussi le second membre à la même forme; pour cela je change d'abord la formule $\int z x \operatorname{cos.} x\sqrt{-k}\, dx$ en $\frac{z x \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}}{\sqrt{-k}} - \frac{1}{\sqrt{-k}} \int \left(\frac{d.zx}{dx}\right) \operatorname{sin.} x\sqrt{-k}\, dx$, ensuite je remarque que, puisque on suppose que les intégrales ne

 s'éten-

s'étendent que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = a$, le terme algébrique qui est de lui même $= 0$ dans le cas de $x = 0$, & qui le devient aussi dans le cas de $x = a$, à cause que z s'évanoüit par hipotése, ce terme, dis-je, devra être entiérement effacé; de sorte que l'on aura simplement

$$\int z x \text{ cos. } x\sqrt{-k}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{-k}}\int\left(\frac{d.zx}{dx}\right) \text{ sin. } x\sqrt{-k}\, dx.$$

Substituant donc cette transformée dans l'expression de $\int z M dx$, elle deviendra $\int\left(z + \frac{d.zx}{dx}\right) \text{ sin. } x\sqrt{-k}\; dx$. Faisant des opérations semblables sur les autres expressions intégrales, & supposant pour plus de simplicité

$$z + \frac{d.zx}{dx} = z', \; u + \frac{d.ux}{dx} = u'$$

$$Z + \frac{d.Zx}{dx} = Z', \; V + \frac{d.Vx}{dx} = V'$$

nos deux équations intégrales deviendront

$$\int z' \text{ sin. } x\sqrt{-k}\; dx = \text{cos. } t\sqrt{-ck} \int Z' \text{ sin. } x\sqrt{-k}\; dx$$
$$+ \frac{\text{sin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \text{ sin. } x\sqrt{-k}\; dx$$

$$\int u' \text{ sin. } x\sqrt{-k}\; dx = \text{cos. } t\sqrt{-ck} \int V' \text{ sin. } x\sqrt{-k}\, dx$$
$$- \sqrt{-ck} \text{ sin. } t\sqrt{-ck} \int Z' \text{ sin. } x\sqrt{-k}\, dx.$$

Ces équations sont réduites à l'état de celles que nous avons appris à construire dans le *Prob. précédent*. Il sera donc facile de leur appliquer la même méthode; or puisque tout se réduit à faire disparoître la quantité $\sqrt{-k}$ à cause du nombre infini de valeurs, dont elle est susceptible, il est clair que quoique ces valeurs ne soient pas les mêmes ici que dans le *Prob. cité*; néanmoins les résultats des opérations seront parfaitement semblables, ensorte qu'il ne faudra que substituer z', u', Z' & V' à la place de z, u, Z & V pour avoir tout d'un coup

$$z' = \frac{Z'(x + t\sqrt{c}) + Z'(x - t\sqrt{c})}{2}$$

+

$$+ \frac{\int V' dx^{(x+t\sqrt{c})} - \int V' dx^{(x-t\sqrt{c})}}{2\sqrt{c}}$$

$$u' = \frac{V'^{(x+t\sqrt{c})} + V'^{(x-t\sqrt{c})}}{2}$$

$$+ \sqrt{c}\ \frac{\left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x+t\sqrt{c})} - \left(\frac{dZ'}{dx}\right)^{(x-t\sqrt{c})}}{2}$$

Remettant à présent au lieu de z', u', Z', V' leurs valeurs en z, u, Z & V, on aura deux équations qui détermineront les deux variables inconnues z & u par les données Z & V pour un tems quelconque t.

20. Les deux formules que nous venons de trouver étant parfaitement analogues à celles du *Prob.* I. admettront aussi une construction semblable à celle qu'on a déduit des courbes *fondamentales* & *dérivées* dans *l'Art.* 7. Supposons donc ici que les courbes ANB, AQB (*fig.* 1. & 2.) soient les lieux des valeurs de Z' & de V', savoir de $Z + \frac{d.Zx}{dx}$ & de $V + \frac{d.Vx}{dx}$ pour chaque abscisse x, & que les autres courbes anb, AqB (*fig.* 3. & 4.) en dépendent de la manière qu'on a dit dans *l'Art. cité*; on aura pour une abscisse quelconque $x = AM$, & pour un tems quelconque $t = \frac{MM'}{\sqrt{c}} = \frac{'MM}{\sqrt{c}}$

$$z' = z + \frac{d.zx}{dx} = \frac{M'N' + 'M'N}{2} + \frac{M'q' - 'M'q}{2}$$

$$u' = u + \frac{d.ux}{dx} = \frac{M'Q' + 'M'Q}{2} + \frac{M'n' - 'M'n}{2}$$

Si on désigne par P & Q ces valeurs de z' & u', de sorte que

$$z + \frac{d.zx}{dx} = 2z + \frac{x\,dz}{dx} = P \ \&$$

$$u + \frac{d.ux}{dx} = 2u + \frac{x\,du}{dx} = Q$$

on aura en intégrant, après avoir multiplié par $x\,dx$

$z x^2$

$z x^2 = \int P x dx$; & $z = \frac{\int P x dx}{x^2}$ & de même

$u x^2 = \int Q x dx$ & $u = \frac{\int Q x dx}{x^2}$.

Que φ & ψ repréſentent deux fonctions quelconques réguliéres ou irréguliéres, telles que

$$MN = \varphi AM = \varphi x$$
$$MQ = \psi AM = \psi x, \text{ on aura}$$
$$M'N' = \varphi AM' = \varphi (x + t\sqrt{c})$$
$${}'M'N = \varphi A'M = \varphi (x - t\sqrt{c})$$
$$M'Q' = \psi AM' = \psi (x + t\sqrt{c})$$
$${}'M'Q = \psi A'M = \psi (x - t\sqrt{c}) \;\&$$
$$Mn = \sqrt{c}\, \frac{d.\varphi AM}{d.AM} = \sqrt{c}\, \frac{d.\varphi x}{dx}$$
$$Mq = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi AM d.AM = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi x dx,$$

& par conſéquent

$$M'n' = \sqrt{c}\, \left(\frac{d.\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx}\right)$$
$${}'M'n = \sqrt{c}\, \left(\frac{d.\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx}\right)$$
$$M'q' = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi (x + t\sqrt{c}) dx$$
$${}'M'q = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \psi (x - t\sqrt{c}) dx; \text{ donc}$$
$$P = \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\int \psi(x + t\sqrt{c}) dx - \int \psi(x - t\sqrt{c}) dx}{2\sqrt{c}},$$
$$Q = \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2} + \sqrt{c}\, \frac{\left(\frac{d.\varphi(x + t\sqrt{c})}{dx}\right) - \left(\frac{d.\varphi(x - t\sqrt{c})}{dx}\right)}{2}$$

Soit

Soit supposé $\frac{d.\varphi x}{dx} = \varphi' x$, $\frac{d.\varphi' x}{dx} = \varphi'' x$ &c. & $\int \varphi x dx = {}'\varphi x$, $\int \varphi x dx = {}''\varphi x$ &c., & ainsi pour la fonction ψ on aura $\int x.\varphi(x \pm t\sqrt{c})dx = x\int\varphi(x \pm t\sqrt{c})dx - \int dx \int\varphi(x \pm t\sqrt{c})dx = x'\varphi(x \pm t\sqrt{c}) - {}''\varphi(x \pm t\sqrt{c})$; traitant de la même manière les autres formules intégrales qui composent les valeurs de $\int Pxdx$, & de $\int Qxdx$ on aura après toutes les substitutions,

$$z = \frac{'\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{''\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{''\psi(x+t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} - \frac{'''\psi(x+t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}}$$
$$+ \frac{'\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{''\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \frac{''\psi(x-t\sqrt{c})}{2x\sqrt{c}} + \frac{'''\psi(x-t\sqrt{c})}{2x^2\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{'\psi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \frac{''\psi(x+t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{'\varphi(x+t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{'\psi(x-t\sqrt{c})}{2x} - \frac{''\psi(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \sqrt{c}\,\frac{\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{'\varphi(x-t\sqrt{c})}{2x^2}$$

21. On peut semplifier ces expressions de la manière suivante. Au lieu de $''\varphi(x+t\sqrt{c}) + \frac{'''\psi(x+t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je pose simplement $\Delta(x+t\sqrt{c})$, & au lieu de $''\varphi(x-t\sqrt{c}) - \frac{'''\psi(x-t\sqrt{c})}{\sqrt{c}}$ je substitue de même la seule expression $\Gamma(x-t\sqrt{c})$ (Δ & Γ étant de nouvelles fonctions variables différentes de φ & ψ), & prenant les différences de la manière indiquée ci-dessus, on obtiendra les formules:

$z =$

$$z = \frac{\Delta'(x + t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Delta(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$+ \frac{\Gamma'(x - t\sqrt{c})}{2x} - \frac{\Gamma(x - t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$u = \sqrt{c}\,\frac{\Delta''(x + t\sqrt{c})}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{\Delta'(x + t\sqrt{c})}{2x^2}$$
$$- \sqrt{c}\,\frac{\Gamma''(x - t\sqrt{c})}{2x} + \sqrt{c}\,\frac{\Gamma'(x - t\sqrt{c})}{2x^2}$$

lesquelles s'accordent pour le fond avec celles que M. Euler a donné dans son *Mémoire* à la *pag.* 9. ci-dessus, où il nomme u, ce que nous avons appellé z & V, ce que nous avons nommé x.

22. La construction trouvée, au commencement de *l'Art.* 20., n'est bonne que pour les cas, où $x \pm t\sqrt{c}$ n'est pas plus grande que a, ni moindre que *zero*, puisque les valeurs de Z & de V ne sont données que pour la simple étendue de l'axe $AB = a$. Il faut donc chercher ici, comme on l'a fait dans le *Prob.* I., une manière de continuer les courbes ANB, AQB, &c. au delà des points A & B. Pour cela aiant conservé la construction de l' *Art.* 7. avec la même équation des courbes $A'S'B'$, $A''S''B''$, on examinera leur cours au delà des points B' & A'', en supposant la quantité $\sqrt{-k}$ déterminée par l' équation $a\sqrt{-k} = \frac{\text{sin.}\, a\sqrt{-k}}{\text{cos.}\, a\sqrt{-k}}$ (*Art.* 19.).

Pour ce qui regarde la branche $A'''S$ qui est du côté des abscisses négatives rien n' est d' abord plus facile que de la trouver; car faisant x négatif, sin. $x\sqrt{-k}$ devient simplement négatif sans changer de valeur; d'où il s'ensuit que cette branche ne doit être que la branche même $A''S''$ renversée de la manière qu'on l' a déja fait dans la *fig.* 6. Ainsi on prouvera de nouveau par le même raisonnement de *l'Art.* 7. que la partie des aires qui répond à l'abscisse

AA''

AA'' sera la même que celle qu'on pourroit former sur l'abscisse AA', en emploïant la courbe $A'S'$ & la courbe AN continuée dessous de l'axe de la même manière que la $A''S''$; d'où l'on voit que la continuation de la courbe ANB au delà de A, sera aussi la même que celle qu'on a pratiqué dans la *fig.* 7.

Mais il n'en sera pas ainsi pour la continuation au delà de B; car sin. $x\sqrt{-k}$ n'aïant plus dans le cas présent des valeurs égales & contraires autour du point B' qui répond à $x = a$, la branche $B'\,'S$ ne sauroit non plus être la même que la $B'S'$ renversée. Il ne seroit pas difficile de connoitre la nature de cette branche $B'\,'S$, mais cela ne serviroit de rien pour l'objet présent, puisque la méthode de *l'Art.* 7. demande que la branche $B'\,'S$ puisse être substituée à la place de la $B''S''$, afin qu'on ait la courbe entière $A'S''B''$ qui soit la même que la $A'S'B'$, & que la ASB. Pour remplir cette condition il n'y a pas d'autre moïen que de transformer chaque la portion d'aire qui répond à $B'B$ en une autre égale, & dans laquelle la branche $B'\,'S$ soit semblable & diamétralement opposée à la $B'S'$, comme dans la *fig.* 6. Examinons pour cela cette expression intégrale $\int Z'$ sin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$, laquelle étant prise depuis le point B', ou $z = 0$, jusqu'au point B, exprime l'aire formée par les produits des ordonnées des deux courbes ANB, $A'SB'$ rélativement à l'espace $B'B$; & voïons si on peut la changer en une autre de la forme de $-\int(Z)$ sin. $(a-z)\sqrt{-k}\,dz$, (Z) désignant une quantité quelconque donnée en Z'.

Je prens cette autre expression $\int R$ sin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$, & je la change dans son égale $\int R$ sin. $a\sqrt{-k} \times$ cos. $z\sqrt{-k}\,dz$ $+ \int R$ cos. $a\sqrt{-k} \times$ sin. $z\sqrt{-k}\,dx$. Je substitue ensuite à la place de sin. $a\sqrt{-k}$, la quantité $a\sqrt{-k}$ cos. $a\sqrt{-k}$ tirée de l'équation qui détermine la valeur de $\sqrt{-k}$; & je fais évanoüir à l'aide d'une intégration par parties le coéficient

 $\sqrt{-k}$

$\sqrt{-k}$ introduit par cette substitution ; j'ai ainsi
$\int R$ sin. $a\sqrt{-k}\times$ cos. $z\sqrt{-k}\,dz$
$= a\sqrt{-k}\int R$ cos. $a\sqrt{-k}\times$ cos. $z\sqrt{-k}\,dz$
$= aR$ cos. $a\sqrt{-k}\times$ sin. $z\sqrt{-k}$
$- a\int$ cos. $a\sqrt{-k}\times$ sin. $z\sqrt{-k}\,dR$.
Le terme algébrique de cette transformée s'évanoüit de lui même, lorsque $z = o$, donc si on suppose $R = o$, lorsque $z = B'B$ (nous verrons ci-après que cette supposition est possible) on pourra l'effacer entiérement ; & la prémiére transformée deviendra par la substitution $\int R$ cos. $a\sqrt{-k}\times$ sin. $z\sqrt{-k}\,dz - a\int$ cos. $a\sqrt{-k}\times$ sin. $z\sqrt{-k}\,dR = \int R$ sin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$. Développons à présent les produits des *sinus* & *cosinus* ; on aura l'équation

$$\frac{1}{2}\int R \text{ sin. } (a+z)\sqrt{-k}\,dz - \frac{1}{2}\int R \text{ sin. } (a-z)\sqrt{-k}\,dz$$
$$-\frac{1}{2}a\int \text{sin. } (a+z)\sqrt{-k}\,dR + \frac{1}{2}a\int \text{ sin. } (a-z)\sqrt{-k}\,dR$$
$$= \int R \text{ sin. } (a+z)\sqrt{-k}\,dz \text{ ; \& réduisant}$$
$$\int\left(R + \frac{a\,dR}{dz}\right) \text{ sin. } (a+z)\sqrt{-k}\,dz$$
$$= -\int\left(R - \frac{a\,dR}{dz}\right) \text{ sin. } (a-z)\sqrt{-k}\,dz.$$

Comparant donc les deux membres de cette équation avec les formules proposées $\int Z'$ sin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$, & $-\int(Z)$ sin. $(a-z)\sqrt{-k}\,dz$, on aura $Z' = R + \frac{a\,dR}{dz}$ & $(Z) = R - \frac{a\,dR}{dz}$, d'où l'on déduira le rapport entre (Z) & Z'. Multipliant la prémiére équation par $e^{\frac{z}{a}}\,dz$, & intégrant il vient $\int Z' e^{\frac{z}{a}}\,dz = a\,R\,e^{\frac{z}{a}}$, & $R = \frac{e^{-\frac{z}{a}}\int Z' e^{\frac{z}{a}}\,dz}{a}$; d'où l'on tire en substituant $(Z) =$

$\frac{2e^{-\frac{z}{a}} \int Z' e^{\frac{z}{a}} dz}{a} - Z'$. Or nous avons supposé que R étoit $= o$, lorsque $z = B'B$; on satisfera donc à cette condition, en prenant l'intégrale $\int Z' e^{\frac{z}{a}} dz$, tel qu'il s'évanoüisse dans ce cas; il ne faudra pour cela que poser $B'B - y$ au lieu de z & de dy au lieu de dz, & commencer l'intégration avec les abscisses y du point B en allant vers B'; on aura par ce moïen $(Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}} \int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$.

Telle est la valeur de (Z) qui étant prise au lieu de Z' pour multiplier chaque ordonnée correspondante de la branche $B'S$ produira une aire égale à celle qui se formeroit en multipliant la valeur de Z' par l'ordonnée correspondante non pas de la branche $B'S$, mais de celle qui feroit la vraie continuation de la courbe $A'S'B'$ dans notre cas. Delà, & du raisonnement de l'*Art.* 7. il n'est pas difficile de conclure que la portion d'aire qui répond naturellement à $B'B$ dans la formule $\int Z' \text{ sin.} (X + t\sqrt{c}) \sqrt{-k}\, dx$ peut être changée en une autre, formée sur $B B''$ par les ordonnées de la branche $S''B''$, & par celles d'un autre branche, comme la BN'' (*fig.* 10.) qui serve, pour ainsi dire, de continuation à la courbe fondamentale ANB, & qui soit telle qu'en prenant de part & d'autre de B les abscisses égales BP', $B'P = y$, on ait toujours $P'N'' = (Z) = \frac{2e^{\frac{y}{a}} \int Z' e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - Z'$

$= \frac{2e^{\frac{y}{a}} \int P''N e^{-\frac{y}{a}} dy}{a} - P''N$.

Voila donc commant il faudra continuer la courbe *fondamentale* ANB au delà de B pour pouvoir faire usage de la construction donnée ci-dessus, lorsque X a des valeurs plus grandes que a.

Tout ce que nous avons jusqu'ici enseigné sur la manière de continuer cette courbe d'un côté & de l'autre, s'appliquera aussi à l'autre courbe *fondamentale* AQB, & encore aux courbes *dérivées* anb, Aqb, pourvu que dans ces dernières on ait soin de placer les deux branches de continuation au dessus de l'axe par la raison qu'on a dit à la fin de *l'Art.* 7.

La construction qu'on vient de trouver n'est encore suffisante que pour les cas, où X est contenu entre les limites $-a$ & $+2a$. Pour lui donner toute la généralité qu'il est possible, reprenons la formule $\int Z'$ sin. $(a+z)\sqrt{-k}\,dz$ qui a été changée en $-\int(Z)$ sin. $(a-z)\sqrt{-k}\,dz$; posant $a+z=x$, on aura $\int Z'$ sin. $x\sqrt{-k}\,dx=\int(Z)$ sin. $(x-2a)\sqrt{-k}\,dx$, d'où l'on voit que l'abscisse x peut être diminuée de $2a$, pourvu qu'on change l'ordonnée Z' en (Z); de même si $((Z))$ est une fonction de (Z), telle que (Z) l'est de Z', on pourra diminuer de $2a$ l'abscisse qui se rapporte à (Z), en changeant (Z) en $((Z))$; donc on pourra aussi diminuer l'abscisse de Z' de $4a$ en changeant immédiatement Z' en $((Z))$; & ainsi de suite. Delà il résulte que le reste de la continuation des courbes, soit *fondamentales*, soit *dérivées* au delà du point B, pourra se déduire aisément de la branche qui répond à l'abscisse $=2a$; car on n'aura qu'à transformer successivement cette branche en d'autres, dont les ordonnées aux mêmes abscisses se répondent entr'elles, comme les expressions Z', (Z), $((Z))$ &c. & appliquer ensuite par ordre, & suivant la direction AB toutes ces branches l'une à côté de l'autre le long de l'axe AB prolongé à l'infini.

Par un raisonnement tout opposé, on prouvera que la continuation des mêmes courbes au delà de A se fera par un assemblage semblable de branches dérivées l'une après l'autre de la seule branche qui répond à l'abscisse $2a$, mais avec des opérations contraires aux précédentes, savoir de manière que les ordonnées qui répondent à une même ab-

scisse

ſciſſe x dans chaque branche à commencer du point A ſoient entr'elles, comme les quantités (Z) & Z'.

Par-là on trouvera ſans difficulté que les courbes, dont il s'agit, auront autour du point A une figure ſemblable, avec cette ſeule différence que pour les courbes *fondamentales* les deux branches infinies de part & d'autre de A ſeront diamétralement oppoſées, ſavoir, l'une au deſſus, l'autre au deſſous de l'axe; & que pour les courbes *dérivées*, les branches ſeront l'une & l'autre du même côté de l'axe; d'où il s'enſuit qu'aïant exécuté la continuation du côté des abſciſſes poſitives à l'infini, ſuivant ce qu'on a dit ci-deſſus, on n'aura plus qu'à renverſer la même courbe au delà de A, & au deſſous, ou au deſſus de l'axe, ſelon qu'elle appartiendra aux *fondamentales*, ou aux *dérivées*.

23. Par la méthode qui vient d'être expliquée, nous avons la manière de continuer de part & d'autre à l'infini les courbes qui dépendent des valeurs de Z & de V, données à volonté dans le prémier inſtant du mouvement, ſans s'embaraſſer que les différentes branches de ces courbes ſoient liées entr'elles par la loi de continuité. Mais ſi on vouloit ſi borner à admettre cette loi, on pourroit obtenir les mêmes réſultats avec beaucoup moins de peine par la ſimple conſidération des formules données à la fin de l'*Art.* 20. Toute la difficulté ſe réduiroit à chercher la nature des fonctions φ & ψ au delà des points A & B, par la condition que z & u ſoient $=$ o dans ces points quelque valeur qu'on ſuppoſe à t.

Poſons d'abord dans ces formules $x = 0$, & z & u de même $= 0$, on aura les équations

$$0 = \frac{{}^{\backprime}\varphi t\sqrt{c} + {}^{\backprime}\varphi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{{}^{\backprime\backprime}\varphi t\sqrt{c} + {}^{\backprime\backprime}\varphi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$
$$+ \frac{{}^{\backprime\backprime}\psi t\sqrt{c} - {}^{\backprime\backprime}\psi - t\sqrt{c}}{2x\sqrt{c}} - \frac{{}^{\backprime\backprime\backprime}\psi t\sqrt{c} - {}^{\backprime\backprime\backprime}\psi - t\sqrt{c}}{2x^2\sqrt{c}}$$

o =

$$o = \frac{{}'\psi\, t\sqrt{c} + {}'\psi - t\sqrt{c}}{2x} - \frac{{}''\psi\, t\sqrt{c} + {}''\psi - t\sqrt{c}}{2x^2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\phi\, t\sqrt{c} - \phi - t\sqrt{c}}{2x} - \sqrt{c}\,\frac{{}'\phi\, t\sqrt{c} - {}'\phi - t\sqrt{c}}{2x^2}.$$

De ces deux équations il ſuffira de vérifier la prémiére; puiſque la ſeconde n' en eſt que la différentielle diviſée par dt; mais il ſe préſente dans cette opération une difficulté; car les termes étant diviſés les uns par x, les autres par x^2, on peut être en doute ſi en faiſant à part $= o$ les numérateurs de x & de x^2 toute la formule diſparoîtra, à cauſe que x eſt déja lui même $= o$. Pour lever cette difficulté, ſuppoſons que x, au lieu d'être tout-à-fait nul, ſoit ſeulement infiniment petit & $= \alpha$; & développons chaque fonction ${}''\phi\,(\alpha \pm t\sqrt{c})$, ${}''\psi\,(\alpha \pm t\sqrt{c})$ &c. ſuivant la formule connue $\phi\,(z + \alpha) = \phi z + \alpha\phi' z + \frac{\alpha^2\phi'' z}{2} + \frac{\alpha^3\phi''' z}{2 \cdot 3}$ + &c.; en effaçant ce qui ſe détruit, & en négligeant les termes qui ſe trouvent multipliés par des puiſſances de α, on aura l'équation

$$o = -\frac{{}''\phi\, t\sqrt{c} + {}''\phi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{\phi\, t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c}}{4}$$
$$- \frac{{}'''\psi\, t\sqrt{c} - {}'''\psi - t\sqrt{c}}{2\alpha^2} + \frac{{}'\psi\, t\sqrt{c} - {}'\psi - t\sqrt{c}}{4}$$

qui doit être vraie indépendanment de la quantité α; donc on aura

$${}''\phi\, t\sqrt{c} + {}''\phi - t\sqrt{c} + {}'''\psi\, t\sqrt{c} - {}'''\psi - t\sqrt{c} = o,$$
$$\phi\, t\sqrt{c} + \phi - t\sqrt{c} + {}'\psi\, t\sqrt{c} - {}'\psi - t\sqrt{c} = o$$

équations auſquelles on ſatisfera en poſant ${}''\phi - t\sqrt{c} = - {}''\phi\, t\sqrt{c}$, & ${}'''\psi - t\sqrt{c} = {}'''\psi\, t\sqrt{c}$, ou bien en différentiant ${}''\psi - t\sqrt{c} = - {}''\psi\, t\sqrt{c}$. Or, t étant une variable qui peut croître à l' infini, en commençant du zero, $t\sqrt{c}$ pourra repréſenter une abſciſſe quelconque poſitive; donc la nature des fonctions ${}''\phi$ & ${}''\psi$ devra être telle, que faiſant les abſciſſes négatives, ces fonctions deviennent ſimplement néga-

négatives ſans changer de valeur. Il en ſera de même des fonctions φ & ψ, puiſque en différentiant deux fois les équations précédentes, elles deviennent $\varphi - t\sqrt{c} = -\varphi t\sqrt{c}$, & $\psi - t\sqrt{c} = -\psi t\sqrt{c}$; d'où l'on voit que les deux courbes *ANB*, *AQB* qui repréſentent ces fonctions, devront avoir de part & d'autre du point *A* des branches égales & diamétralement oppoſées, ainſi qu'on l'a trouvé dans *l'Art.* 22. Il n'en ſera pas tout-à-fait ainſi pour les courbes *anb* & *Aqb* qui contiennent les fonctions φ' & ${}'\psi$. Car l'on a pour ces fonctions $\varphi' - t\sqrt{c} = \varphi' t\sqrt{c}$, & ${}'\psi - \sqrt{c} = {}'\psi t\sqrt{c}$; ce qui montre que les ordonnées doivent être exactement les mêmes à des abſciſſes égales, poſitives & négatives; & que par conſéquent les branches autour de *A* ſeront ſemblablement ſituées ſur l'axe; ce qui s'accorde avec ce qui a été enſeigné dans *l'Art. cité.*

Examinons maintenant les valeurs des mêmes fonctions pour les abſciſſes qui ſurpaſſent l'axe donné a. Poſant $x = a$, & z & $u = 0$, on aura de nouveau deux équations, la prémiére ſera

$$0 = \frac{{}'\varphi(a + t\sqrt{c}) + {}'\varphi(a - t\sqrt{c})}{2a}$$
$$- \frac{{}''\varphi(a + t\sqrt{c}) + {}''\varphi(a - t\sqrt{c})}{2a^2}$$
$$+ \frac{{}''\psi(a + t\sqrt{c}) - {}''\psi(a - t\sqrt{c})}{2a\sqrt{c}}$$
$$- \frac{{}'''\psi(a + t\sqrt{c}) - {}'''\psi(a - t\sqrt{c})}{2a^2\sqrt{c}}$$

la ſeconde ne ſera que la différentielle de celle-ci, diviſée par dt, & par conſéquent nous pourrons nous diſpenſer d'y avoir égard. Or afin que les fonctions φ & ψ ne dépendent pas l'une de l'autre; on ſera ſéparément
$a\,{}'\varphi(a + t\sqrt{c}) - {}''\varphi(a + t\sqrt{c}) = -a\,{}'\varphi(a - t\sqrt{c})$
$+ {}''\varphi(a - t\sqrt{c})$ &
$a\,{}''\psi(a + t\sqrt{c}) - {}'''\psi(a + t\sqrt{c}) = a\,{}''\psi(a - t\sqrt{c})$
$- {}'''\psi(a - t\sqrt{c})$.

Dif-

Différentions deux fois la prémière, & trois fois la seconde, on aura en changeant les signes

$$\varphi(a+t\sqrt{c}) - a\varphi'(a+t\sqrt{c}) = -\varphi(a-t\sqrt{c}) + a\varphi'(a-t\sqrt{c}) \quad \& $$

$$\psi(a+t\sqrt{c}) - a\psi'(a+t\sqrt{c}) = -\psi(a-t\sqrt{c}) + a\psi'(a-t\sqrt{c}),$$

équations qui sont tout-à-fait semblables entr'elles.

Je multiplie par $e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt$, & j'intégre; j'ai

$$-a\varphi(a+t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} = -a\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}} - 2\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt,$$

où l'on voit que la valeur de l'intégrale du dernier terme doit $= 0$, lorsque $t = 0$, puisque dans ce cas les deux autres termes se détruisent d'eux mêmes. On aura donc

$$\varphi(a+t\sqrt{c}) = \varphi(a-t\sqrt{c}) + \frac{2e^{\frac{t\sqrt{c}}{a}}}{a}\int\varphi(a-t\sqrt{c})\,e^{-\frac{t\sqrt{c}}{a}}\sqrt{c}\,dt.$$

Or si l'on fait $t\sqrt{c} = y$, & que l'intégration soit supposée commencer du point, où $y = 0$, on aura

$$\varphi(a+y) = \varphi(a-y) + \frac{2e^{\frac{y}{a}}}{a}\int\varphi(a-y)\,e^{-\frac{y}{a}}\,dy.$$

Ce qui nous fait connoître la manière, dont les valeurs de la fonction φ qui sont de part & d'autre à distances égales de l'extrémité B de l'axe doivent être liées entr'elles. Or il est aisé de voir en relisant les *Art.* 20. & 22. que $\varphi(a-y)$ dénote ici la même chose que Z' & $\varphi(a+z)$ la même chose que $-(Z)$, donc l'équation précédente donne le même rapport entre Z' & (Z) qu'on a trouvé dans le dernier des *Art. cités*; & par conséquent aussi la même continuation de la courbe ANB au delà de B. Il est vrai que l'équation entre (Z) & Z' donnée dans l'endroit mentionné n'étoit d'abord censée appartenir qu'à la seule portion

tion

tion de l'axe comprise depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse $2a$; & que pour toutes les autres abscisses plus grandes à l'infini, on a donné une manière générale de continuer la courbe au moien des branches déja connues; mais il ne faudra que considérer toutes les branches de continuation au delà de B, pour s'appercevoir qu'elles auront constamment avec celles qui sont en deçà de B, le même rapport que la quantité $-(Z)$ a avec la quantité Z'.

Ce qu'on vient de démontré sur la fonction φ doit se dire de même de l'autre fonction ψ, qui appartient à la courbe AQB, & il ne sera pas difficile de l'appliquer aussi aux autres fonctions φ' & ψ' pour les courbes aqb, ANB, & de faire voir le parfait accord qu'il y a entre les résultats de ces procédés, & ceux qu'on à trouvé plus haut par une voie différente.

Cette matière auroit peut être besoin d'être traitée, avec un plus long détail, que nous ne l'avons fait ici; mais ceux, qui auront bien saisi l'esprit de nos méthodes, n'auront pas de peine à suppléer d'eux mêmes à ce, qui peut manquer pour l'entière exactitude des démonstrations, sans qu'il soit nécessaire de nous étendre davantage la-dessus.

24. Il est à remarquer, au reste, que l'on abregeroit beaucoup la solution précédente, si par le moïen de quelque substitution convenable on parvenoit à ramener tout d'un coup l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2d.\frac{z}{x}}{dx}\right)$ à la forme $\frac{d^2 z'}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z'}{dx^2}$.

Or, pour cela, il n'y auroit qu'à supposer $z = \frac{\int z' x\, dx}{x^2}$, ce qui donne en différentiant, $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\int\left(\frac{d^2 z'}{dt^2}\right) x\, dx}{x^2}$, $\frac{d.\frac{z}{x}}{dx} = \frac{z'}{x^2}$

$-\frac{3\int z' x dx}{x^4}$, $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{(\frac{dz'}{dx})}{x} - \frac{3z'}{x^2} + \frac{6\int z' x dx}{x^4}$, & substituant $\frac{\int(\frac{d^2 z'}{dt^2}) x dx}{x^2} = c\,[\frac{(\frac{dz'}{dx})}{x} - \frac{z'}{x^2}]$; multipliant par x^2, & différentiant de nouveau $(\frac{d^2 z'}{dt^2})\, x\, dx = c\,(\frac{d^2 z'}{dx^2})$ $x\,dx$, ou bien $(\frac{d^2 z'}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2 z'}{dx^2})$. Equation réduite au cas du *Prob.* 1. Or puisque la valeur de z' est ici $= \frac{d.zx^2}{x\,dx}$ $= 2z + \frac{x\,dz}{dx}$, telle qu'on l'a supposé dans l'Analise du *Prob. préc.* il est facile de voir que la solution, qu'on aura de façon, reviendra entiérement à celle qu'on a déja trouvé. Il est vrai qu'il faudra pour cela, que la quantité k ait aussi les mêmes valeurs; &, c'est ce qu'il sera aisé de prouver; car on sait, que la détermination de k dépend de la condition que les termes algébriques $\frac{M dz'}{dx} - \frac{z' dM}{dx}$ disparoissent, lorsque $x = a$ (*Voïés Prob.* 1.). Or z' étant ici $= 2z + \frac{x\,dz}{dx}$, dz' sera $= 3\,dz + \frac{x\,d^2 z}{dx}$; d'où l'on aura, en posant $x = a$, & $z = 0$, l'équation

$$\frac{3\,Mdz}{dx} + \frac{a\,Md^2 z}{dx} - \frac{a\,dMdz}{dx^2} = 0.$$

Maintenant, puisque z doit toujours disparoître, lorsque $x = a$ quel que soit le tems t, on aura aussi $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$, & par conséquent, par l'équation fondamentale, $0 = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2dz}{adx} - \frac{2z}{a^2}$, d'où l'on tire $\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{2dz}{adx}$, laquelle valeur substituée, on

aura

aura $(M - \frac{a\,dM}{dx}) \frac{dz}{dx} = 0$, ou bien $M - \frac{a\,dM}{dx} = 0$. Or, M étant $=$ fin. $x\sqrt{-k}$ (*Art.* 6.), on aura en fubftituant, & pofant enfuite $x = a$, fin. $a\sqrt{-k} - a\sqrt{-k}$ cof. $a\sqrt{-k} = 0$, d'où l'on tire, comme dans *l'Art.* 18. $a\sqrt{-k} = \frac{\text{fin. } a\sqrt{-k}}{\text{cof. } a\sqrt{-k}} = \text{tang. } a\sqrt{-k}$.

Il y a encore un autre fubftitution qu'on pourroit emploier au lieu de la précédente. Cette fubftitution confifte à faire $z = y - \frac{x\,dy}{dx}$; ce qui réduira l'équation en z à une équation en y de la forme de $(\frac{d^2 z}{dt^2}) = c\,(\frac{d^2 z}{dx^2})$, & cette équation étant conftruite par la méthode du *Prob.* 1. on aura pour la valeur de z des formules analogues à celles qu'on a trouvé à la fin de *l'Art.* 20. ci-deffus.

Application de la folution précédente à la recherche des loix de la propagation du Son.

25. L'Application du Problême précédent à la théorie de la propagation du Son, fe préfente d'elle même. Imaginons un corps fonore quelconque mis en vibration au milieu d'un air tranquille, homogène, & libre de tous cotés; il eft vifible que ce corps peut être regardé comme placé fenfiblement au centre d'une fphère aérienne d'une étendue indéfinie; donc on ne s'écartera, que très-peu, de la vérité, en calculant les mouvemens communiqués à toute la maffe de l'air, dans l'hipothéfe des ondulations fphériques, de *l'Art.* 18., & d'après la conftruction donnée dans *l'Art.* 20. & *fuiv.*

Pour cela, aiant mené la ligne indéfinie PR, qui repréfente le rayon de la fphère totale d'air qui environne le corps fonore, foit pris BQ pour le rayon de la petite

fphère

fphère, dans laquelle font contenues les particules qui ont reçu leur mouvement primitif du corps fonore placé en P; & foient tracées fur la ligne PQ les courbes qui repréfentent les valeurs données de Z & V, & que nous avons appellées courbes *fondamentales*; il fuit de *l'Art.* 22., que chacune de ces deux courbes devra être continuée du coté oppofé Pq, avec une branche femblable, égale, & diamétralement oppofée à la prémière. Il eft vrai que cette propofition n'a été démontrée que pour les courbes qui repréfentent les variables Z' & V'; mais il eft facile de voir qu'elle a également lieu ici, où à caufe de $x = 0$ au point P, les valeurs de Z', & V' deviennent $2Z$, & $2V$. On prouvera de même que les autres branches de continuation qui fuivant la Théorie de *l'Art. cité*, devroient être ajoutées, du coté PR, difparoîtront entiérement à caufe du rayon a infini; de forte que les courbes *génératrices* feront toutes renfermées dans le feul efpace qQ. Or, cela pofé, qu'on demande pour un tems quelconque t les mouvemens des particules qui compofent la fibre rectiligne PR, mouvemens qui, felon l'hipothèfe, doivent être fenfiblement les mêmes pour toutes les autres fibres partant du cèntre P.

Soit pour faciliter cette recherche $t > \frac{PQ}{\sqrt{c}}$; il eft évident qu'il faudra rejetter dans la conftruction de *l'Art.* 20. les termes qui répondent aux abfciffes $x + t\sqrt{c}$, ces termes ne pouvant ici produire aucune valeur réelle; il n'y aura donc que les termes rélatifs aux abfciffes $x - t\sqrt{c}$, qui entrent dans la détermination des quantités z & u, d'où dépend la connoiffance des mouvemens en queftion. Aiant pris (*fig.* 11.) fur la ligne PR le point P' tel que $PP' = t\sqrt{c}$, & coupé de part & d'autre les parties $P'Q'$, $P'q'$ égales à PQ, & Pq; je tranfporte en $q'P'Q'$ les deux courbes qui renferment les valeurs des Z & V, telles qu'elles ont été décrites fur le diamêtre qPQ; & prenant le point P' pour l'ori-

l'origine des abſciſſes x, je trouve pour une particule quelconque M;

$$z' = \frac{Z + \frac{d \cdot Zx}{dx} - \frac{1}{\sqrt{c}} \int (V + \frac{d \cdot Vx}{dx}) dx}{2}$$

$$u' = \frac{V + \frac{d \cdot Vx}{dx} - d \cdot (Z + \frac{d \cdot Zx}{dx}) \frac{\sqrt{c}}{dx};}{2}$$

Or par les ſuppoſitions faites à la fin de l'*Art.* 19., on a généralement $z' = z + \frac{d \cdot zx}{dx}$, & $u' = u + \frac{d \cdot ux}{dx}$; l'origine des x étant au point P. Mettant donc ici pour tranſporter cette origine en P', $x + t\sqrt{c}$ au lieu de x, & intégrant après avoir multiplié par $(x + t\sqrt{c})\, dx$, il viendra les deux équations ſuivantes

$$z\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\, Zx^2 + \frac{1}{2} t\sqrt{c}\,(\int Z dx + Zx)$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (x + t\sqrt{c})\, dx \int (V + \frac{d \cdot Vx}{dx})\, dx$$

$$u\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\, Vx^2 + \frac{1}{2}\, t\sqrt{c}\,(\int V dx + Vx)$$
$$- \frac{\sqrt{c}}{2} \int (x + t\sqrt{c}) \times d \cdot (Z + \frac{d \cdot Zx}{dx}).$$

Si on ſimplifie les expreſſions intégrales par la méthode des intégrations par parties; & qu'on ajoute les conſtantes néceſſaires, on aura

$$z\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\,(x^2 + xt\sqrt{c})\, Z + \frac{1}{2}\, t\sqrt{c} \int Z dx$$
$$- \frac{1}{2}\, t\sqrt{c}\, A - \frac{1}{2\sqrt{c}}\,(\frac{x^2}{2} + xt\sqrt{c}) \int V dx - \frac{1}{4\sqrt{c}}$$
$$\int V x^2 dx + \frac{D}{4\sqrt{c}}$$

$$u\,(x + t\sqrt{c})^2 = \frac{1}{2}\,(x^2 + xt\sqrt{c})\, V + \frac{1}{2}\, t\sqrt{c} \int V dx$$
$$- \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}tVcB-\frac{\sqrt{c}}{2}(x^2+xt\sqrt{c})\frac{dZ}{dx}-\frac{\sqrt{c}}{2}(x+2t\sqrt{c})$$
$$Z+\frac{\sqrt{c}}{2}\int Z\,dx-\frac{\sqrt{c}}{2}A.$$

L'addition des conſtantes ſert à rendre égal à zero le dernier membre de chacune des équations précédentes, lorſque $x+t\sqrt{c}=0$, ou $x=-t\sqrt{c}=-PP'$; ce qui eſt néceſſaire, puiſque, alors les prémiers membres diſparoiſſent d'eux mêmes; ainſi en ſuppoſant que les intégrations commencent toutes au point P' où $x=0$, les lettres A, B, D, repréſenteront les valeurs des intégrales $\int Z\,dx$, $\int V\,dx$, $\int V x^2\,dx$ priſes depuis P' juſqu'à q', lequelles ſont les mêmes que ſi on les prenoit de l'autre coté depuis P' juſqu'à Q'. Il faut néanſmoins remarquer que dans la prémière équation l'on ne trouve point de conſtante qui faſſe évanoüir le terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\int V\,dx$, dans le cas de $x=-t\sqrt{c}$; c'eſt une omiſſion que j'ai fait exprès à cauſe d'un nouveau terme qu'il faut encore ajouter à la même équation. Pour voir la raiſon de ceci on n'a qu'à ſe ſouvenir de ce, que dans l'expreſſion des valeurs de z' & de u', nous avons regardé, comme généralement nuls, tous les termes qui répondoient aux abſciſſes exprimées par $x+t\sqrt{c}$; il en eſt cependant un qu'on ne peut pas négliger; c'eſt celui qui eſt exprimé par la formule intégrale $\int(V+\frac{d\cdot Vx}{dx})\,dx=\int V\,dx+Vx$; car il eſt évident que quoique les valeurs de V diſparoiſſent ſur la ligne QR depuis le point Q, l'intégrale $\int V\,dx$ conſerve toujours la même valeur conſtante, qu'on a déſigné cideſſus par B; delà il eſt facile de conclure, qu'il faut ajouter à la valeur de z' le terme $\frac{B}{2\sqrt{c}}$, & par conſéquent à

la

la valeur de $z(x+t\sqrt{c})^2$ le terme $(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\frac{B}{2\sqrt{c}}$, lequel fera justement disparoître l'autre terme $-\frac{1}{2\sqrt{c}}(\frac{x^2}{2}+xt\sqrt{c})\int V dx$, lorsque $x=-t\sqrt{c}$, $\int V dx$ devenant alors $=B$.

Si l'on examine maintenant la forme des deux équations précédentes, on verra aisément que l'on peut se passer de l'addition des constantes, en donnant un autre origine aux intégrales $\int Z dx$, $\int V dx$, $\int V x^2 dx$, & les faisant commencer du point q' en allant vers R, ainsi l'on aura plus simplement

$$z=\frac{(x^2+xt\sqrt{c})Z+t\sqrt{c}\int Z dx}{2(x+t\sqrt{c})^2}-\frac{(x^2+2xt\sqrt{c})\int V dx+\int V x^2 dx}{4\sqrt{c}(x+t\sqrt{c})^2}$$

$$u=\frac{(x^2+xt\sqrt{c})V+t\sqrt{c}\int V dx}{2(x+t\sqrt{c})^2}-\sqrt{c}\,\frac{(x^2+xt\sqrt{c})\frac{dZ}{dx}+(x+2t\sqrt{c})Z-\int Z dx}{2(x+t\sqrt{c})^2}$$

26. Il est visible par ces formules que z & u sont toujours $=0$, lorsque la valeur de x tombe au delà des points q', & Q'; d'où il suit que pour le tems donné t, il n'y a que la seule partie $q'Q'$ de la fibre qui soit en mouvement; or comme le point du milieu P' a été pris tel que $PP'=t\sqrt{c}$; il est évident que l'onde aérienne $q'Q'$ avancera toujours avec une vitesse constante & $=\sqrt{c}$ qui est la même que nous avons trouvé plus haut dans la prémière hipothèse (*Art.* 12.). On pourroit ici développer les loix particulières que chaque particule d'air observera dans ses mouvemens, dépendamment des prémières impressions Z & V produites par le corps sonore; mais laissant ces

ces discussions peu importantes en elles mêmes nous nous, contenterons de faire observer en général la variation des quantités z & u, à mesure que le tems t augmente.

Pour cela, comme l'espace PQ est toujours très-petit (*Art.* 14.), on peut, sans erreur sensible, lorsque le tems t a déja une valeur considérable, négliger x par rapport à $t\sqrt{c}$; ainsi il viendra

$$z = \frac{xZ + \int Z\,dx - \frac{1}{\sqrt{c}}\int V\,dx}{2t\sqrt{c}}$$

$$u = \frac{xV + \int V\,dx - \left(\frac{x\,dZ}{dx} + 2Z\right)\sqrt{c}}{2t\sqrt{c}}$$

d'où l'on voit qu'en général les valeurs de z & de u diminuent dans la raison inverse de $t\sqrt{c}$; ou de PP'; ce qui montre que la force ou l'intensité du Son, doit décroître à très-peu près dans la raison inverse des distances simples, du centre de propagation.

Je ne pousserai pas plus loin l'examen de ces formules, & je ne chercherai pas, non plus à déduire de la théorie exposée dans *l'Art.* 22. les lois de la reflexion qui auroit lieu dans l'hipothèse présente si la masse de l'air étoit renfermée dans un vase sphérique de grandeur finie. Ces recherches étant de peu d'utilité je me contenterai d'en avoir posés tous les principes dans la solution générale du Problême précédent.

CHAPI-

CHAPITRE IV.

Application de nôtre méthode du Chapître II. à différentes hipothéses.

27. LEs Problêmes, dont nous allons maintenant nous occuper, quoique peu néceſſaires pour la matière que nous traitons, ſerviront néanmoins à faire voir l' utilité, & l' extenſion de notre méthode du Chapit. II.; ils pourront auſſi être d' uſage dans pluſieurs autres points de la Théorie du Son.

PROBLEME III.

Conſtruire l' équation

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + mc\left(\frac{d.\frac{z}{x}}{dx}\right).$$

Multipliant par Mdx, & pratiquant les mêmes réductions que dans le Prob. II. on aura l'équation en M, $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{mdM}{xdx} = kM$; qu'il faudra intégrer. Or il eſt facile de s'aſſurer, au moïen de quelques transformations convenables, que cette équation tombe dans le cas général de Ricati, & que par conſéquent ſon intégrabilité dépend de certaines conditions, qui ſe réduiſent ici à ce, que m ſoit un nombre pair poſitif ou négatif; mais la méthode ordinaire d'intégration pour ces mêmes cas eſt ſi laborieuſe, que je ne ſaurois me réſoudre à la pratiquer; d' ailleurs il ne ſuffit pas de trouver une expreſſion algébrique de M; il faut de plus, qu'elle ſoit telle, qu'on puiſſe dans la ſuite du calcul chaſſer aiſément la quantité k à l' aide de quelques réductions; comme on a fait dans les Problêmes précédens. Il m' a donc fallu imaginer une autre méthode, & voici comment je m'y ſuis pris.

Puisque l'on a trouvé pour le cas de $m = 0$, qui est celui du Prob. I., $M = A \text{ fin. } x\sqrt{-k}$; & pour le cas de $m = 2$ dans le Prob. II., $M = A\,(\text{fin. } x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}\ \text{cof. } x\sqrt{-k})$; ce qui s'exprime plus simplement par $M = A \text{ fin. } x\sqrt{-k} - A x \frac{d \cdot \text{fin. } x\sqrt{-k}}{dx}$, on est assés fondé à croire que, lorsque m aura une valeur quelconque 4, 6 &c. l'expression de M sera de la forme suivante

$$M = A \text{ fin. } x\sqrt{-k} + B x \frac{d \cdot \text{fin. } x\sqrt{-k}}{dx} + C x^2 \frac{d^2 \cdot \text{fin. } x\sqrt{-k}}{dx^2} + \text{\&c.}$$

A, B, C &c. étant des coéficiens à déterminer par la substitution, & la comparaison des termes.

Mais pour embrasser une plus grande généralité, je suppose fin. $x\sqrt{-k} = u$; &

$$M = Au + B\frac{du}{dx} + C\frac{d^2u}{dx^2} + D\frac{d^3u}{dx^3} + \text{\&c.}$$

& je regarde les quantités A, B, C &c. comme des fonctions variables de x; dont il faut chercher la valeur convenable à l'équation donnée.

Je commence par prendre la différentielle de M, que je mets sous la forme suivante

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dA}{dx}\cdot u + \frac{dB}{dx}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dC}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dD}{dx}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + \text{\&c.}$$
$$+ A \qquad + B \qquad + C \qquad + \text{\&c.}$$

Je trouve de même

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2A}{dx^2}\cdot u + \frac{d^2B}{dx^2}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{d^2C}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2D}{dx^2}\cdot\frac{d^3u}{dx^3} + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{2dA}{dx} \qquad + \frac{2dB}{dx} \qquad + \frac{2dC}{dx} \qquad + \text{\&c.}$$
$$+ A \qquad + B \qquad + \text{\&c.}$$

On

On trouvera de plus par la nature de la fonction u

$$kM = A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{d^3u}{dx^3} + C\frac{d^4u}{dx^4} + D\frac{d^5u}{dx^5} + \&c.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m\,dM}{x\,dx} - kM = 0$, & ordonnant les termes par rapport à la variable u on aura

$$u\left(\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{m\,dA}{x\,dx}\right)$$
$$+ \frac{du}{dx}\left(\frac{d^2B}{dx^2} - \frac{m\,dB}{x\,dx} + \frac{2\,dA}{dx} - \frac{mA}{x}\right)$$
$$+ \frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{d^2C}{dx^2} - \frac{m\,dC}{x\,dx} + \frac{2\,dB}{dx} - \frac{mB}{x}\right)$$
$$+ \frac{d^3u}{dx^3}\left(\frac{d^2D}{dx^2} - \frac{m\,dD}{x\,dx} + \frac{2\,dC}{dx} - \frac{mC}{x}\right)$$
$$+ \&c. \quad \&c. \quad \&c. \quad = 0;$$

d'où l'on tirera les équations particulières

$$\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{m\,dA}{x\,dx} = 0$$
$$\frac{d^2B}{dx^2} - \frac{m\,dB}{x\,dx} + \frac{2\,dA}{dx} - \frac{mA}{x} = 0$$
$$\frac{d^2C}{dx^2} - \frac{m\,dC}{x\,dx} + \frac{2\,dB}{dx} - \frac{mB}{x} = 0$$
$$\&c. \quad \&c. \quad \&c.$$

qui sont très-aisées à résoudre; dans l'intégration de toutes ces équations, à l'exception de la prémière, on peut négliger les constantes, qui ne serviroient qu'à rendre les valeurs des quantités B, C, D &c. plus compliquées sans les rendre plus générales. Ainsi f & h étant les deux constantes de la prémière quantité A on aura

$$A = f + hx^{m+1}$$
$$B = -fx - hx^{m+2}$$
$$C = f\frac{(m-2)}{2\cdot(m-1)}x^2 + h\frac{(m+4)}{2(m+3)}x^{m+3}$$

$$D = -f\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3\cdot(m-1)(m-2)}\,x^{1} - h\,\frac{(m+4)(m+6)}{2\cdot 3\,(m+3)(m+4)}\,x^{m+4}$$

$E =$ &c.

où la loi de ſa progreſſion eſt aſſés manifeſte.

28. Dans ces formules on voit clairement que ſi m eſt un nombre pair poſitif à commencer par 2, la ſerie des termes multipliés par f devient exacte & finie, tandis que l'autre ſerie qui eſt toute multipliée par h, va à l'infini; c'eſt tout le contraire, lorſque m eſt un nombre pair négatif à commencer de -4, car dans ce cas la ſeconde ſerie ſe termine après un nombre fini de termes, la prémière allant à l'infini; d'où il ſuit que, puiſque les quantités f & h ſont abſolument arbitraires, il n'y a qu'à faire $h = 0$ dans le prémier cas, & $f = 0$ dans le ſecond, & l'on aura algébriquement la valeur de M en x, en cherchant celle des coéficiens A, B, C &c. dont le nombre eſt alors limité.

On pourroit, au prémier aſpect, former des doutes ſur l'exactitude des formules précédentes, par la raiſon qu'elles ne paroiſſent pas ſatisfaire au cas de $m = 0$; & de $m = -2$, dans leſquels on ſait d'ailleurs que M a une valeur finie.

Pour lever cette difficulté, il ne faut que recournir à l'intégration immédiate des équations qui doivent donner les valeurs de A & de B, dans les deux cas propoſés; on trouvera pour le prémier, $A = f$, $B = 0$, $C = 0$ &c. & pour le ſecond $A = hx^{-1}$, $B = 0$, $C = 0$; c'eſt un inconvénient attaché à toutes ces ſortes de formules générales d'intégration, d'être en défaut dans certains cas, qui demandent un exament à part.

On pourroit encore être embaraſſé dans l'uſage des formules précédentes, lorſque $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5.$ &c. puiſque dans ces cas tous les termes de la ſerie f, ou h deviennent infinis, à l'exeption ſeulement de quelques uns

des

des prémiers. Mais il est aisé de se tirer de cet embarras, si on fait réflexion, que les constantes f & h étant absolument arbitraires, peuvent être supposées tout ce qu'on veut, ainsi il n'y a qu'à faire f ou $h = o$, ou $= o \times g$; car ce o détruisant celui du dénominateur, les termes qui étoient infinis, redeviendront finis, & se trouveront de nouveau multipliés par une constante arbitraire g; ceux au contraire qui étoient demeurés finis s'évanoüiront par cette supposition; d'où résulte la régle générale, savoir de ne conserver que les termes qui réçoivent une valeur infinie, en les dégageant cependant de l'infini qu'ils renferment.

Aïant ainsi trouvé la valeur de M il ne s'agit plus que de poursuivre le calcul de la même manière qu'on l'a fait dans le Prob. I.; on aura donc de nouveau les deux équations

$$\int z M dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int Z M dx + \frac{\text{sin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V M dx$$

$$\int u M dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int V M dx - \sqrt{-ck}\, \text{sin.}\, t\sqrt{-ck} \int Z M dx;$$

substituant la valeur de $M = A\, \text{sin.}\, x\sqrt{-k} + B \frac{d \cdot \text{sin.}\, x\sqrt{-k}}{dx}$ $+ C \frac{d^2 \cdot \text{sin.}\, x\sqrt{-k}}{dx^2} +$ &c., & faisant disparoître le différences de $\text{sin.}\, x\sqrt{-k}$ par la méthode des intégrations par parties on obtiendra

$$\int z' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int Z' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-ck}\, dx + \frac{\text{sin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx = \text{cos.}\, t\sqrt{-ck} \int V' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck}\, \text{sin.}\, t\sqrt{-ck} \int Z' \,\text{sin.}\, x\sqrt{-k}\, dx,$$

où

$$z' = Az - \frac{d \cdot Bz}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cz}{dx^2} - \text{\&c.}$$

$$Z' = AZ - \frac{d \cdot BZ}{dx} + \frac{d^2 \cdot CZ}{dx^2} - \text{\&c.}$$

$u' =$

$$u' = Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} - \&c.$$

$$V' = AV - \frac{d \cdot BV}{dx} + \frac{d^2 \cdot CV}{dx^2} - \&c.$$

Enfin l'on tirera les valeurs de z & de u par les mêmes procédés qu'on a ſuivi dans les Prob. I. & II.

Je ne m'arrêterai pas ici à examiner la nature des courbes *génératrices*, & la manière de les continuer, laquelle dépend de la valeur de M; il ſeroit cependant aiſé de le faire ſuivant les principes que nous avons établis; mais comme je ne donne ici cette ſolution générale, que comme une ſimple application de ma méthode, il vaut mieux de la ſimplier autant qu'il eſt poſſible, en y introduiſant les fonctions indéterminées φ & ψ comme on l'a pratiqué dans le Prob. II. On trouvera donc par ce moïen les deux équations ſuivantes

$$Az - \frac{d \cdot Bz}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cz}{dx^2} + \&c.$$
$$= \frac{\varphi(x + t\sqrt{c}) + \varphi(x - t\sqrt{c})}{2}$$
$$+ \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) - \psi(x - t\sqrt{c})}{2\sqrt{c}}$$

$$Au - \frac{d \cdot Bu}{dx} + \frac{d^2 \cdot Cu}{dx^2} + \&c.$$
$$= \frac{\psi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})}{2}$$
$$+ \sqrt{c}\,\frac{\varphi'(x + t\sqrt{c}) - \varphi'(x - t\sqrt{c})}{2}$$

qu'il faudra enſuite intégrer pour avoir les valeurs de z & de u; ces intégrations, quoique toujours poſſibles, ne laiſſeroient pas que d'être ſouvent fort embaraſſantes; c'eſt pourquoi je vais réſoudre le même Problême par une autre méthode moins directe à la vérité, & moins lumineuſe que la précédente, mais telle qu'elle donnera les valeurs de z & de u en termes finis.

Autre

Autre construction de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z}{dx^2} + mc\,\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}.$$

29. Au lieu de multiplier cette équation par $M dx$, en ſuppoſant M une fonction de x, & de l'intégrer enſuite, eu égard à la ſeule variabilité de x, je la multiplie au contraire par $M dt$, où M eſt ſuppoſée une fonction de t, & j'en prens la ſomme en conſidérant la ſeule t comme variable; je pourſuis le calcul de la même façon qu'auparavant en faiſant toujours varier t au lieu de x. Je trouve d'abord l'équation en M, $\frac{d^2 M}{dt^2} = kM$; d'où je tire $M = \text{ſin. } t\sqrt{-k}$; puis en ſuppoſant $\int z M dt = s$, il me vient l'équation fondamentale

$$ks = c\,\frac{d^2 s}{dx^2} + mc\,\frac{d\cdot\frac{s}{x}}{dx}.$$

Pour intégrer cette nouvelle équation, je fais $\frac{s}{x} = y$, ce qui la réduit par la ſubſtitution à $ky = c\,\frac{d^2 y}{dx^2} + (2 + m)\,c\,\frac{dy}{xdx}$; équation qui étant comparée à celle en M du Problême précedent donnera pour la valeur de y la ſuite

$$Au + B\,\frac{du}{dx} + C\,\frac{d^2 u}{dx^2} + D\,\frac{d^3 y}{dx^3} + \&c.$$

Les valeurs des A, B, C, étant les mêmes qu'auparavant, mais transformées par la ſubſtitution de $m + 2$ au lieu de $- m$. A l'égard de la valeur de u elle ſera ici $= \text{ſin. } x\sqrt{\frac{-k}{c}}$; il faut obſerver, qu'elle peut-être également $\text{coſ. } x\sqrt{-\frac{k}{c}}$; d'où il ſuit que prenant deux quantités P, Q conſtantes à l'égard de x, on aura généralement $u = P\ \text{ſin. } x\sqrt{}$

$x\sqrt{-\frac{k}{c}} + Q \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}}$, donc fi on fait

$$s = P\left(A \operatorname{fin.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} B \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{k}{c}\, C \operatorname{fin.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \&c.\right)$$
$$+ Q\left(A \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} - \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} B \operatorname{fin.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} + \frac{k}{c}\, C \operatorname{cof.} x\sqrt{-\frac{k}{c}} - \&c.\right)$$

on aura

$$A = fx + hx^{-m}$$
$$B = -fx^{2} - hx^{1-m}$$
$$C = f\frac{(m+4)}{2\cdot(m+3)}x^{3} + h\frac{m-2}{2(m-1)}x^{2-m}$$
$$D = -f\frac{(m+4)(m+6)}{2\cdot 3(m+)(m+4)}x^{4} - h\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}x^{3-m}$$
$$E = \&c.$$

où l'on voit que les coéficiens des termes de la férie f font les mêmes que ceux de la férie h dans les formules du Prob. préc., & réciproquement; donc il fuffira d'appliquer aux formules préfentes les mêmes remarques qu'on a déja fait fur les différents cas de m pofitif ou négatif.

Soit divifée toute l'équation par A, il eft évident que, puifque l'on ne doit prendre à la fois qne l'une des deux feries, felon que m eft pofitif ou négatif, les fractions $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ &c. feront toujours $= 0$, lorfque $x = 0$; foit de plus, lorfque $x = 0$, Z la valeur de $\frac{z}{A}$, & V la valeur de $\frac{d\cdot\frac{z}{A}}{dx}$, valeurs qui pourront très-bien être l'une & l'autre des fonctions de t; on aura, en faifant d'abord $x = 0$ dans l'équation ainfi préparée, $\int ZMdt = Q$; enfuite

ſuite différentiant la même équation, & y faiſant de nouveau $x = o$ il viendra $\int V M dt = P \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{c}} (1 + \mu)$; μ eſt une conſtante qui déſigne la valeur de $\frac{d \cdot \frac{B}{A}}{dx}$; poſant pour abréger V au lieu de $\frac{V}{1+\mu}$, on ſubſtituera $\int Z M dt$ au lieu de Q, & $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-k}} \int V M dt$ au lieu de P. Maintenant, pour chaſſer la lettre k de l'équation, on ſe ſervira de la méthode des intégrations par parties, qui a déja été tant de fois miſe en uſage; car, puiſque $M =$ ſin. $t\sqrt{-k}$, on peut au lieu de $\int Z M dt$ ſubſtituer indifféremment $\frac{1}{\sqrt{-k}} \int \frac{dZ}{dt}$ coſ. $t\sqrt{-k}\, dt$, ou $- \frac{1}{k} \int \frac{d^2 Z}{dt^2}$ ſin. $t\sqrt{-k}\, dt$; en négligeant les termes algébriques qui doivent être ſuppoſés d'eux mêmes $= o$; il en eſt de même de l'expreſſion $\int V M dt$. Ces opérations achevées, on mettra ſous les ſignes d'intégration les *ſinus* & *coſinus* de $x \sqrt{-\frac{k}{c}}$; & on développera à l'ordinaire les produits de ces *ſinus* & *coſinus* par les *ſinus* & *coſinus* correſpondens de $t\sqrt{-k}$, on obtiendra ainſi l'équation

$$\int z \text{ ſin. } t\sqrt{-k}\, dt$$
$$= \frac{1}{2} \int (AZ + \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2 Z}{dt^2} \text{ \&c.}) \text{ ſin. } (t - \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt$$
$$+ \frac{1}{2} \int (AZ - \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{dZ}{dt} + \frac{C}{c} \frac{d^2 Z}{dt^2} \text{ \&c.}) \text{ ſin. } (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A \int V dt + \frac{B}{\sqrt{c}} V + \frac{C}{c} \frac{dV}{dt} \text{ \&c.}) \text{ ſin. } (t - \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{c}} \int (A \int V dt - \frac{B}{\sqrt{c}} V + \frac{C}{c} \frac{dV}{dt} \text{ \&c.}) \text{ ſin. } (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) \sqrt{-k}\, dt.$$

Or ſuivant les principes de notre méthode, on égalera

le t du prémier membre aux quantités $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$, & $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ du second; d'où l'on aura $t + \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les termes multipliés par fin. $(t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ & $t - \frac{x}{\sqrt{c}}$ pour la valeur de t dans les autres termes qui se trouvent multipliés par fin. $(t + \frac{x}{\sqrt{c}})$; or Z & V étant des fonctions de t, on peut les exprimer généralement par Δt, & Γt; ou si pour abréger davantage, on pose $Z + \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Delta t$ & $Z - \frac{1}{\sqrt{c}} \int V dt = \Gamma t$, on tirera de l'équation précédente

$$z = A \frac{\Delta (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2}$$
$$+ \frac{B}{\sqrt{c}} \frac{\Delta' (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) - \Gamma' (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2}$$
$$+ \frac{C}{c} \frac{\Delta'' (t + \frac{x}{\sqrt{c}}) + \Gamma'' (t - \frac{x}{\sqrt{c}})}{2}$$
$$+ \&c.$$

Si l'on aimoit mieux que l'expression de Z fut composée de fonctions de $x + t\sqrt{c}$, & de $x - t\sqrt{c}$, il n'y auroit qu'à faire quelques légères transformations à l'équation finale qui donne immédiatement la valeur de z; mais sans avoir recours à cet expédient qui est sans doute le plus direct, il suffit de remarquer, que l'équation différentielle de z ne contenant que le dt^2, il faut que l'expression de z soit telle qu'elle demeure la même en changeant t en $-t$. Soit donc mis dans la formule précédente $-t$ au lieu de t; $\Delta (t + \frac{x}{\sqrt{c}})$, & $\Gamma (t - \frac{x}{\sqrt{c}})$ deviendront

$\Delta (-t$

$\Delta\,(-t+\frac{x}{\sqrt{c}}) = \Delta\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}(x-t\sqrt{c})$, & $\Gamma\,(-t-\frac{x}{\sqrt{c}}) = \Gamma\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}(x+t\sqrt{c})$. Changeant les valeurs des fonctions Δ & Γ on pourra mettre ſimplement $\Delta\,(x-t\sqrt{c})$ au lieu de $\Delta\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$, & $\Gamma\cdot(x+t\sqrt{c})$ au lieu de $\Gamma\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$; mais il faudra mettre puis $\sqrt{c}\,\Delta'(x-t\sqrt{c})$, $c\,\Delta''\,(x-t\sqrt{c})$ &c. au lieu de $\Delta'\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$, $\Delta''\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x-t\sqrt{c})$ &c, & $-\sqrt{c}\,\Gamma'(x+t\sqrt{c})$, $c\,\Gamma''(x+t\sqrt{c})$ &c. au lieu de $\Gamma'\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x+t\sqrt{c})$, $\Gamma''\cdot-\frac{1}{\sqrt{c}}\,(x+t\sqrt{c})$, &c. comme il eſt aiſé de s'en aſſurer avec un peu de réflexion; on aura de cette manière

$$z = A\,\frac{\Gamma\,(x+t\sqrt{c}) + \Delta\,(x-t\sqrt{c})}{2}$$
$$+ B\,\frac{\Gamma'\,(x+t\sqrt{c}) + \Delta'\,(x-t\sqrt{c})}{2}$$
$$+ C\,\frac{\Gamma''\,(x+t\sqrt{c}) + \Delta''\,(x-t\sqrt{c})}{2}$$
$$+ \text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

En rapprochant cette formule de celle qu'on a trouvé dans *l'Art. préc.* il ſera facile de déterminer le rapport des fonctions $\Gamma\,(x+t\sqrt{c})$, & $\Delta\,(x-t\sqrt{c})$ aux fonctions $\varphi\,(x+t\sqrt{c}) + \frac{1}{\sqrt{c}}\psi\,(x+t\sqrt{c})$, & $\varphi\,(x-t\sqrt{c}) - \frac{1}{\sqrt{c}}\psi\,(x-t\sqrt{c})$.

La méthode de cet Article conduit, comme on le voit, à des résultats beaucoup plus simples, que la prémière; mais elle est aussi moins générale, & ne peut, à la rigueur être emploïée que dans l' hipothèse, que toutes les valeurs de z qui répondent à différentes abscisses x dans un même instant soient liées entr' elles par la loi de continuité. Ce n' est que d'après la prémière solution qu'il sera permis de prendre pour Γ & Δ des fonctions quelconques, soit régulières ou non.

Des oscillations d' un fluide élastique renfermé dans un tuïau de figure conoidale quelconque.

30. Soit imaginé tout le fluide partagé en une infinité de tranches perpendiculaires à l'axe, dont la largeur variable soit exprimée par X, qui désigne une fonction de la partie correspondante x de l'axe; il est clair que, si on suppose, que les tranches conservent toujours leur parallélisme, & que z soit l' espace infiniment petit parcouru par une tranche quelconque Xdx dans le tems t, cette quantité Xdx deviendra $(X + \frac{dX}{dx} z)(dx + dz)$ $= Xdx + \frac{dX}{dx} z\, dx + X\, dz$, en supprimant les infinimens petits du second ordre; donc, si c désigne l'élasticité du fluide dans son état naturel; l'élasticité du fluide contenu dans la tranche Xdx sera après le tems t

$$c \cdot \frac{Xdx}{Xdx + \frac{dX}{dx} z dx + X dz} = c\left(1 - \frac{dz}{dx} - \frac{dX}{Xdx} z\right)$$

en négligeant ce qui se doit négliger. La différence de cette expression prise négativement donne l'excès de l'élasticité d'une tranche quelconque sur celle qui la suit immédiatement, donc si on

on multiplie cet excès par la largeur $X + \frac{dX}{dx} z$ de la trance, & qu'on divise ensuite par la masse $X dx$, on aura la force accélératrice qui tend à faire parcourir l'espace z; donc l'équation du mouvement du fluide sera $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 z}{d} \right.$ $\left. + d \cdot \frac{dX}{X dx} z \right) \left(\frac{X + \frac{dX}{dx} z}{X dx} \right)$ qui se réduit par la supposition de z infiniment petit à

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d \cdot \frac{dX}{X dx} z}{dx} \right).$$

Telle est l'équation générale; mais jusqu'a présent je ne connois encore que quelques cas où elle soit constructible; ce sont ceux qui peuvent être compris dans la solution du Prob. III.; c'est-à-dire où l'on a $\frac{dX}{X dx} = \frac{m}{x}$; ou bien $X = h x^m$; ce qui donne une conoide formé par la révolution d'une parabole, ou d'une hiperbole quelconque. On aura donc dans cette hipothèse $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + m \frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx} \right)$, équation intégrable exactement toutes les fois que m sera un nombre pair positif, ou négatif (*Art.* 28.); dans tous les autres cas la valeur de z sera exprimée par une suite infinie.

Soit $m = 2$, on aura le cas du Prob. II., & la formule de l'*Art.* 28. donnera

$$z + \frac{d \cdot x z}{dx} = \frac{\varphi (x + t \sqrt{c}) + \varphi (x - t \sqrt{c})}{2}$$
$$+ \frac{\psi (x + t \sqrt{c}) - \psi (x - t \sqrt{c})}{2 \sqrt{c}},$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'*Art.* 20.; de plus la formule de l'*Art.* 29. donne

$$z = \frac{\Gamma (x + t \sqrt{c}) + \Delta (x - t \sqrt{c})}{x^2}$$

—

$$-\frac{\Gamma'(x+t\sqrt{c})+\Delta'(x-t\sqrt{c})}{x}$$

ce qui s'accorde encore avec *l'Art.* 21.

Si on fait $m = 1$ le conoide sera formé par la révolution d'une parabole Apollonienne autour de son axe, & la valeur de z ne pourra être donnée que par des series.

S C O L I E.

31. Si le tuïau avoit une figure plane, l'équation précédente auroit encore lieu; & le cas de $m = 1$, appartiendroit à un tuïau triangulaire; ainsi l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx})$ pourroit servir à trouver les loix de la propagation du Son dans un plan; & c'est dans cette vue que M. Euler me fit l'honneur de me la proposer dans la même lettre, dont j'ai fait mention (*Art.* 16.). En faisant usage de ma nouvelle méthode, je reconnus bientôt que cette équation n'étoit pas intégrable exactement, mais qu'on pouvoit la rendre telle en donnant au terme $\frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}$ le coéficient 2. Voila ce qui m'a conduit à l'hipothèse des ondulations sphériques que nous avons examiné au long dans le *Chap. précéd.*; hipothèse qui est d'allieurs beaucoup plus conforme à la nature, que celle des ondulations simplement circulaires. Je fis part à M. Euler des changemens que j'avois fait à son hipothèse, & des résultats qui m'en étoient venus, dans une lettre de la fin de Décembre 1759.; mais j'ai vu depuis avec beaucoup de plaisir que ce savant Auteur en avoit déja fait de méme, & étoit parvenu aux mêmes conclusions, que moi, sur les loix de la propagation des ébranlemens de l'air dans une sphère. (*Voiés son Mémoire imprimé à la tête de ces Recherches*).

32. Suppo-

32. Supposons maintenant le tuïau d'une longeur donnée a, & bouché à ses deux extrémités; il faudra que la nature des fonctions Γ & Δ (*Art.* 29.) soit telle que z s'évanoüisse aux points, où $x = 0$, & $x = a$ quel que soit d'ailleurs le tems t. Par un raisonnement semblable à celui de *l'Art.* 23., on trouvera pour la prémière de ces conditions $\Gamma\, t\sqrt{c} + \Delta - t\sqrt{c} = 0$; ce qui apprend comment la fonction Δ doit être continuée du coté des abscisses négatives; pour satisfaire ensuite à l'autre condition, faisons $\Gamma\,(a + t\sqrt{c}) = T$, $\Delta\,(a - t\sqrt{c}) = \theta$; & soient α, β, γ &c. les valeurs des quantités $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$, lorsque $x = a$; on aura $0 = \alpha\,(T + \theta) + \beta\,(\frac{dT - d\theta}{dt\sqrt{c}}) + \gamma\,(\frac{d^2T + d^2\theta}{dt^2c}) +$ &c. $= 0$; soit maintenant $T = -\theta + y$, on aura $\alpha y + \beta\,\frac{dy}{dt\sqrt{c}} + \gamma\,\frac{d^2y}{dt^2c} +$ &c. $= 2\,\beta\,\frac{d\theta}{dt\sqrt{c}} +$ &c. L'intégration de cette équation sera toujours possible. Soient a', a'', a''' &c. les racines de l'équation

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{\&c.} = 0$$

la valeur de y sera de la forme suivante

$$\begin{aligned} y = {} & Fe^{a't\sqrt{c}} \int -a'\beta e^{-a't\sqrt{c}}\, d\theta - \text{\&c.} \\ & + Ge^{a''t\sqrt{c}} \int -a''\beta e^{-a''t\sqrt{c}}\, d\theta - \text{\&c.} \\ & + He^{a'''t\sqrt{c}} \int -a'''\beta e^{-a'''t\sqrt{c}}\, d\theta - \text{\&c.} \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

F, G, H désignant des constantes à déterminer par la substitution, & la comparaison des termes.

Si la quantité y étoit $= 0$, il est évident que les courbes géuératrices, qui représentent les fonctions Γ & Δ ne seroient qu'un assemblage de branches toutes égales, & semblables à celles qui répondent à la portion

a de

a de l'axe; ainſi il ne feroit pas difficile de comprendre que le ſiſtème des particules reprendroit toujours ſa prémière poſition après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{\sqrt{c}}$; or, pour que ce cas puiſſe avoir lieu, il ſuffira que le coéficient β, & tous ceux qui multiplient les différences impaires de y ſoient nuls; c'eſt-à-dire que la valeur de z ſoient telle, qu'elle ne renferme que des différences paires des fonctions Γ & Δ, ou au moins que leurs coéficiens s'évanoüiſſent en poſant $x = a$. Ces conditions ne pouvant avoir lieu dans notre cas, on en doit conclure que les oſcillations des particules de l'air contenu dans les tuïaux donnés changeront continuellement, & ne reviendront jamais les mêmes, ſi ce n'eſt par une eſpèce de hazard dépendant de la nature des prémiers ébranlemens. Je dis par une eſpèce de hazard, puiſque je ſuppoſe que ces ébranlemens ſoient quelconques; car, on pourroit d'ailleurs les ſuppoſer tels que le ſiſtème fût toujours ſoumis aux lois de l'iſochroniſme; c'eſt ce qui eſt connu de tous les Géomètres; mais nous aurons dans la ſuite occaſion d'examiner cette matière plus à fond qu'on ne l'a encor fait.

Des vibrations des cordes inégalement épaiſſes.

33. IL eſt facile de voir que l'équation pour le mouvement des cordes tendues, qui ſont d'une épaiſſeur variable ſera de la même forme que celle, qu'on a donné (*Art. XII. Rech. préc.*), avec cette ſeule différence que la quantité c devra être regardé non plus comme conſtante, mais comme une variable exprimée par quelque fonction de x. Conſervant donc les mêmes noms, & ſuppoſant X une fonction donné de x, on aura $(\frac{d^2y}{dt^2}) = X\,(\frac{d^2y}{dx^2})$ Soit dans un cas particulier, $X = hx^m$, je fais $x = s$

$= s^{\frac{2}{2-n}}$, & $y = \frac{z}{s}$; & prenant ds pour conſtante je trouve après les ſubſtitutions, & les réductions convenables $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \frac{(2-n)^2 h}{4} \left[\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right) - \frac{n-4}{n-2} \left(\frac{d \cdot \frac{z}{s}}{ds}\right) \right]$, équation qui eſt dans le cas du Prob. III. Donc ſi on ſuppoſe $m = -\frac{n-4}{n-2}$, $c = \frac{(2-n)^2 h}{4}$, & qu'on ſubſtitue s au lieu de x dans les formules de *l'Art.* 28. ou 29., on aura la valeur de z, laquelle étant enſuite multipliée par s donnera celle de y en s & en t ; où il n'y aura plus qu'à remettre, au lieu de s, ſa valeur en x tirée de l'équation de ſuppoſition $x = s^{\frac{2}{2-n}}$.

Delà il eſt évident que y aura une valeur finie & exacte toutes les fois que $\frac{n-4}{n-2}$ ſera un nombre pair poſitif, ou négatif ; c'eſt ce qui arrivera lorſque $n = \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$, μ étant pris pour exprimer un nombre quelconque entier ; dans tous les autres cas la ſerie ira à l'infini. Au reſte ſoit qu'on trouve pour y une valeur exacte, ou non, les vibrations de la corde ne feront jamais iſochrones, excepté dans le ſeul cas de $n = 0$, qui eſt celui d'une épaiſſeur uniforme ; car il eſt viſible, que la corde étant ſuppoſée fixe à ſes deux bouts, on aura les mêmes conditions à remplir que dans *l'Art.* 32. ci-deſſus ; donc les conſéquences en feront auſſi les mêmes.

Le défaut d'iſochroniſme dans les cordes inégalement épaiſſes les rend incapables de produire un ſon fixe, & appréciable à l'oreille ; auſſi les Artiſtes les rejettent-ils toujours, & les nomment comunement cordes *fauſſes*, par la raiſon qu'elles ne peuvent jamais s'accorder parfaitement avec les autres. Cette obſervation peut ſervir, ce me ſem-

 ble,

ble, à démontrer l'insuffisance de la Théorie de M. Tailor sur les vibrations des cordes; car il est visible, que quelque inégale, que puisse être une corde sonore, elle devroit cependant faire toujours des vibrations de même durée, si la figure qu'elle prend d'elle même ne pouvoit être autre que celle qui convient à l'isochronisme, tel que cet Auteur le suppose.

Au reste on pourra toujours résoudre l'équation générale $(\frac{d^2y}{dt^2}) = X(\frac{d^2y}{dx^2})$ directement par ma méthode; toute la difficulté se réduisant à l'intégration de l'équation en M, $kM = X\frac{d^2M}{dx^2}$. Les cas les plus connus, de l'intégrabilité de cette équation, sont ceux de $X = hx^n$ (n étant $= \frac{4\mu - 4}{2\mu - 1}$) que nous avons examiné ci-dessus; il peut y en avoir d'autres; mais il seroit trop long de les examiner ici.

Des oscillations d'une chaine pésante.

34. CE Problême étant célèbre parmi les Géomètres, je crois pouvoir me dispenser de donner l'Analise, par laquelle on trouve que la force accélératrice de chaque point de la chaine est comme la somme des angles de contingence depuis le sommet, moins l'angle de contingence multiplié par le rapport du poid total de la portion inférieure de la chaine au petit poids dont ce point est chargé. Soit donc x la longueur d'une partie quelconque de la chaine à commencer par le bout inférieur, Xdx la pesanteur, où la masse de la portion infiniment dx, & y l'espace parcouru horizontalement dans le tems t, on aura l'équation

$(\frac{d^2y}{dt^2})$

$$-\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\int X dx}{X} \times \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Or ſoit $X = fx^n$, on aura $\frac{\int X dx}{X} = \frac{x}{n+1}$, & faiſant $x = \frac{s^2}{b}$, $y = \frac{z}{s}$ il viendra

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \frac{h}{4(1+n)} \left[\left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right) + \overline{2n-1} \times \left(\frac{d \cdot \frac{z}{s}}{ds}\right)\right].$$

Equation réduite à notre formule générale, & qui aura une ſolution exacte toutes les fois que $2n-1$ ſera un nombre pair quelconque, c'eſt-à-dire, que $n = \frac{2\mu+1}{2}$. Dans le cas où la chaine eſt d'une péſanteur uniforme ; on a $n = 0$; ainſi m ſera $= -1$ dans les formules des *Art.* 27. & l'on trouvera que les deux ſeries, dont l'une eſt toute multipliée par f, & l'autre par h, reviendront préciſément à la même.

Soit l la longueur de la chaine, on aura dans le point de ſuſpenſion $y = \frac{z}{\sqrt{bl}}$; donc, ce point étant ſuppoſé fixe, il faudra que z y ſoit $= 0$; d'où l'on retrouvera les mêmes conditions entre les fonctions $\Gamma\ (a + t\sqrt{c})$, & $\Delta\ (a - t\sqrt{c})$ que dans *l'Art.* 32. Maintenant, puiſque la chaine eſt libre dans tous ſes autres points, il eſt viſible que ce ſeroit mal à propos, qu'on ſuppoſeroit $y = 0$, lorſque $x = 0$; mais il faudra remplacer cette condition par celle-ci $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; car il eſt naturel de penſer, que la courbure de la chaine doive s'évanoüir à ſon extrémité inférieure, par la raiſon qu'il n'y a ici aucun appui à l'action des parties ſupérieures. Or $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2}{s^5}\left(s^2 \frac{d^2 z}{ds^2} - 3s\frac{dz}{ds} + 3z\right)$; dônc lorſque s eſt zero, ou ſimplement

infiniment petit, $\frac{d^2 y}{d x^2}$ se réduit à $\frac{3 z}{s^2}$, & par conséquent on aura de même ici $z = 0$, lorsque $s = 0$, & $\Gamma t \sqrt{c} + \Delta - t \sqrt{c} = 0$, comme dans *l'Art. cité*. Au reste ce Problême, étant absolument analogue aux précédens, est susceptible de remarques semblables. Je me contenterai simplement de faire observer, que si on vouloit le résoudre directement par notre méthode générale, on parviendroit après les opérations ordinaires à cette équation en M, $kM = \frac{d^2 \cdot \frac{M \int X dx}{X}}{dx} - \frac{dM}{dx}$, qui est constructible par les méthodes connues dans le cas, où $X = hx^{\frac{2\mu+1}{2}}$; il faudroit ensuite déterminer la quantité k, avec les autres constantes de M, par la condition que $\frac{M \int X dx}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{d \cdot \frac{M \int X dx}{X}}{dx} \times y + My$, ou bien $\frac{M \int X dx}{X} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dM}{dx} \times \frac{\int X dx}{X} \times y + M \int X dx \times \frac{dX}{X^2 dx} \times y$ soit $= 0$, lorsque $x = a$, & $x = 0$. Or dans le premier cas y étant lui même $= 0$, il suffira que M le soit aussi; dans le second il est clair que toute la quantité s'évanoüira d'elle même à cause du facteur $\int X dx$ qui multiplie tous ses termes; cependant on supposera toujours $M = 0$, afin de terminer la suite des points mobiles au bout inférieur de la chaine.

S C O L I E I.

35. Par les formules données dans ce Chapitre, on peut résoudre le Problême de *l'Art.* 61. de l'excellent Traité de la résistence des fluides de M. D'Alembert, d'une manière, peut être plus analitique que ne l'a fait cet Auteur. Voici en quoi consiste ce Problême; il s'agit de trouver deux

quan-

tités A, & B, telles que $Adx + Bdz$, & $zBdx - zAdz$ soient l'une & l'autre des différentielles exactes. Pour rendre la question plus générale, je me propose de rendre exactes les deux différentielles $\alpha dt + \beta dx$, $x^m\beta dt + bx^n\alpha dx$; soit la première $= dp$, & la seconde $= dq$; on aura $\alpha = \frac{dp}{dt}$, $\beta = \frac{dp}{dx}$, $x^m\beta = \frac{dq}{dt}$, $bx^n\alpha = \frac{dq}{dx}$; donc $x^m \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt}$, $bx^n \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$. Je différentie ces équations en faisant varier x seul dans la première, & t seul dans la seconde; & je compare ensuite les deux valeurs de $\frac{d^2q}{dx\,dt}$; j'ai $\frac{d\cdot x^m\left(\frac{dp}{dx}\right)}{dx} = bx^n\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)$; savoir bx^{n-m} $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dp}{dx}\right)$. Equation qui est, comme on le voit susceptible de notre méthode; en suivant cette méthode, on trouvera d'abord l'équation en M

$$kMx^{n-m} = \frac{d^2M}{dx^2} - m\,\frac{d\cdot\frac{M}{x}}{dx}$$

qu'il faut intégrer avant d'aller plus avant. Pour cela je fais $x = s^u$; $M = Ns^r$; & supposant $u = \frac{2}{n-m+2}$ & $r^2 - (u + mu)r + mu^2 = 0$, je trouve après les substitutions & les réductions $kNu^2 = \frac{d^2N}{ds^2} + (2r - u - mu + 1)$ $\frac{dN}{s\,ds}$, équation qui se rapporte à celle de *l'Art.* 27. On voit donc par là, que l'équation en M sera constructible exactement par nos formules, toutes les fois que $2r - u - mu + 1$ sera un nombre pair quelconque; le reste du calcul n'aïant plus de difficulté, on trouvera pour la valeur de p une expression exacte & finie, composée de fonctions très-générales de x & de t. Si $n = m$, alors on a $u = 1$, & l'équation qui donne la valeur de r, devient $r^2 - (1 + m)r$

$+ m$

$+ m = 0$; d'où l'on tire $\nu = 1$, ou $= m$; dans le premier cas, le coéficient $2\nu - m - mu + 1$ devient $= 1 - 2m$; & dans le second, $= 1$; or dans le Problême de M. D'Alembert on a $m = 1$, d'où l'on voit que ce Problême n'admet point de solution exacte au moins suivant ma méthode; cependant si l'on veut se contenter d'une solution seulement approchée, on pourra y parvenir immédiatement par les formules du Prob. III. Car si dans l'équation $b x^{n-m} \left(\frac{d^2p}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2p}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ on fait $x = s^u$, & $p = q s^\nu$; & qu'on suppose les valeurs u & ν déterminés par ces équations $u = \frac{2}{n - m + 2}$, & $\nu^2 + (2 - u + mu)\nu + mu - u + 1 = 0$ il vient

$$bu^2 \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2q}{ds^2}\right) + (2\nu - u + 1 + mu)\left(\frac{d \cdot \frac{q}{s}}{ds}\right)$$

Equation qui a la même forme, que celle du Prob. cit é, & qui par conséquent est susceptible des mêmes solutions. Lorsque $m = n$, on a $u = 1$, & $\nu = -1$, ou $-m$; la première racine rend le coéficient de $d \cdot \frac{q}{s}$, $= m - 2$, & la seconde le rend $= - m$; ce qui conduit aux mêmes conclusions que plus haut. Au reste il est visible que le Problême présent renferme dans sa généralité tout ceux, dont nous avons traité dans ce Chapître.

SCOLIE II.

36. L'équation $kM = \frac{d^2M}{dx^2} - m\frac{dM}{x\,dx}$ étant transformée par la substitution de $f s^{\frac{-1}{m+1}}$ au lieu de x devient $\frac{f^2 k}{(1+m)^2}$

Ms

$Ms^{\frac{-2m}{1+m}} = \frac{d^2M}{ds^2}$, & faiſant enſuite $M = e^{\int y\,ds}$, $dy + y^2 ds = \frac{f^2 k}{(1+m)}; s^{\frac{-2m}{1+m}}$; qui eſt l'équation même de Ricati. Les formules trouvées dans la ſolution du Prob. III. donnent, comme on le voit, une conſtruction générale de cette équation; mais il faut remarquer, que ces formules ne ſont encore que des cas particuliers des intégrales completes, qui réſultent de la ſuppoſition de quelques conſtantes $= 0$; pour les completer on joindra à la valeur déja trouvée de y, la quantité $\frac{e^{-2\int y\,ds}}{\int e^{-2\int y\,ds}\,ds}$; ce qui eſt facile à démontrer.

CHAPITRE V.

Continuation des Recherches ſur la propagation du Son.

§. I.

De la propagation du Son, en ſuppoſant que les ébranlemens des particules de l'air ne ſoient pas infiniment petits.

37. Quelque naturelles, que paroiſſent les hipothèſes que nous avons examiné dans le Chap. III.; elles donnent cependant la viteſſe du Son moindre que la véritable, d'environ 163. pieds par ſeconde; comme on le peut conclure des *Art.* 12. & 26. cideſſus. Cette différence eſt ſans doute aſsès conſidérable, pour ne pas être attribuée aux erreurs des expériences, qui ſervent d'élémens à notre Théorie, comme j'étois porté à le penſer quand je donnai mes premières Recherches ſur le

le Son (*Voïés Art. LVII.*). Mais quelle pourroit donc en être la cauſe? M. Euler a crû la trouver dans la ſuppoſition des ébranlemens infiniment petits, ſur laquelle on a juſqu'ici fondé les calculs de la propagation du Son (*Voïés ſon Mémoire, pag.* 10. *ci-deſſus*). Cette conjecture eſt plauſible, mais je doute, qu'en l'examinant à fond on la trouve auſſi ſatisfaiſante, qu'elle le paroit d'abord. Pour en apprécier la valeur, voici la méthode que j'ai imaginé.

Problêmes préliminaires.

PROBLEME IV.

Conſtruire l'équation $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y$, y *étant une fonction quelconque de* x *& de* t.

38. Je la multiplie par Mdx, je l'intègre, & j'opère à l'égard des termes $\int\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) Mdx$, & $c\int\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) Mdx$, comme dans le Prob. I.; je parviens ainſi à cette équation en s, $\frac{d^2 s}{dt^2} = cks + \int Mydx$ par les mêmes procédés je trouve l'intégrale $s + \mu v = Ae^{t:\mu} + \mu e^{t:\mu}\int e^{-t:\mu} dt \int Mydx$, d'où réſultent les deux équations

$$\int z Mdx = \text{coſ.}\, t\sqrt{-ck}\int ZMdx + \frac{\text{ſin.}\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}}\int VMdx$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}}\int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int Mydx$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int Mydx \quad \ldots\ldots (A)$$
$$\int u Mdx = \text{coſ.}\, t\sqrt{-ck}\int VMdx - \sqrt{-ck}\,\text{ſin.}\, t\sqrt{-ck}\int ZMdx$$
$$+ \frac{1}{2} e^{t\sqrt{ck}}\int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int Mydx$$
$$+ \frac{1}{2} e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}} dt \int Mydx \quad \ldots\ldots\ldots (B)$$

Or

Or, puisque $M = \text{sin. } x\sqrt{-k}$, il faut, pour pouvoir chasser la quantité k des équations précédentes, réduire tous leurs termes en sorte, que cette quantité k ne se rencontre que dans des fonctions de la forme de $\text{sin. } (x)\sqrt{-k}$, (x) marquant une fonction quelconque de x & t. Les termes qui renferment $\int ZMdx$ étant les mêmes ici que dans le Prob. I., ils se raméneront à cette forme par les réductions enseignées; ainsi toute la difficulté se réduira aux termes affectés de deux signes d'intégration, & provenant de la quantité y.

Prenons d'abord le terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int Mydx$; & commençons par faire disparoître la quantité k du coéficient $\frac{1}{2\sqrt{ck}}$. Pour cela soit changée l'intégrale $\int Mydx = \int \text{sin. } x\sqrt{-k}\, ydx$ en son équivalente $\text{sin. } x\sqrt{-k}\int ydx - \sqrt{-k}\int \text{cos. } x\sqrt{-k}\, dx \int ydx$; ce qui donnera par la substitution, & en effaçant le terme $\text{sin. } x\sqrt{-k}\int ydx$, à cause de $\text{sin. } x\sqrt{-k} = 0$ au premier & au dernier point de l'intégrale $\int Mydx$, la transformée $\frac{1}{2\sqrt{-1}\times\sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int \text{cos. } x\sqrt{-k}\, dx \int ydx$. Posons pour abréger $\int ydx = Y$, & mettons aux lieu de $\text{cos. } x\sqrt{-k}$ sa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}}}{2}$; transportant le signe d'intégration qui regarde l'x au devant de celui qui regarde le t, (ce qui est permis à cause que la quantité $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui est entre les deux signes, est une quantité constante à l'égard de x) on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{(x-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Ydt + \frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int dx \int e^{-(x+t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Ydt$. Soit fait $x - t\sqrt{c} = p$, $x + t\sqrt{c} = q$, & soit nommée P, la fonction de t & de p qui vient de

la substitution de $p + t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la quantité Y; & Q la fonction de t & de q, qui vient de la substitution de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la même quantité Y; en prenant au lieu des variables t & x, les nouvelles variables t & p, & t & q, on changera les deux expressions intégrales $\int dx \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$, $\int dx \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt$, en celles-ci $\int dp \int e^{p\sqrt{k}} P dt$, $\int dq \int e^{-q\sqrt{k}} Q dt$, qui ont les mêmes valeurs, quoique sous des formes différentes. Dans ces dernières expressions, les intégrations $\int e^{p\sqrt{k}} P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}} Q dt$ devront se faire en variant seulement t; donc, si on suppose que les intégrales $\int P dt$, & $\int Q dt$ soient prises avec cette condition, on aura $e^{p\sqrt{k}} \int P dt$, $e^{-q\sqrt{k}} \int Q dt$; ce qui donnera les transformées $\int e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, dans lesquelles il faudra faire maintenant p & q variables, & t constante; or, à cause que les quantités $\int P dt$, & $\int Q dt$ ne contiennent point de x, il est visible qu'il reviendra au même d' intégrer $e^{p\sqrt{k}} dp \int P dt$, & $e^{-q\sqrt{k}} dq \int Q dt$, en supposant p & q seules variables, & de remettre après l' intégration au lieu de p & q leurs valeurs $x - t\sqrt{c}$, & $x + t\sqrt{c}$, que de restituer d' abord ces valeurs à la place de p & de q, & d'intégrer ensuite en faisant varier x; d' où il s' ensuit qu'on aura $\int dx \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dp \int e^{p\sqrt{k}} P dt = \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt$, & $\int dx \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}} Y dt = \int dq \int e^{-q\sqrt{k}} Q dt = \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int Q dt$. Par conséquent la transformée cherchée du terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}} dt \int My dx$ deviendra après toutes les substitutions $\frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}} dx \int P dt +$

$\frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}} e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{}}$ [illegible]

mettant hors d[illegible]

tielle $e^{-t\sqrt{ck}}$, [illegible]

duit plus ſimplément à $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int Pdt + \int e^{-x\sqrt{k}}dx\int Qdt)$.

Par des opérations, & des réductions ſemblables on changera encore l'autre terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}}e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}}dt\int My\,dx$ en $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int Qdt + \int e^{-x\sqrt{k}}dx\int Pdt)$; donc en retranchant la transformée du ſecond terme de celle du premier, on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}\int(e^{x\sqrt{k}}-e^{-x\sqrt{k}})(\int Pdt-\int Qdt)\,dx = \int\frac{1}{2\sqrt{c}}(\int Qdt-\int Pdt)\,\text{ſin.}\,x\sqrt{-k}\,dx$. Subſtituant cette expreſſion dans l'équation (A) ci-deſſus, & égalant entr'eux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$, ſuivant les règles de notre méthode, on trouvera pour la valeur de z les formules qu'on a déja trouvé dans le Prob. I., jointes avec la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}(\int Qdt-\int Pdt)$.

Après avoir ainſi trouvé la valeur de z il ne ſera pas difficile de déduire celle de u de l'équation (B). Pour cela, comme dans cette équation les termes qui renferment y, ſont exempts du coéficient $\frac{1}{\sqrt{ck}}$, on y mettra d'abord, & ſans aucune préparation, à place de M ſa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}}-e^{-x\sqrt{k}}}{2\sqrt{-1}}$; enſuite faiſant des obſervations & des réductions analogues à celles que nous avons faites plus haut, on trouvera que, ſi P' & Q' ſont pris pour exprimer les valeurs de y après les ſubſtitutions de $p+t\sqrt{c}$ & de $q-t\sqrt{}$ [illegible] de x, les termes dont il s'agit [illegible] $+\int Q'$[illegible]$)$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$; par [illegible] era outre les formules trouvées

la substitution de $p + t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la quantité Y; & Q la fonction de t & de q, qui vient de la substitution de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x dans la même quantité Y; en prenant au lieu des variables t & x, les nouvelles variables t & p, & t & q, on changera les deux expressions intégrales $\int dx \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Y dt$, $\int dx \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Y dt$, en celles-ci $\int dp \int e^{p\sqrt{k}}\, P dt$, $\int dq \int e^{-q\sqrt{k}}\, Q dt$, qui ont les mêmes valeurs, quoique sous des formes différentes. Dans ces dernières expressions, les intégrations $\int e^{p\sqrt{k}}\, P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}}\, Q dt$ devront se faire en variant seulement t; donc, si on suppose que les intégrales $\int P dt$, & $\int Q dt$ soient prises avec cette condition, on aura $e^{p\sqrt{k}} \int P dt$, $e^{-q\sqrt{k}} \int Q dt$; ce qui donnera les transformées $\int e^{p\sqrt{k}}\, dp \int P dt$, $\int e^{-q\sqrt{k}}\, dq \int Q dt$, dans lesquelles il faudra faire maintenant p & q variables, & t constante; or, à cause que les quantités $\int P dt$, & $\int Q dt$ ne contiennent point de x, il est visible qu'il reviendra au même d'intégrer $e^{p\sqrt{k}}\, dp \int P dt$, & $e^{-q\sqrt{k}}\, dq \int Q dt$, en supposant p & q seules variables, & de remettre après l'intégration au lieu de p & q leurs valeurs $x - t\sqrt{c}$, & $x + t\sqrt{c}$, que de restituer d'abord ces valeurs à la place de p & de q, & d'intégrer ensuite en faisant varier x; d'où il s'ensuit qu'on aura $\int dx \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Y dt = \int dp \int e^{p\sqrt{k}}\, P dt = \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int P dt$, & $\int dx \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, Y dt = \int dq \int e^{-q\sqrt{k}}\, Q dt = \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int Q dt$. Par conséquent la transformée cherchée du terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-t\sqrt{ck}}\, dt \int My\, dx$ deviendra après toutes les substitutions $\frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{(x - t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int P dt + \frac{1}{4\sqrt{-1} \times \sqrt{c}}\, e^{t\sqrt{ck}} \int e^{-(x + t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dx \int Q dt$, laquelle, en mettant hors des signes d'intégration la quantité exponentielle $e^{-t\sqrt{ck}}$, qui est constante à l'égard de x, se réduit

duit plus ſimplément à $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}$ $(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int Pdt +$ $\int e^{-x\sqrt{k}}dx\int Qdt)$.

Par des opérations, & des réductions ſemblables on changera encore l'autre terme $\frac{1}{2\sqrt{ck}}$ $e^{-t\sqrt{ck}}\int e^{t\sqrt{ck}}dt\int My\,dx$ en $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}$ $(\int e^{x\sqrt{k}}dx\int Qdt + \int e^{-x\sqrt{k}}dx\int Pdt)$; donc en retranchant la transformée du ſecond terme de celle du premier, on aura $\frac{1}{4\sqrt{-1}\times\sqrt{c}}\int(e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}})$ $(\int Pdt - \int Qdt)\,dx = \int\frac{1}{2\sqrt{c}}$ $(\int Qdt - \int Pdt)$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$. Subſtituant cette expreſſion dans l'équation (A) ci-deſſus, & égalant entr'eux tous les angles multiples de $\sqrt{-k}$, ſuivant les règles de notre méthode, on trouvera pour la valeur de z les formules qu'on a déja trouvé dans le Prob. I., jointes avec la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}$ $(\int Qdt - \int Pdt)$.

Après avoir ainſi trouvé la valeur de z il ne ſera pas difficile de déduire celle de u de l'équation (B). Pour cela, comme dans cette équation les termes qui renferment y, ſont exempts du coéficient $\frac{1}{\sqrt{ck}}$, on y mettra d'abord, & ſans aucune préparation, à place de M ſa valeur exponentielle $\frac{e^{x\sqrt{k}} - e^{-x\sqrt{k}}}{2\sqrt{-1}}$; enſuite faiſant des obſervations & des réductions analogues à celles que nous avons faites plus haut, on trouvera que, ſi P' & Q' ſont pris pour exprimer les valeurs de y après les ſubſtitutions de $p + t\sqrt{c}$ & de $q - t\sqrt{c}$ au lieu de x, les termes dont il s'agit deviendront $\frac{1}{2}$ $\int(\int P'dt + \int Q'dt)$ ſin. $x\sqrt{-k}\,dx$; par conſéquent l'expreſſion de u renfermera outre les formules

trouvées à la fin de *l'Art.* 6., encore celle-ci $\frac{\int P' dt + \int Q' dt}{2}$.

COROLLAIRE.

38. Donc le terme y ajouté à l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2}$ produit dans les valeurs de z & de u une augmentation qu'on determinera ainsi. Soit intégré $y dx$, en ne faisant varier que x; & l'intégrale trouvée $\int y dx$ étant multiplié par dt soit intégrée de nouveau en supposant d'abord $x + t\sqrt{c}$ constant, & t seul variable; puis en supposant $x - t\sqrt{c}$ constant, & t seul variable; retranchant cette seconde intégrale de la première, & divisant la différence par $2\sqrt{c}$, on aura ce qu'il faut ajouter à la valeur de z. Ensuite soit intégré simplement $y dt$ d'abord en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme constante, & t comme variable, puis en traitant $x - t\sqrt{c}$ comme constante, & t de même comme variable; la somme de ces deux intégrales divisée par 2 sera l'augmentation de la valeur de u.

SCOLIE I.

39. Dans l'excellent Traité de la cause des vents de M. D'Alembert on trouve à *l'Art.* 87. une méthode fort simple, & fort ingénieuse pour rendre completes ces deux différentielles $\alpha ds + \beta du$, & $\rho\alpha du + \nu\beta ds + du \Delta u, s + ds \Gamma u, s$. Le Problême se réduit à celui que nous venons de résoudre; car en supposant la premiere de ces différentielles $= dp$, on trouve $\alpha = \frac{dp}{ds}$ & $\beta = \frac{dp}{du}$; mais pour que la seconde différentielle soit exacte, il faut que

$$\frac{d\cdot(\rho\alpha + \Delta u, s)}{ds} = \frac{d\cdot(\nu\beta + \Gamma u, s)}{du}$$

ce qui donne en substituant & différentiant

$\rho\, d^2 p$

$$p \frac{d^2 p}{ds^2} + \frac{d \cdot \Delta u, s}{ds} = \gamma \frac{d^2 p}{du^2} + \frac{d \cdot \Gamma u, s}{du},$$

Equation qui reviendra au même, que celle du Problême précédent, si on pose z au lieu de p, t au lieu de s, x au lieu de u, c au lieu de $\frac{\gamma}{p}$, & y au lieu de $\frac{d \cdot \Gamma u, s}{p du}$ $- \frac{d \cdot \Delta u, s}{p ds}$.

Si d'un coté la solution de M. D'Alembert est plus simple que la notre, de l'autre elle paroit insuffisante pour les cas, où les valeurs de p seroient prises à volonté lorsque $s = 0$; & c'est précisément dans ces cas que rentre la question qui est l'objet du Problême précédent. Au reste si on introduit dans notre solution au lieu de Z & de V des fonctions indéterminées, on en tirera des formules analogues à celles que M. D'Alembert à trouvé par sa méthode. Il est vrai, que nos formules se présenteront sous une autre forme, que celles de cet Auteur; mais la comparaison n'en sera pas difficile, & ne demandera d'ailleurs que un peu d'adresse de calcul; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas.

SCOLIE II.

40. Ce Savant Géomètre a encore rendu l'usage de sa méthode plus général en l'appliquant à déterminer les quantités α & β par les conditions que $\alpha ds + \beta du$, & $p\alpha du + p\beta du + \gamma\beta ds + m\alpha ds + du \Delta u, s + ds \Gamma u, s$, soient l'une & l'autre des différentielles completes. Faisant $\alpha ds + \beta du = dq$, & substituant dans la seconde différentielle les valeurs de α & β en q, on trouvera par les conditions de l'intégrabilité l'équation suivante,

$$p \left(\frac{d^2 q}{ds^2}\right) + p \left(\frac{d^2 q}{ds\, du}\right) + \left(\frac{d \cdot \Delta u, s}{ds}\right) = \gamma \left(\frac{d^2 q}{du^2}\right)$$
$$+ m \left(\frac{d^2 q}{du\, ds}\right) + \left(\frac{d \cdot \Gamma u, s}{du}\right)$$

qui

qui peut ſe rapporter à cette forme

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = b\left(\frac{d^2 z}{dt\,dx}\right) + c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y$$

Quoique cette équation ſoit étrangère à la matière que nous traitons, je crois qu'on ne ſera point faché de voir comment notre méthode s'y applique. Je commence ici par ſuppoſer $\frac{dz}{dt} = u$; & je décompoſe par ce moïen l'équation propoſée dans les deux ſuivantes

$$\frac{dz}{dt} = u; \;\&\; \frac{du}{dt} = b\,\frac{du}{dx} + c\,\frac{d^2 z}{dx^2} + y;$$

Je multiplie la première de ces équations par $N dx$, & la ſeconde par $M dx$, je les ajoute enſemble, & j'en prens l'intégrale, en faiſant évanoüir par des intégrations par parties les différences de z qui naiſſent de la variabilité de x;

j'ai $\int\left(N\,\frac{dz}{dt} + M\,\frac{du}{dt}\right) dx =$

$$\int\left(c\,\frac{d^2 M}{dx^2}\,z + \left[N - b\,\frac{dM}{dx}\right] u\right) dx + \int My\,dx$$

$$+ bMu + cM\frac{dz}{dx} - c\,\frac{dM}{dx}\,z.$$

Négligeant ces derniers termes algébriques qui diſparoiſſent d'eux mêmes, dans la ſuppoſition que M ſoit $= 0$ au premier, & au dernier point de l'intégrale, & comparant terme à terme, on aura $kN = c\,\frac{d^2 M}{dx^2}$; & $kM = N - b\,\frac{dM}{dx}$ d'où l'on tire $k^2 M + bk\,\frac{dM}{dx} - c\,\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$, & $M = Ae^{mkx} + Be^{nkx}$, m & n étant les racines de l'équation $1 + by - cy^2 = 0$. Or M devant être $= 0$, lorſque $x = 0$, & $x = a$, on aura $B = -A$; & $e^{mka} - e^{nka} = 0$; ce qui fournira une infinité de valeurs de k; on aura donc $M = e^{mkx} - e^{nkx}$; & par conſéquent $N = ck\,(m^2 e^{mkx} - n^2 e^{nkx})$. Soit maintenant $\int(Nz + Mu)\,dx = s$, notre

notre equation deviendra $\frac{ds}{dt} = ks + \int M dyx$; d'où l'on tire en intégrant & conservant les noms, que nous avons employé dans tout le cours des Recherches précédentes, $\int(Nz + Mu)dx = e^{kt}\int(NZ + MV)dx + e^{kt}\int e^{-kt}dt\int My dx$. Or la quantité N étant multipliée par un coéficient k, pour le faire disparoître on changera les intégrales $\int Nz dx$, & $\int NZ dx$ en $-\int(\frac{dz}{dx})dx\int N dx$ & $-\int(\frac{dZ}{dx})dx\int Ndx$, en négligeant les autres termes qui deviennent nuls, à cause que z & Z disparoissent quand $x = 0$, & $= a$; substituant donc les valeurs de M, & de $\int N dx$, on aura

$$\int(u - cm\frac{dz}{dx})e^{mkx}dx - \int(u - cn\frac{dz}{dx})e^{nkx}dx =$$
$$\int(V - cm\frac{dZ}{dx})e^{(mx+t)k}dx - \int(V - cn\frac{dZ}{dx})e^{(nx+t)k}dx$$
$$+ e^{kt}\int e^{-kt}dt\int e^{mkx}y dx - e^{kt}\int e^{-kt}dt\int e^{nkx}y dx.$$

Soit P la fonction de p & de t qui vient de la substitution de p au lieu de $mx - t$ dans y, & Q la fonction de q & de t qui vient de la substitution de q à la place de $nx - t$ dans la même quantité y; les deux derniers termes de la formule précédente se changeront, selon ce qui a été enseigné plus haut, en ceux-ci

$$\int(\int P dt)e^{mkx}dx - \int(\int Q dt)e^{nkx}dx.$$

Maintenant, puisque m est supposé différent de n, il est clair, que les quantités exponentielles e^{mkx}, e^{nkx}, & $e^{(mx+t)k}$, $e^{(nx+t)k}$ ne sauroient jamais devenir égales; donc il faudra nécessairement décomposer l'équation en deux, afin d'en chasser la quantité k; par ce moïen on trouvera, en retenant les expressions emploïées dans le Problême I.

$u - cm$

$$u - cm\,\frac{dz}{dx} = \left(V - cm\,\frac{dZ}{dx}\right)^{\left(x - \frac{t}{m}\right)} + \int P\,dt$$

$$u - cn\,\frac{dz}{dx} = \left(V - cn\,\frac{dZ}{dx}\right)^{\left(x - \frac{t}{n}\right)} + \int Q\,dt.$$

S'il arrivoit que n fût $= m$, alors, la première de ces équations demeurant la même, on ne feroit qu'augmenter n d'une quantité infiniment petite α ; c'eſt-à-dire on ſuppoſeroit $n = m + \alpha$; & ôtant la première équation de la ſeconde, il viendroit après avoir diviſé par α

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{d\cdot\left(V - cm\,\frac{dZ}{dx}\right)}{dx} \times \frac{t}{cm^2}\right)^{\left(x - \frac{t}{m}\right)}$$

$$+ \int\left(\frac{dP}{dp}\right) \times \left(\frac{p + t}{cm^2}\right) dt.$$

Si n étoit infini, ce qui arrivera lorſque $c = o$, alors on auroit auſſi $cn = o$, & la ſeconde équation deviendroit $u = (V)^{(x)} + \int Q\,dt$.

Si on veut maintenant comparer les réſultats de cette ſolution avec ceux de M. D'Alembert, on prendra pour $\left(V - cm\,\frac{dZ}{dx}\right)^{\left(x - \frac{t}{m}\right)}$, & $\left(V - cn\,\frac{dZ}{dx}\right)^{\left(x - \frac{t}{n}\right)}$ des fonctions indéterminées de $x - \frac{t}{m}$, & de $x - \frac{t}{n}$, & faiſant les ſubſtitutions & les réductions néceſſaires, on trouvera pour α & β des formules analogues à celles que cet Auteur a donné; quoique j'aïe fait tous les calculs que cette comparaiſon demande, je ne les inſérerai point ici pour ne pas paſſer les bornes que je me ſuis préſcrites dans cette Diſſertation.

PROBLEME V.

Conſtruire l'équation $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + c\left(\frac{d\cdot\frac{z}{x}}{dx}\right) + y.$

41. En ſuivant notre méthode, on parviendra aux mêmes équations (A) & (B) du Prob. précéd., avec cette

seule

seule différence, que la quantité M sera maintenant égale à fin. $x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}$ cof. $x\sqrt{-k}$ comme dans le Prob. II.; ce qui rendra l'expression $\int My\,dx$ composée des deux termes $\int$ fin. $x\sqrt{-k}\,y\,dx - \sqrt{-k}\int$ cof. $x\sqrt{-k}\,y\,x\,dx$; on aura donc dans l'équation (A) $\frac{1}{2\sqrt{ck}}\int My\,dx = \frac{1}{2\sqrt{ck}}\int$ fin. $x\sqrt{-k}\,y\,dx + \frac{1}{2\sqrt{c}\times\sqrt{-1}}\int$ cof. $x\sqrt{-k}\,y\,x\,dx =$ (en réduisant le premier terme, comme on a fait dans le Prob. préc.) $\frac{1}{2\sqrt{c}\times\sqrt{-1}}\int$ cof. $x\sqrt{-k}\,(\int y\,dx + xy)\,dx$; où il faudra pourtant observer que l'intégrale $\int y\,dx$ soit prise de manière qu'elle s'évanouïsse lorsque $x = a$, afin que le terme $\frac{\text{fin. } x\sqrt{-k}\int y\,dx}{\sqrt{ck}}$ que nous négligeons s'évanouïsse de même. Supposant donc maintenant $\int y\,dx + xy = Y$, & faisant les autres observations, & réductions suivant les principes établis dans les Prob. II. & IV., on trouvera que la valeur de z' savoir de $z + \frac{d\cdot zx}{dx}$, de l'*Art.* 20., devra être ici augmentée de la quantité $\frac{1}{2\sqrt{c}}(\int Q\,dt - \int P\,dt)$.

On tirera de même de l'équation (B) la valeur de u'; mais on pourra s'épargner la peine de ce calcul, en cherchant d'après la valeur trouvée de z' celle de $\frac{dz'}{dt} = u'$.

Usage des Problèmes précédens.

42. Examinons d'abord le cas d'une ligne phisique d'air; il est facile de trouver que l'équation rigoureuse du mouvement des particules sera $\frac{d^2 z}{dt^2} = -c\,\frac{d\cdot\frac{dx}{dx+dz}}{dx^2}\times(dx+dz)$

 $= c$

$= c \frac{d^2 z}{dx(dx + dz)}$; car la portion de fluide qui dans l'état d'équilibre occupe l'espace dx, après le tems t remplira l'espace $dx + dz$, & son élasticité sera par conséquent diminuée dans le rapport $\frac{dx}{dx + dz}$; donc la différence d'élasticité des deux particules adjacentes, s'exprimera par $\frac{d \cdot \frac{dx}{dx + dz}}{dx} \times (dx + dz)$; donc divisant par la masse dx de la particule intermédiaire, on aura la force qui tend la mouvoir, donc &c.

Je réduit la fraction $\frac{1}{dx + dz}$ en suite par une division infinie; il me vient $\frac{1}{dx} - \frac{dz}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^3}$ — &c.; j'aurai donc en substituant $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2} - c \frac{dz\, d^2 z}{dx^3} + c \frac{dz^2 d^2 z}{dx^4}$ — &c. Or si on suppose dz infiniment petite par rapport à dx, il est clair que le second membre de cette équation se réduit au seul terme $c \frac{d^2 z}{dx^2}$, & qu'ainsi l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2}$ donnera une valeur de z qui pourra être regardée comme exacte; c'est le cas que nous avons déja traité. Mais si on suppose seulement z fort petite, & cependant finie l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \frac{d^2 z}{dx^2}$ ne donnera plus qu'une valeur approchée de z; on substituera donc cette valeur dans les termes $- c \frac{dz\, d^2 z}{dx^3} + c \frac{dz^2 d^2 z}{dx^4}$ — &c. qu'on avoit négligées, & intégrant l'équation par la méthode du Prob. IV., on aura une valeur de z plus exacte; on substituera de nouveau la valeur de z ainsi corrigée, & l'on en tirera une autre encore plus exacte que la précédente; en opérant ainsi de suite, on approchera toujours de plus en plus de la vraie valeur de z.

O-

Or si, pour faciliter le calcul, on introduit les fonctions indéterminées dans notre solution du Problême I., on a pour la premiere valeur de z, $z = \varphi(x + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{c})$; maintenant il faut supposer $y = -c \frac{dz\, d^2 z}{dx^3} + c \frac{dz^2 d^2 z}{dx^4}$ — &c. ce qui donne $\int y\, dx = Y = -c \frac{dz^2}{2dx^2} + c \frac{dz^3}{3dx^3}$ — &c. $= -\frac{1}{2} c \varphi'^2 (x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{2} c \psi'^2 (x - t\sqrt{c}) - c\varphi'(x + t\sqrt{c}) \times \psi'(x - t\sqrt{c})$, en négligeant les termes suivants qui doivent être regardés comme infiniment petits d'un ordre plus élevé; on aura donc

$$P = -\frac{1}{2} c\varphi'^2 (p + 2t\sqrt{c}) - c\varphi'(p + 2t\sqrt{c}) \times \psi' p$$
$$- \frac{1}{2} c\psi'^2 p \quad \&$$

$$Q = -\frac{1}{2} c\varphi'^2 q - c\varphi' q \times \psi'(q - 2t\sqrt{c})$$
$$- \frac{1}{2} c\psi'^2 (q - 2t\sqrt{c}),$$ & par conséquent

$$\int P\, dt = -\frac{1}{2} c \int \varphi'^2 (p + 2t\sqrt{c})\, dt - \frac{\sqrt{c}}{2} \varphi(p + 2t\sqrt{c})$$
$$\times \psi' p - \frac{1}{2} ct\psi'^2 p$$

$$\int Q\, dt = -\frac{1}{2} ct\varphi'^2 q + \frac{\sqrt{c}}{2} \varphi' q \times \psi(q - 2t\sqrt{c})$$
$$- \frac{1}{2} c \int \psi'^2 (q - 2t\sqrt{c})\, dt.$$

Que (φ) dénote la valeur de l'intégrale $\int \varphi'^2 (p + 2t\sqrt{c})\, dt\sqrt{c}$, & (ψ) celle de l'intégrale $\int \psi'^2 (q - 2t\sqrt{c})\, dt\sqrt{c}$, on trouvera après avoir restitué au lieu de p & de q leurs valeurs, $\frac{\int Q\, dt - \int P\, dt}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4} t\sqrt{c}\, [\psi'^2 (x - t\sqrt{c})$

 $- \varphi'^2$

$- \varphi'^2 [(x + t\sqrt{c}]] + \frac{1}{4} \psi (x - t\sqrt{c}) \times \varphi' (x \mp t\sqrt{c}) +$
$\psi' (x - t\sqrt{c}) \times \varphi' (x + t\sqrt{c}) - \frac{1}{4} (\psi) + \frac{1}{4} (\varphi)$ quantité qui devra être ajoutée à la première valeur de z.

Pour voir maintenant combien cette correction peut influer sur la vitesse de la propagation des ébranlemens, on observera que les fonctions φx & ψx doivent être telles qu'elles soient toujours $= 0$, lorsque les abscisses x ne sont pas très-petites (*Voïés Art.* 4.); d'où il suit que pour la propagation du côté des abscisses positives x, il ne faudra retenir que les fonctions de $x - t\sqrt{c}$, ou de $q - 2t\sqrt{c}$; on aura donc $z = \psi (x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c}\, \psi'^2 (x - t\sqrt{c})$ $- \frac{1}{4} (\psi)$. Or, en supposant la valeur de $\psi (x - t\sqrt{c})$ très-petite, $\psi'^2 (x - t\sqrt{c})$ sera infiniment petite du second ordre; & (ψ) sera aussi du même ordre à très-peu-près, à cause que la fonction $\psi (x - t\sqrt{c})$ n'a de valeur que dans une fort petite étenduë de l'axe; mais $t\sqrt{c}$, devant être à peu-près $= x$, recevra une valeur considérable; donc le terme (ψ) s'évanoüira auprès du terme $t\sqrt{c}\, \psi'^2 (x - t\sqrt{c})$; & la valeur de z se réduira à $\psi (x - t\sqrt{c}) + \frac{1}{4} t\sqrt{c}$ $\psi'^2 (x - t\sqrt{c})$.

Le premier terme $\psi (x - t\sqrt{c})$ donne, comme il est facile de voir, & comme on l'a démontré ailleurs, la vitesse de la propagation $= \sqrt{c}$; & il est clair que cette vitesse ne peut varier à moins que la quantité $\sqrt{c}$ ne varie de même; supposons donc $\sqrt{c} + \alpha$ au lieu de $\sqrt{c}$, α étant une quantité assès petite; on aura pour le premier terme de la valeur de z, $\psi (x - t\sqrt{c} - t\alpha)$, qui se réduit à $\psi (x - t\sqrt{c}) - t\alpha\, \psi' (x - t\sqrt{c})$; comparant cette expression avec celle qu'on a trouvé par notre approximation

tion, on a $\alpha = -\frac{\sqrt{c}}{4}\ \psi'(x - t\sqrt{c})$; mais $-\sqrt{c}\ \psi'(x - t\sqrt{c})$ $= \frac{d \cdot \psi(x - t\sqrt{c})}{dt}$ = à la viteſſe propre de la particule qui répond à l' abſciſſe x; donc ſi on nomme u cette viteſſe on aura $\alpha = \frac{u}{4}$, & par conſéquent la viteſſe de la propagation deviendra $= \sqrt{c} + \frac{u}{4}$ à très-peu-près. Cette concluſion paroit donc en quelque ſorte favorable à l' hipothèſe des ébranlemens finis; mais elles perdera toute ſa force pour peu qu'on s' arrête à l' examiner.

Par ce qu'on vient de trouver, on a $z = \psi(x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4})$; ſoit a la longueur de l'onde aérienne excitée immédiatement par le corps ſonore, il eſt clair que z ne commencera à avoir une valeur, que quand $x - t\sqrt{c} - \frac{tu}{4}$ ſera $= a$; d'où il s' enſuit qu'au bout du tems t le Son ſera parvenu juſqu'à la particule qui répond à l'abſciſſe $x = a + t(\sqrt{c} + \frac{u}{4})$, u étant la viteſſe que cette particule reçoit en même tems. Or en premier lieu cette viteſſe ne peut être qu'infiniment petite, puiſque il ſeroit abſurde qu'une particule d' un fluide élaſtique reçût tout d' un coup une viteſſe finie par l' action des autres parties adjacentes; en ſecond lieu il eſt viſible que la formule trouvée détruiroit l' uniformité de la viteſſe du Son, & la feroit dépendre en quelque ſorte de la nature des ébranlemens primitifs; ce qui eſt contraire à toutes les expériences.

Il ſeroit, après cela, inutile de pouſſer plus loin l'approximation de la valeur de z; car, outre qu'il n'en réſulteroit que des termes moindres que celui que nous venons d'examiner, l'expreſſion de la viteſſe du Son deviendroit toujours plus

plus compliquée, & par conſéquent moins conforme à la véritable.

43. Paſſons maintenant à l' hipothèſe des ondulations ſphériques; & cherchons par le moïen du Prob. V. ſi le changement, que la ſuppoſition des ébranlemens finis cauſe dans leur propagation, peut s' accorder avec les phénomènes.

Par les principes poſés dans *l' Art.* 30., on trouvera pour l' équation rigoureuſe du mouvement du fluide

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -c \frac{d \cdot \frac{x^2 dx}{(x+z)^2 (dx+dz)}}{dx} \times \frac{(x+z)^2 (dx+dz)}{x^2 dx}$$

$$= \frac{d^2 z}{dx(dx+dz)} + \frac{2dz}{dx(x+z)} - \frac{2z}{x(x+z)},$$

d' où l' on tire par la voie des ſeries

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2d \cdot \frac{z}{x}}{dx}\right) - c\left(\frac{dz\, d^2 z}{dx^3} + 2\frac{z}{x} \times \frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}\right)$$

$$+ c\left(\frac{dz^2 d^2 z}{dx^4} + 2\frac{z^2}{x^2} \times \frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}\right) - \text{, \&c.}$$

On aura donc ſelon le Prob. V. $y = -c\left(\frac{dz\, d^2 z}{dx^3} + 2\frac{z}{x} \times \frac{d \cdot \frac{z}{x}}{dx}\right)$ en négligeant les autres termes qui renferment plus de deux dimenſions de z; donc $\int y\, dx = -\frac{c}{2}\frac{dz^2}{dx^2} - c\frac{z^2}{x^2}$; & $\int y dx + xy = Y = \frac{d \cdot x \int y dx}{dx} = -\frac{c}{2}\frac{d \cdot \frac{x dz^2}{dx^2}}{dx} - c\frac{d \cdot \frac{z^2}{x}}{dx}$. Maintenant il faut ſubſtituer au lieu de z, ſa valeur tirée des formules du Prob. II.; pour abréger ces ſubſtitutions je remarque d'abord, comme il eſt évident, qu'il ne faudra emploïer que les ſeules fonctions de $x - t\sqrt{c}$; d' où il ſuit que ſi on poſe

$z + \frac{d \cdot zx}{dx} = \varphi(x - t\sqrt{c})$, on aura

$z =$

$$z = \frac{'\varphi(x - t\sqrt{c})}{x} - \frac{''\varphi(x - t\sqrt{c})}{x^2};$$

Je remarque enfuite que, lorfque x a une valeur confidérable, on peut négliger, auprès des termes qui contiennent x feul au dénominateur, tous ceux qui font divifés par des puiffances d' x plus hautes que l' unité; par ce moïen on aura fimplement $z = \frac{'\varphi(x - t\sqrt{c})}{x}$, &

$$Y = -c \frac{\varphi(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c})}{x}, \text{ donc}$$

$$P = -\frac{c\varphi p \times \varphi' p}{p + t\sqrt{c}}; \int P dt = -\sqrt{c}\, l(p + t\sqrt{c}) \times \varphi p \times \varphi' p$$

$$= -\sqrt{c}\, l x \times \varphi(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c});$$

$$Q = -\frac{c\varphi(q - 2t\sqrt{c}) \times \varphi'(q - 2t\sqrt{c})}{q - t\sqrt{c}};$$

d'où l'on tirera par les quadratures la valeur de $\int Q dt$; mais il eft facile de voir que cette valeur fera infiniment petite par rapport à celle de $\int P dt$, à caufe que la fonction φ, & fes différences font toujours infiniment petites, & qu'elles n' ont outre cela des valeurs réelles, que dans une très-petite portion de l' axe; ne prenant donc que la formule $\frac{1}{2\sqrt{c}} \int P dt$, & l' ôtant de $z + \frac{d \cdot xz}{dx}$, favoir de $\varphi(x - t\sqrt{c})$ on aura pour l' augmentation de cette fonction $\frac{1}{2}\, l x \times \varphi(x - t\sqrt{c}) \times \varphi'(x - t\sqrt{c})$; or fi on fuppofe comme on a fait plus haut, que la quantité $\sqrt{c}$ croiffe d' une très-petite quantité α, on trouvera ici $\alpha = -\frac{l x \times \varphi(x - t\sqrt{c})}{2t}$, ce qui changera la fonction $\varphi(x - t\sqrt{c})$ en $\varphi[x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2}\, l x \times \varphi(x - t\sqrt{c})]$. Prenant a pour le rayon de la première onde aérienne excitée par le corps fonore, les loix de la propagation du Son feront donc contenues dans la for-

mule $x - t\sqrt{c} + \frac{1}{2} lx \times \varphi(x - t\sqrt{c}) = a$.

Je crois ſuperflu de m'arrêter ici à examiner les conſéquences de cette formule, car il eſt facile de voir qu'elles ne feront pas plus favorables à la ſuppoſition dont il s'agit, que ne l' ont été celles qu'on a trouvé dans *l' Article précédent*.

COROLLAIRE.

44. Après ce qu' on vient de démontrer je crois qu' on peut regarder comme une vérité aſsès conſtante, que l' hipothèſe des ébranlemens infiniment petits, eſt la ſeule récévable dans la théorie de la propagation du Son, comme nous avions promis de le prouver dans *l' Art.* 10. Je vais donc rentrer dans cette hipothèſe, & chercher à déterminer les lois de la propagation du Son, d'une manière plus générale & plus exacte, que je ne l' ai fait.

§. II.

Eſſai d' une conſtruction générale des trois équations de l' Art. 10.

45. JE multiplie la première de ces équations par L, la ſeconde par M, & la troiſiéme par N (L, M, N étant ſuppoſées des fonctions quelconques de X, Y, Z); j'en fais une ſomme, que je multiplie encore par $dXdYdZ$, & dont je prens l' intégrale, en faiſant varier l' une après l' autre les trois changeantes X, Y, & Z. De cette manière j' aurai l' équation

$$\int \left(\frac{d^2x}{dt^2} L + \frac{d^2y}{dt^2} M + \frac{d^2z}{dt^2} N\right) dXdYdZ =$$

c ſ

$$c \int \left(\frac{d^2x}{dX^2} L + \frac{d^2y}{dXdY} L + \frac{d^2z}{dXdZ} L + \frac{d^2y}{dY^2} M + \frac{d^2x}{dYdX} M \right.$$
$$\left. + \frac{d^2z}{dYdZ} M + \frac{d^2z}{dZ^2} N + \frac{d^2x}{dZdX} N + \frac{d^2y}{dZdY} N \right) dXdYdZ$$

qui renferme le mouvement de chaque point mobile du ſiſtème donné. On remarquera que c eſt miſe içi pour $\frac{2Eh}{T^2D}$, ainſi que nous l'avons pratiqué par tout ailleurs.

En ſuivant notre méthode on prendra autant d'intégrales par parties qu'il en faudra pour faire diſparoître toutes les différences de x, y, z ſuivant X, Y, Z; on aura donc

$$\int \frac{d^2x}{dX^2} L\,dXdYdZ = \int x \frac{d^2L}{dX^2}\, dXdYdZ$$
$$+ \int \left(\frac{dx}{dX} L - x \frac{dL}{dX} \right) dYdZ$$

$$\int \frac{d^2y}{dXdY} L\,dXdYdZ = \int y \frac{d^2L}{dXdY}\, dXdYdZ$$
$$+ \int \frac{dy}{dY} L\,dYdZ - \int y \frac{dL}{dX}\, dXdZ$$

$$\int \frac{d^2z}{dXdZ} L\,dXdYdZ = \int z \frac{d^2L}{dXdZ}\, dXdYdZ$$
$$+ \int \frac{dz}{dZ} L\,dYdZ - \int z \frac{dL}{dX}\, dXdY$$

$$\int \frac{d^2y}{dY^2} M\,dXdYdZ = \int y \frac{d^2M}{dY^2}\, dXdYdZ$$
$$+ \int \left(\frac{dy}{dY} M - y \frac{dM}{dY} \right) dXdZ$$

$$\int \frac{d^2x}{dYdX} M\,dXdYdZ = \int x \frac{d^2M}{dYdX}\, dXdYdZ$$
$$+ \int \frac{dx}{dX} M\,dXdZ - \int x \frac{dM}{dY}\, dYdZ$$

$$\int \frac{d^2z}{dYdZ} M\,dXdYdZ = \int z \frac{d^2M}{dYdZ}\, dXdYdZ$$

 $+ \int (dz$

$$+\int\frac{dz}{dZ}\,M\,dX\,dZ-\int z\,\frac{dM}{dY}\,dX\,dY$$

$$\int\frac{d^2z}{dZ^2}\,N\,dX\,dY\,dZ=\int z\,\frac{d^2N}{dZ^2}\,dX\,dY\,dZ$$

$$+\int\left(\frac{dz}{dZ}\,N-z\,\frac{dN}{dZ}\right)dX\,dY$$

$$\int\frac{d^2x}{dZ\,dX}\,N\,dX\,dY\,dZ=\int x\,\frac{d^2N}{dZ\,dX}\,dX\,dY\,dZ$$

$$+\int\frac{dx}{dX}\,N\,dX\,dY-\int x\,\frac{dN}{dZ}\,dY\,dZ$$

$$\int\frac{d^2y}{dZ\,dY}\,N\,dX\,dY\,dZ=\int y\,\frac{d^2N}{dZ\,dY}\,dX\,dY\,dZ$$

$$+\int\frac{dy}{dY}\,N\,dX\,dY-\int y\,\frac{dN}{dZ}\,dX\,dZ.$$

Dans ces transformées il y a, comme on le voit, deux sortes d'expressions intégrales; les unes plus générales renferment trois intégrations, suivant la variabilité des trois coordonnées X, Y, Z, & expriment par conséquent la somme d'autant de valeurs particulières, qu'il y a de particules dans la masse totale du fluide; les autres, au contraire, moins générales ne renferment chacune que deux intégrations suivant la variabilité de deux des coordonnées X, Y, & Z; & ne dénotent, en conséquence, que la somme d'autant de valeurs particulières qu'il y a de particules dans une seule tranche du fluide. Celles-ci pourront donc être regardées comme des constantes à l'égard de la troisième variable manquante; & l'on sera toujours le maître de les faire évanouir, en donnant certaines limitations aux valeurs des quantités L, M, & N, selon la figure de l'espace, dans lequel on suppose que la masse de l'air est renfermée.

Ainsi, par exemple, si cette figure est celle d'un parallélépipède quelconque, on voit aisément que x est nul dans les deux plans opposés qui sont perpendiculaires à la ligne

ligne X; d'où il suit que les intégrales, qui contiennent x, seront aussi nuls dans toute leur étendue, à cause que ces intégrales ne varient que suivant Y & Z; par une raison semblable on verra, que les intégrales contenant y & z s'évanoüiront aussi d'elles mêmes; donc pour achever de faire évanoüir les autres intégrales, on supposera L tel qu'il devienne $= 0$, lorsque $X = 0$, & lorsque $X = a$ quels que soient Y & Z; ensuite M devra devenir $= 0$, lorsque $Y = 0$, & $Y = b$, X & Z étant quelconques; enfin N devra disparoître de même, en posant $Z = 0$, & $Z = c$, pour toute l'étendue des X & Y; a, b, c étant les trois dimensions du parallélépipéde donné.

Si la masse du fluide avoit une autre figure quelconque, on trouveroit aussi, en aïant égard à cette figure, les conditions qui pourront faire disparoître toutes les expressions intégrales à deux seules changeantes; il est vrai, que le plus souvent ces opérations ne pourront s'exécuter, faute de connoître les valeurs exactes & générales des quantités L, M, & N; mais il suffira de les imaginer exécutées pour démontrer que l'on peut toujours omettre les expressions intégrales dont nous parlons. Ainsi l'on aura simplement après les substitutions

$$\int \left(\frac{d^2x}{dt^2} L + \frac{d^2y}{dt^2} M + \frac{d^2z}{dt^2} N\right) dXdYdZ =$$

$$c\int \left[x\left(\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ}\right) + y\left(\frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dYdX} + \frac{d^2N}{dYdZ}\right) + z\left(\frac{d^2N}{dZ^2} + \frac{d^2L}{dZdX} + \frac{d^2M}{dZdY}\right)\right] dXdYdZ.$$

On fera maintenant

$$\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ} = kL \; \ldots\ldots (A)$$

$$\frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dYdX} + \frac{d^2N}{dYdZ} = kM \; \ldots\ldots (B)$$

Q 2 $\qquad\qquad d^2N$

$$\frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZ\,dX} + \frac{d^2 M}{dZ\,dY} = kN \ldots \ldots (C)$$

Equations, par lesquelles on déterminera les valeurs des quantités L, M, & N. Il faudra de plus que ces valeurs satisfassent aux conditions énoncées ci-dessus; & c'est par là qu'on déterminera toutes les constantes que l'intégration aura entrainé, comme aussi la constante k qui ne pourra manquer d'avoir autant de valeurs différentes qu'il y a des particules mobiles.

Cela fait, notre équation principale pourra se mettre sous la forme ordinaire $\frac{d^2 s}{dt^2} = kcs$, s étant ici $= \int (xL + yM + zN)\, dXdYdZ$; d'où l'on tirera comme dans le Prob. I.

$$s = S \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} + \frac{R}{\sqrt{-ck}} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}$$

$$r = R \operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} - S\sqrt{-ck} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}.$$

Or soit, $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, & $\frac{dz}{dt} = z'$; & que (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') désignent les valeurs de x, y, z, x', y', & z', lorsque $t = 0$, on aura donc

(D) $\ldots\ldots \int [xL + yM + zN]\, dXdYdZ =$
$\operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} \int [(x)\, L + (y)\, M + (z)\, N]\, dXdYdZ$
$+ \frac{\operatorname{fin.} t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int [(x')\, L + (y')\, M + (z')\, N]\, dXdYdZ$

(E) $\ldots\ldots \int [x' L + y' M + z' N]\, dXdYdZ =$
$\operatorname{cof.} t\sqrt{-ck} \int [(x')\, L + (y')\, M + (z')\, N]\, dXdYdZ$
$- \sqrt{-ck} \operatorname{fin.} t\sqrt{-ck} \int [(x)\, L + (y)\, M + (z)\, N]\, dZdYdZ.$

Voilà les équations, d'où l'on tireroit suivant notre méthode les valeurs exactes de x, y, & z, si l'on avoit celles de L, M, & N, & qu'on pût faire disparoître la quantité k, ainsi qu'on l'a fait dans les Prob. préc.

Mais le premier de ces objets, nous présente d'abord des difficultés insurmontables, soit qu'en effet les équations (A),

(A), (B), (C) ne ſoient pas ſuſceptibles d' intégration, ſoit qu'elles demandent d' autres méthodes, que celles que nous connoiſſons. Si on vouloit ſe borner à des conſtructions particulières, il ſeroit aiſé d'en trouver; mais elles ne ſauroient être d'aucune utilité dans la recherche des loix de la propagation du Son.

46. Il eſt viſible, par exemple, qu'on peut ſuppoſer $L = A e^{(pX + qY + rZ) \sqrt{k}}$; $M = B e^{(pX + qX + rZ) \sqrt{k}}$; $N = C e^{(pX + qY + rZ) \sqrt{k}}$; A, B, C, p, q, r étant des conſtantes à déterminer par la ſubſtitution & la comparaiſon des termes; pour cela on trouvera les trois équations

$$A = c\ (Ap^2 + Bpq + Cpr)$$
$$B = c\ (Bq^2 + Apq + Crq)$$
$$C = c\ (Cp^2 + Apr + Bqr),$$

qui donnent, en poſant R pour $\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$, $p = \frac{A}{R\sqrt{c}}$, $q = \frac{B}{R\sqrt{c}}$, $r = \frac{C}{R\sqrt{c}}$; mais les valeurs de L, M, & N n'étant que particulières, on ne pourra s'en ſervir, ſuivant notre méthode, que dans l'hipothèſe que les valeurs de x, y, & z ſoient renfermées dans certaines conditions: car il eſt viſible, que L, M, & N étant exprimées par une même fonction de $pX + qY + qZ$, multipliée ſeulement par des conſtantes différentes, les valeurs de x, y, z devront être les mêmes pour tous les points, dont la poſition eſt renfermée dans la formule $pX + qY + rZ =$ conſt, & de plus ces valeurs devront garder entr'elles un rapport conſtant. Suppoſé que ces conditions aient lieu, on pourra pourſuivre le calcul, en ſubſtituant les valeurs trouvées de L, M, & N dans l'équation (D), & transformant enſuite le terme
$\int [A(x') + B(y') + C(z')]\, e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}}\, dX\,dY\,dZ$ en $-\sqrt{k} \int [pA\int(x')\, dX + qB\int(y')\, dY + rC\int(z')\, dZ]\, e^{(pX + qY + rZ)\sqrt{k}}\, dX\,dY\,dZ$, & réduiſant coſ. $t\sqrt{-ck}$, & ſin. $t\sqrt{-ck}$ en exponentielles imaginaires, on aura

$\int [A$

$$\int [Ax + By + Cz]\, e^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}\, dXdYdZ = \frac{1}{2}\int \left[A(x) + B(y) + C(z) - \frac{1}{\sqrt{c}}\, pA\int(x')\,dX - \frac{1}{\sqrt{c}}\, qB\int(y')\,dY - \frac{1}{\sqrt{c}}\, rC\int(z')\,dZ\right] e^{(pX+qY+rZ+t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dXdYdZ + \frac{1}{2}\int \left[A(x) + B(y) + C(z) + \frac{1}{\sqrt{c}}\, pA\int(x')\,dX + \frac{1}{\sqrt{c}}\, qB\int(y')\,dY + \frac{1}{\sqrt{c}}\, rC\int(z')\,dZ\right] e^{(pX+qY+rZ-t\sqrt{c})\sqrt{k}}\, dXdYdZ.$$

Equation, d' où l'on tirera suivant notre méthode,

$$Ax + By + Cz = \frac{1}{2}\left[A(x) + B(y) + C(z) + \frac{1}{\sqrt{c}}\, pA\int(x')\,dX + \frac{1}{\sqrt{c}}\, qB\int(y')\,dY + \frac{1}{\sqrt{c}}\, rC\int(z')\,dZ\right]^{(pX+qY+rZ+t\sqrt{c})} + \frac{1}{2}\left[A(x) + B(y) + C(z) - \frac{1}{\sqrt{c}}\, pA\int(x')\,dX - \frac{1}{\sqrt{c}}\, qB\int(y')\,dY - \frac{1}{\sqrt{c}}\, rC\int(z')\,dZ\right]^{(pX+qY+rZ-t\sqrt{c})}.$$

Les quantités mises en forme d'exposants denotent, comme dans le Problême I. les valeurs qu'il faut donner aux coordonnées ; ainsi X, Y, Z étant les coordonnées qui répondent à x, y, z & (X), (Y), (Z) étant supposées celles qui répondent aux expressions qui ont l'exposant $pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$, les valeurs de ces dernières devront être telles, que $p(X) + q(Y) + r(Z) = pX + qY + rZ \pm t\sqrt{c}$.

Au reste, si l' on introduit dans cette solution les fonctions indéterminées, elle reviendra au même, que celle que M. Euler a donné dans son Mémoire. Car on aura $Ax + By + Cz = \varphi(pX + qY + rZ + t\sqrt{c}) + \psi(pX + qY + rZ - t\sqrt{c})$; d' où l' on tirera les valeurs de

y &

y & de z en faisant, selon l'hipothèse, $y = fx$, $z = hx$; substituant ensuite ces valeurs dans les équations différentielles de l'*Art.* 10., on trouvera $f = \frac{B}{A}$, & $h = \frac{C}{A}$, conformément aux formules de la *pag.* 7. *ci-dessus*.

Voilà le Problême résolu analitiquement pour une infinité de cas; mais il faut avoüer qu'aucune de ces solutions ne sera applicable à la Théorie de la propagation du Son, dans laquelle les ébranlemens primitifs doivent être supposés quelconques. Il en sera de même de toute autre solution qui se trouvera en intégrant les équations (A), (B), (C) dans des cas particuliers. C'est pourquoi nous rénoncerons pour le présent à déterminer les valeurs exactes de x, y, & z, par les voies ordinaires de notre méthode, & nous nous bournerons à les trouver, s'il est possible, par approximation, en supposant que le tems t soit fort petit; nous verrons ensuite quelles conséquences on pourra tirer d'un tel calcul pour la connoissance de loix de la propagation du Son en général.

47. Je commence par développer l'expression cos. $t\sqrt{-k}$ en poussant la serie jusqu'aux quantités infiniment petites du quatrième ordre; j'ai cos. $t\sqrt{-ck} = 1 + \frac{1}{2} kt^2c + \frac{1}{2.3.4} k^2t^4c^2$; ce qui changera le terme cos. $t\sqrt{-ck}$ $\int [(x)L + (y)M + (z)N]\, dXdYdZ$ de l'équation (D) en

$$\int (x) \times [L + \frac{1}{2} t^2ckL + \frac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2L]\, dXdYdZ$$
$$+ \int (y) \times [M + \frac{1}{2} t^2ckM + \frac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2M]\, dXdYdZ$$
$$+ \int (z) \times [N + \frac{1}{2} t^2ckN + \frac{1}{2.3.4} t^4c^2k^2N]\, dXdYdZ.$$

Or les équations (A), (B), (C) donnent d'abord

kL

$$kL = \frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ};\ kM = \frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dYdX} + \frac{d^2N}{dYdZ};\ kN = \frac{d^2N}{dZ^2} + \frac{d^2L}{dZdX} + \frac{d^2M}{dZdY};$$

multipliant ces équations par k, & ſubſtituant de nouveau au lieu de kL, kM, kN leurs valeurs, on aura enſuite

$$k^2L = \frac{d^4L}{dX^4} + \frac{d^4L}{dX^2dY^2} + \frac{d^4L}{dX^2dZ^2} + \frac{d^4M}{dX^3dY} + \frac{d^4M}{dXdY^3} + \frac{d^4M}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4N}{dX^3dZ} + \frac{d^4N}{dXdZ^3} + \frac{d^4N}{dXdZdY^2};$$

$$k^2M = \frac{d^4M}{dY^4} + \frac{d^4M}{dY^2dX^2} + \frac{d^4M}{dY^2dZ^2} + \frac{d^4L}{dY^3dX} + \frac{d^4L}{dYdX^3} + \frac{d^4L}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4N}{dY^3dZ} + \frac{d^4N}{dYdZ^3} + \frac{d^4N}{dX^2dYdZ};$$

$$k^2N = \frac{d^4N}{dZ^4} + \frac{d^4N}{dZ^2dX^2} + \frac{d^4N}{dZ^2dY^2} + \frac{d^4L}{dZ^3dX} + \frac{d^4L}{dZdX^3} + \frac{d^4L}{dXdY^2dZ} + \frac{d^4M}{dZ^3dY} + \frac{d^4M}{dZdY^3} + \frac{d^4M}{dX^2dYdZ}.$$

Par là, on pourra faire évanoüir la lettre k de l'expreſſion précédente ; car on aura

$$L + \frac{1}{2}t^2ckL + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}t^4c^2k^2L = L + \frac{1}{2}t^2c\left(\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dXdY} + \frac{d^2N}{dXdZ}\right) + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}t^4c^2\left(\frac{d^4L}{dX^4} + \frac{d^4L}{dX^2dY^2} + \frac{d^4L}{dX^2dZ^2} + \frac{d^4M}{dX^3dY} + \frac{d^4M}{dXdY^3} + \frac{d^4M}{dXdYdZ^2} + \frac{d^4N}{dX^3dZ} + \frac{d^4N}{dXdZ^3} + \frac{d^4N}{dXdY^2dZ}\right) \ldots\ldots (F)$$

$M +$

$$M + \frac{1}{2} t^2 c k M + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 M = M + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 M}{dY^2} + \frac{d^2 L}{dY dX} + \frac{d^2 N}{dY dZ} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 M}{dY^4} + \frac{d^4 M}{dY^2 dX^2} + \frac{d^4 M}{dY^2 dZ^2} + \frac{d^4 L}{dY^3 dX} + \frac{d^4 L}{dY dX^3} + \frac{d^4 L}{dX dY dZ^2} + \frac{d^4 N}{dY^3 dZ} + \frac{d^4 N}{dY dZ^3} + \frac{d^4 N}{dX^2 dY dZ} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (G)$$

$$N + \frac{1}{2} t^2 c k N + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 N = N + \frac{1}{2} t^2 c \left(\frac{d^2 N}{dZ^2} + \frac{d^2 L}{dZ dX} + \frac{d^2 M}{dZ dY} \right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 \left(\frac{d^4 N}{dZ^4} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dX^2} + \frac{d^4 N}{dZ^2 dY^2} + \frac{d^4 L}{dX^3 dX} + \frac{d^4 L}{dZ dX^3} + \frac{d^4 L}{dX dY^2 dZ} + \frac{d^4 M}{dZ^3 dY} + \frac{d^4 M}{dZ dY^3} + \frac{d^4 M}{dX^2 dY dZ} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (H)$$

Or, quelles que soient les valeurs des quantités L, M, N, il est certain qu'elles seront des fonctions de X, Y, Z, ce que nous dénoterons ainsi $L^{(X,\,Y,\,Z)}$, $M^{(X,\,Y,\,Z}$, $N^{(X,\,Y,\,Z)}$; de sorte, que si l'on suppose que les variables X, Y, Z deviennent $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$, les valeurs correspondantes de L, M, N s'exprimeront à notre manière par $L^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, $M^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$, $N^{(X+pt\,Y+qt,\,Z+rt)}$. Cela posé, on sait, que si L représente une fonction quelconque de la variable X, laquelle croisse d'une quantité très-petite pt, la valeur de L deviendra, en négligeant les quantités infiniment petites au dessus du quatrième ordre, $L + pt \frac{dL}{dX} + \frac{1}{2} p^2 t^2 \frac{d^2 L}{dX^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} p^3 t^3 \frac{d^3 L}{dX^3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 t^4 \frac{d^4 L}{dX^4}$; donc si on suppose que la fonction L renferme outre la variable X, les variables Y, & Z qui croissent en même tems des quantités très-petites qt, rt, on trouvera par un calcul asses simple

$$L(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt) = L + t\left(p\frac{dL}{dX} + q\frac{dL}{dY} + r\frac{dL}{dZ}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}t^2\left(p\frac{d^2L}{dX^2} + 2pq\frac{d^2L}{dXdY} + q^2\frac{d^2L}{dY^2} + 2pr\frac{d^2L}{dXdZ}\right.$$
$$\left. + 2qr\frac{d^2L}{dYdZ} + r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}t^3\left(p^3\frac{d^3L}{dX^3} + 3p^2q\right.$$
$$\frac{d^3L}{dX^2dY} + 3pq^2\frac{d^3L}{dXdY^2} + q^3\frac{d^3L}{dY^3} + 3p^2r\frac{d^3L}{dX^2dZ}$$
$$+ 3pr^2\frac{d^3L}{dXdZ^2} + 3q^2r\frac{d^3L}{dY^2dZ} + 3qr^2\frac{d^3L}{dYdZ^2} +$$
$$\left. 6pqr\frac{d^3L}{dXdYdZ} + r^3\frac{d^3L}{dZ^3}\right) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}t^4\left(p^4\frac{d^4L}{dX^4}\right.$$
$$+ 4p^3q\frac{d^4L}{dX^3dY} + 6p^2q^2\frac{d^4L}{dX^2dY^2} + 4pq^3\frac{d^4L}{dXdY^3} +$$
$$q^4\frac{d^4L}{dY^4} + 4p^3r\frac{d^4L}{dX^3dZ} + 6p^2r^2\frac{d^4L}{dX^2dZ^2} + 4pr^3$$
$$\frac{d^4L}{dXdZ^3} + 4q^3r\frac{d^4L}{dY^3dZ} + 6q^2r^2\frac{d^4L}{dY^2dZ^2} + 4qr^3$$
$$\frac{d^4L}{dYdZ^3} + 12p^2qr\frac{d^4L}{dX^2dYdZ} + 12pq^2r\frac{d^4L}{dXdY^2dZ}$$
$$\left. + 12pqr\frac{d^4L}{dXdYdZ^2} + r^4\frac{d^4L}{dZ^4}\right).$$

De cette formule je déduis les suivantes

$$\frac{1}{8}L(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt) + \frac{1}{8}L(X+pt,\,Y-qt,\,Z+rt)$$
$$+ \frac{1}{8}L(X+pt,\,Y+qt,\,Z-rt) + \frac{1}{8}L(X+pt,\,Y-qt,\,Z-rt)$$
$$+ \frac{1}{8}L(X-pt,\,Y+qt,\,Z+rt) + \frac{1}{8}L(X-pt,\,Y-qt,\,Z+rt)$$
$$+ \frac{1}{8}L(X-pt,\,Y+qr,\,Z-rt) + \frac{1}{8}L(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)$$
$$= L + \frac{1}{2}t^2\left(p^2\frac{d^2L}{dX^2} + q^2\frac{d^2L}{dY^2} + r^2\frac{d^2L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$$
$$t^4\,(p^4$$

$$t^4 \left(p^4 \frac{d^4 L}{dX^4} + 6 p^2 q^2 \frac{d^4 L}{dX^2 dY^2} + q^4 \frac{d^4 L}{dY^4} + 6 p^2 r^2 \frac{d^4 L}{dX^2 dZ^2} + 6 q^2 r^2 \frac{d^4 L}{dY^2 dZ^2} + r^4 \frac{d^4 L}{dZ^4}\right);$$

$$\frac{1}{4} L(X, Y+qt, Z+rt) + \frac{1}{4} L(X, Y-qt, Z+rt) + \frac{1}{4} L(X, Y+qt, Z-rt) + \frac{1}{4} L(X, Y-qt, Z-rt)$$
$$= L + \frac{1}{2} t^2 \left(q^2 \frac{d^2 L}{dY^2} + r^2 \frac{d^2 L}{dZ^2}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 \left(q^4 \frac{d^4 L}{dY^4} + 6 q^2 r^2 \frac{d^4 L}{dY^2 dZ^2} + r^4 \frac{d^4 L}{dZ^4}\right);$$

$$\frac{1}{8} L(X+pt, Y+qt, Z+rt) + \frac{1}{8} L(X+pt, Y+qt, Z-rt) + \frac{1}{8} L(X-pt, Y-qt, Z+rt) + \frac{1}{8} L(X-pt, Y-qt, Z-rt)$$
$$- \frac{1}{8} L(X+pt, Y-qt, Z+rt) - \frac{1}{8} L(X+pt, Y-qt, Z-rt) - \frac{1}{8} L(X-pt, Y+qt, Z+rt) - \frac{1}{8} L(X-pt, Y+qt, Z-rt)$$
$$= \frac{1}{2} t^2 \times 2pq \frac{d^2 L}{dX dY} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 \left(4 p^3 q \frac{d^4 L}{dX^3 dY} + 4 p q^3 \frac{d^4 L}{dX dY^3} + 12 p q r^2 \frac{d^4 L}{dX dY dZ^2}\right);$$

$$\frac{1}{8} L(X+pt, Y+qt, Z+rt) + \frac{1}{8} L(X+pt, Y-qt, Z+rt) + \frac{1}{8} L(X-pt, Y+qt, Z-rt) + \frac{1}{8} L(X-pt, Y-qt, Z-rt)$$
$$- \frac{1}{8} L(X+pt, Y+qt, Z-rt) - \frac{1}{8} L(X+pt, Y-qt, Z-rt) - \frac{1}{8} L(X-pt, Y+qt, Z+rt) - \frac{1}{8} L(X-pt, Y-qt, Z+rt)$$
$$= \frac{1}{2} t^2 \times 2pr \frac{d^2 L}{dX dZ} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 \left(4 p^3 r \frac{d^4 L}{dX^3 dZ} + \right.$$

 4 p r³

$4 p r^3 \frac{d^4 L}{d X d Z^3} + 12\, p q^2 r \frac{d^4 L}{d X d Y^2 d Z}$).

On formera de pareilles formules à l' égard des expreſſions $M^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)}$, & $N^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)}$, & en donnant des valeurs convenables aux conſtantes indéterminées p, q, r on changera, par les ſubſtitutions, l'équation (F) en celle-ci

$$(L) \ldots\ldots L + \frac{1}{2} t^2 c k L + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 c^2 k^2 L = L^{(X,\, Y,\, Z)}$$

$$- \frac{1}{4} L^{(X,\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4} L^{(X,\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{4} L^{(X,\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4} L^{(X,\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X + t\sqrt{c},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X + t\sqrt{c},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X + t\sqrt{c},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X + t\sqrt{c},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X - t\sqrt{c},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X - t\sqrt{c},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} L^{(X - t\sqrt{c},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} L^{(X - t\sqrt{c},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} M^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} M^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8} M^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8} M^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8} M^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8} M^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8} M^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8} M^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} N^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8} N^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} N^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8} N^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})} - \frac{1}{8} N^{(X+t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z-t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$\frac{1}{8} N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y+t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})} - \frac{1}{8} N^{(X-t\sqrt{\frac{c}{2}},\, Y-t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z+t\sqrt{\frac{c}{2}})};$$

On trouvera de même les transformées (M) & (N) des deux autres équations (G) & (H), & l'on aura ainſi, en ſubſtituant, la transformée entière de la formule coſ. $t\sqrt{-c}\,k$ $\int [\,(x)\,L + (y)\,M + (z)\,N\,]\,dX\,dY\,dZ$, qu'on ſubſtituera enſuite dans l'équation (D).

Suppoſons, pour un moment, que les quantités (x'), (y'), (z') ſoient nulles dans cette équation, la lettre k s'en ira entiérement, & ne ſe trouvera plus que dans les expreſſions des quantités L, M, & N. Or, quoique nous ne conoiſſions point la forme de ces expreſſions, on pourra cependant vérifier l'équation indépendanment de k, comme notre méthode le demande; car pour cela il ne s'agira que de comparer enſemble les quantités qui ſe trouveront multipliées par les fonctions L, M, N qui auront des valeurs égales.

Que (X), (Y), (Z) dénotent les coordonnées qui répondent à l'expreſſion générale $L^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}$, on aura, ſelon notre hipothèſe, $(X) = X + pt$, $(Y) = Y + qt$, $(Z) = Z + rt$; X, Y, Z étant les coordonnées, qui répondent à l'expreſſion L ſimplement, & aux quantités x, y, z, (x), (y), (z). Suppoſons donc que les valeurs de (X), (Y), (Z) ſoient diminuées des quantités pt, qt, rt, (ce qui eſt permis, puiſque ces quantités ſont conſtantes à l'égard des intégrations indiquées dans l'équation) elles deviendront X, Y, Z; mais en même tems les coordonnées correſpondantes à (x), (y), (z), & qui étoient auparavant X, Y, Z, deviendront $X - pt$, $Y - qt$, $Z - rt$. De cette manière toutes les quantités exprimées généralement par $L^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}$, $M^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}$ $N^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}$, redeviendront

dront $L^{(X, Y, Z)}$, $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$, ou ſimplement L, M, N; mais à leur tour les quantités (x), (y), (z), qui les multiplient, ſe changeront en $(x)^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)}$, $(y)^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)}$, $(z)^{(X - pt, Y - qt, Z - rt)}$.

Après ces transformations on joignera enſemble tous les termes de l'équation qui ſe trouvent multipliés par L, M, N, & on décompoſera enſuite cette équation en trois portions, dont chacune devra ſe vérifier ſéparément, & indépendamment des valeurs de L, M, & N. On aura donc par là

(P) . . . . $x = (x)^{(X, Y, Z)}$

$$- \frac{1}{4}(x)^{(X, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4}(x)^{(X, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{4}(x)^{(X, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{4}(x)^{(X, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z, + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(x)^{(X - t\sqrt{c}, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X - t\sqrt{c}, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(x)^{(X - t\sqrt{c}, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X - t\sqrt{c}, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(x)^{(X + t\sqrt{c}, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X + t\sqrt{c}, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(x)^{(X + t\sqrt{c}, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(x)^{(X + t\sqrt{c}, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(y)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} + \frac{1}{8}(y)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(y)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}}} + \frac{1}{8}(y)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8}(y)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8}(y)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$- \frac{1}{8}(y)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})} - \frac{1}{8}(y)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(z)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8}(z)^{(X - t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z - t\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8}(z)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}}, Z + t\sqrt{\frac{c}{2}})} + \frac{1}{8}(z)^{(X + t\sqrt{\frac{c}{2}}, Y + t\sqrt{\text{[illegible]}}, Z + t\sqrt{\text{[illegible]}}}$$

+ —

$$- \frac{1}{8}\,(z)^{\left(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\; Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\; Z + t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)} - \frac{1}{8}\,(z)^{\left(X - t\sqrt{\frac{c}{2}},\; Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\; Z + t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

$$- \frac{1}{8}\,(z)^{\left(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\; Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\; Z - t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)} - \frac{1}{8}\,(z)^{\left(X + t\sqrt{\frac{c}{2}},\; Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\; Z - t\sqrt{\frac{c}{2}}\right)}$$

On aura de même, pour les valeurs de y & de z, deux autres formules que je nommerai (Q) & (R), & que je m'abstiens de rapporter, puisque on peut les déduire de la précédente en changeant simplément, x, (x), X en y, (y), Y pour la formule (Q), & en z, (z), Z pour la formule (R), & réciproquement.

Ce sont là les valeurs de x, y, z dans l'hipothèse que (x'), (y'), &(z') soient nulles. Supposons maintenant que ces quantités aient une valeur, mais qu'en même tems les (x), (y), & (z) soient nulles; il est clair que dans l'équation (D) on aura, à la place du terme $\text{cos}.\, t\sqrt{-ck}$ $\int[(x)L + (y)M + (z)N]\, dX\,dY\,dZ$, l'autre terme $\frac{\text{sin}.\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int[(x')L + (y')M + (z')N]\, dX\,dY\,dZ$;

Or si l'on fait attention que $\text{sin}.\, \frac{\text{sin}.\, t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} = \int \text{cos}.\, t\sqrt{-ck}\,dt$, il ne sera pas difficile d'appercevoir que les expressions de L, M, & N qui se trouveront en faisant disparoître la la lettre k ne seront que les intégrales de celles qu'on a trouvé plus haut, prises en regardant t seul comme variable. Ainsi un terme quelconque de la transformée sera représenté par $\int[(x')\int L^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}\, dt]\, dX\,dY\,dZ$; or il est visible que l'intégration suivant t, dans l'expression $\int L^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}\, dt$, se réduit à trois intégrations, suivant X, Y, Z; d'où il s'ensuit que l'intégrale de $[(x')\int L^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}\, dt]\, dX\,dY\,dZ$ pourra se transformér, par des intégrations par parties, en celle-ci $-\int[L^{(X+pt,\, Y+qt,\, Z+rt)}\int(x')\,dt]\, dX\,dY\,dZ$; qui pourra encore se mettre sous cette autre forme $\int[L^{(X,\, Y,\, Z)}\int(x')^{(X-pt,\, Y-qt,\, Z-rt)}\, dt]\, dX\,dY\,dZ$,

où

où l'intégrale de $(x')^{(X-pt,\, Y-qt,\, Z-rt)}$ devra être priſe en faiſant varier t dans les valeurs $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$ des coordonnées de (x').

Faiſant des obſervations & des réductions ſemblables ſur tous les autres termes, & comparant enſuite les quantités L, M, & N entr'elles, on trouvera pour x, y, z des formules qui ne différeront de celles qu'on a trouvé ci-deſſus, qu'en ce qu'à la place des quantités (x), (y), (z) il y aura les quantités intégrales $\int (x')\, dt$, $\int (y')\, dt$, $\int (z')\, dt$.

Il eſt maintenant facile de voir, en examinant l'équation (D), que les deux ſolutions particulières, qui vienent d'être trouvées, renferment la ſolution générale, & qu'il ne faudra qu'ajouter enſemble les expreſſions trouvées de x, y, z dans les cas, où (x'), (y'), (z'), ou (x), (y), (z) ſont nulles, pour avoir les expreſſions completes pour le cas où ces quantités ſont toutes réelles.

De plus, comme l'équation (E) n'eſt que la différentielle de l'équation (D) priſe en variant t ſeul, on aura tout d'un coup les valeurs de viteſſes, en différentiant les formules qu'on vient de trouver pour les valeurs des eſpaces x, y, z; il viendra donc

$$(P') \quad \ldots\ldots\ldots \quad x' = (x')^{(X,\, Y,\, Z)}$$
$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$- \frac{1}{4}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X,\, Y + t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z + t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+ \frac{1}{8}\left[(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\right]^{(X - t\sqrt{c},\, Y - t\sqrt{\frac{c}{6}},\, Z - t\sqrt{\frac{c}{6}})}$$

$$+ \frac{1}{8}$$

$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{c},\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{c},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{c},\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}};\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{c},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{c},\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{c},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{c};\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}};\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}};\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$-\frac{1}{8}\left[(y')+\frac{d\cdot(y)}{dt}\right]_{(X+\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Z+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d\cdot(z)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y-\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}})}$$
$$+\frac{1}{8}\left[(z')+\frac{d\cdot(z)}{dt}\right]_{(X-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}},\,Y+\epsilon\sqrt{\frac{c}{6}},\,Z-\epsilon\sqrt{\frac{c}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{e}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{e}{4}},\, Z + t\sqrt{\frac{e}{2}})}$$

$$+ \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{e}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{e}{4}},\, Z + t\sqrt{\frac{e}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right]^{(X - t\sqrt{\frac{e}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{e}{4}},\, Z + t\sqrt{\frac{e}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right]^{(X - t\sqrt{\frac{e}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{e}{4}},\, Z + t\sqrt{\frac{e}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} \left[(\zeta') + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{e}{2}},\, Y - t\sqrt{\frac{e}{4}},\, Z - t\sqrt{\frac{e}{2}})}$$

$$- \frac{1}{8} \left[(\zeta) + \frac{d \cdot (\zeta)}{dt} \right]^{(X + t\sqrt{\frac{e}{2}},\, Y + t\sqrt{\frac{e}{4}},\, Z - t\sqrt{\frac{e}{2}})}.$$

Les valeurs de y' & de ζ' se trouveront de même en substituant dans cette formule à la place de x', (x), (x'), X, leurs correspondantes y', (y), (y'), Y, ou ζ', (ζ), (ζ'), Z, & réciproquement.

48. Voila des formules très-générales, par lesquelles, connoissant dans un instant quelconque le mouvement de toutes les parties du fluide, on pourra déterminer à très-peu-près leur mouvement dans les instans suivans, au moins pendant un intervalle de tems fort court. Or, si après ce tems on recommence le calcul, en substituant à la place de (x), (y), (ζ), (x'), (y'), (ζ') les valeurs trouvées de x, y, ζ, x', y', ζ', on en tirera des nouvelles valeurs de x, y, ζ, x', y', ζ' qui serviront pour un second intervalle de tems égal au premier; & opérant ainsi de suite on pourra trouver les mouvemens du fluide par tel espace de tems qu'on voudra; mais il faut avoüer que cette méthode ne sera guere pratiquable pour un tems assès long; car, nos formules n'étant qu'approchées, l'inexactitude de chaque résultat influira nécessairement sur tous les résultats suivans, & par conséquent, plus le nombre des opérations sera grand, plus aussi on risquera de s'éloigner de la vérité.

Consé-

Conséquences qui résultent des formules précédentes par rapport à la propagation du Son.

49. Imaginons d'abord qu'un corps sonore n'ébranle qu'une seule particule d'air, dont la position soit déterminée par les coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, & voïons comment & par quels dégrès cet ébranlement unique se propagera au loin dans toute la masse de l'air pendant un tems quelconque t fort court.

Il est d'abord évident que dans les équations (P), (Q), (R), (P'), (Q'), (R') il faudra regarder comme nulles toutes les quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), qui auront un autre exposant que $([X]$, $[Y]$, $[Z])$; or soit en général l'exposant de chacune de ces quantités exprimé par $(X - pt, Y - qt, Z - rt)$, il suit de ce qu'on vient de dire, que les valeurs de x, y, z, x', y', z' seront aussi nulles pour toutes les particules, dont la position ne sera point déterminée par des coordonnées X, Y, Z, telles que $X - pt = [X]$, $Y - pt = [Y]$, $Z - qt = [Z]$, savoir que $X = [X] + pt$, $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$; si donc on donne successivément à p, q, r, toutes leurs valeurs particuliéres conformément à nos formules, on aura autant de valeurs de X, Y, Z, qui détermineront la position de toutes les particules de l'air qui auront quelque mouvement au bout du tems t.

Supposons p, q, r donnés, & faisons varier t; il est clair que les coordonnées X, Y, Z seront à une ligne droite qui passera par le point, auquel répondent les coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, & qui fera avec les lignes X, Y, Z des angles dont les cosinus seront $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$; d'où il s'ensuit qu'en donnant à p, q, r des valeurs différentes,

 on

on aura auſſi des droites de différente poſition, mais qui s'entrecouperont toutes dans un même point, & qu'on pourra par conſéquent regarder comme autant de rayons ſonores, excités par l'ébranlement donné de la particule qui eſt à leur centre.

Ces rayons croîtront uniformément avec le tems, de ſorte qu'au bout d'un tems quelconque t leur longueur ſera généralement exprimée par $t\sqrt{c\,(p^2 + q^2 + r^2)}$; l'on aura donc, pour la viteſſe de la propagation du Son dans chacun d'eux, la formule $\sqrt{c\,(p^2 + q^2 + r^2)}$, dont la valeur ſe connoîtra en ſubſtituant au lieu de p, q, r leurs valeurs particuliéres. Par ces ſubſtitutions on aura les trois quantités ſuivantes, $\sqrt{c\,(\frac{1}{6} + \frac{1}{6})} = \sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{c\,(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6})} = 2\sqrt{\frac{c}{3}}$, $\sqrt{c\,(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6})} = \sqrt{\frac{5c}{6}}$; qui conſtitueront pour ainſi dire autant d'eſpèces différentes de rayons ſonores.

C'eſt une choſe digne de remarque que la plus grande viteſſe $2\sqrt{\frac{c}{3}}$ approche beaucoup de celle qu'on trouve par l'expérience; car $\sqrt{c}$ étant environ $= 979$ piés, & $c = 958441$, on aura $\sqrt{\frac{c}{3}} = 565$, & par conſéquent $2\sqrt{\frac{c}{3}} = 1130$, qui eſt à très-peu-près le nombre de pieds que le Son parcourt dans une ſeconde, ſelon les expériences moïennes. Cependant il ne paroit pas que ce réſultat ſoit encore capable de mettre la Théorie d'accord avec l'expérience ſur la viteſſe de la propagation du Son. Voici les raiſons qui m'oblige à ſuſpendre mon jugement la-deſſus. 1° Nos formules ne ſont qu'approchées, & ne peuvent avoir lieu que pendant un tems aſsès court, après lequel chaque particule mobile doit être regardée, comme un nouveau centre de rayons ſonores; 2° La poſition de chaque rayon n'eſt pas fixe, puiſque elle dépand de celles des trois axes principaux, laquelle eſt abſolument arbitraire; d'où il ſuit qu'en changeant la poſition des axes, les rayons qui avoient auparavant une viteſſe donnée,

pourront

pourront prendre la place de ceux qui avoient des vitesses différentes ; ce qui paroit renfermer une espèce de contradiction, puisque une même particule de fluide pourroit en ce cas avoir ou ne pas avoir du mouvement. Cet inconvénient, qui vient sans doute de ce que nos formules ne renferment pas tous les termes nécessaires, sera aussi attaché à toutes les autres formules qu'on trouvera par approximation ; d'où il résulte que, jusqu'à ce qu'on ait trouvé des formules tout-à-fait exactes & rigoureuses, on ne sera pas en état de prononcer sur le point dont il s'agit ; 3° Nous avons trouvé dans les deux hypothèses du *Chap.* III. la vitesse du Son $= \sqrt{c}$; & cette même valeur peut se trouver aussi par les formules de ce *Chap.* en considérant la plus grande vitesse des rayons estimée suivant la direction de chacun des trois axes ; ce qui paroit mieux quadrer avec la nature particuliére de ces formules.

50. Nous n'avons encore considéré que l'effet qui résulte de l'ébranlement d'une seule particule d'air ; supposons maintenant, que tant des particules qu'on voudra soient ébranlées d'une maniére quelconque dans le premier instant du tems t ; on trouvera, en raisonnant sur nos formules de la même maniére qu'on a fait ci-dessus, que chacun des ébranlemens primitifs, excitera dans le fluide environnant les mêmes rayons sonores, que s'il étoit seul ; de sorte que les particules d'air qui se trouveront dans la rencontre de plusieurs rayons auront un mouvement composé de tous les mouvemens, qui dépandront de chaque ondulation particuliére. C'est ce qui nous fournit une explication complete & rigoureuse de la maniére, dont plusieurs sons différens peuvent coéxister & se repandre dans une même masse d'air, sans se nuire mutuellement les uns aux autres. *Voïés l'Art.* 63. *des Réch. préc.*

Au reste, comme chaque particule d'air ébranlée devient elle

elle même un centre de rayons sonores, il est évident que le Son doit se repandre également en tous sens; ce qui est aussi un des principaux phénomènes de sa propagation.

51. Quoique il ne soit pas nécessaire de connoître la nature particuliére de chaque ébranlement, il est cependant bon de faire attention à la différence qui se trouve entre les ébranlemens primitifs & dérivatifs, par rapport à leur propagation. Supposons pour cela qu'aïant déduit de nos formules les valeurs de x, y, z, &c. pour un tems quelconque désigné par (t), on les substitue dans les mêmes formules à la place de (x), (y), (z) &c. pour trouver les valeurs correspondantes de x, y, z &c. pour un second intervalle, de tems marqué par t; & soit par exemple $\alpha\,[\,(x) + \int (x')\,dt\,]^{(X + p(t),\, Y + q(t),\, Z + r(t))}$ un terme quelconque de la valeur de x, &c.

$$\alpha\,[\,(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\,]^{(X + p(t),\, Y + q(t),\, Z + r(t))}$$ le terme correspondant de la valeur de x', lesquels doivent être substitués au lieu de (x), & de (x') dans les termes de la forme de $\alpha\,[\,(x) + \int (x')\,dt\,]^{(X + pt,\, + Yqt,\, Z + rt)}$ pour la valeur de x, & dans ceux de la forme de

$$\alpha\,[\,(x') + \frac{d\,(x)}{dt}\,]^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)}$$ pour la valeur de x'. On remarquera d'abord que dans nos formules un terme quelconque, dont l'exposant est $(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)$ est toujours accompagné d'un autre terme exprimé de la même maniére, mais avec l'exposant $(X - pt,\, Y - qt,\, Z - rt)$; on fait de plus, par ce qui a été dit ci-dessus que les termes

$$[\,(x) + \int (x')\,dt\,]^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)},$$
$$[\,(x') + \frac{d\cdot(x)}{dt}\,]^{(X + pt,\, Y + qt,\, Z + rt)}$$

marquent la propagation des ébranlemens (x), (x') suivant

vant une ligne qui fait, avec les trois axes principaux des angles, dont les cofinus font $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, $\frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$, d'où il s'enfuit que les termes

$$[(x)+\int(x')\,dt]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)},$$

$$[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$$ dénoteront

la propagation des mêmes ébranlemens (x), & (x') dans la même ligne prolongée du côté oppofé. Or, cela pofé, je dis, que fi Cc (*fig.* 12.) repréfente un rayon de la propagation d'un ébranlement primitif excité en C, la propagation de l'ébranlement dérivatif qui eft en c fera nulle fuivant la direction cC oppofée à celle de fon ébranlement primitif. Pour le prouver, il n'y a qu'à faire voir qu'en fubftituant

$$\alpha[(x)+\int(x')\,dt]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$$ au lieu de (x)

& $$\alpha[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$$ au lieu de (x')

dans les termes

$$[(x)+\int(x')\,dt]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$$

$$[(x')+\frac{d\cdot(x)}{dt}]^{(X-pt,\,Y-qt,\,Z-rt)}$$ ces termes

deviendront nuls. Or, comme dans les expofans $X-pt$, $Y-qt$, $Z-rt$, le tems t eft négatif par rapport aux coordonnées X, Y, Z, il eft vifible, que l'intégrale $\int(x)\,dt$, & la différentielle $\frac{d\cdot(x)}{dt}$ feront auffi néceffairement négatives; d'où l'on aura par la fubftitution $[(x)-\int(x')\,dt]=\alpha[(x)+\int(x')\,dt-\int(x')\,dt-(x)]$ $=0$, & de même $[(x')-\frac{d\cdot(x)}{dt}]=\alpha[(x)+\frac{d\cdot(x)}{dt}-\frac{d\cdot(x)}{dt}-x']=0$, donc &c.

Au reste la remarque que nous venons de faire sur les formules générales de ce Chap., est entiérement analogue à celle qu'on a déja fait sur les formules particuliéres du Chap. III. dans l'art. 16., remarque dont nous sommes rédévables à M. Euler, & qui est d'une grande importance dans la Théorie de la propagation du Son.

52. Il ne nous reste plus qu'à examiner le changement qui doit arriver aux rayons sonores par la rencontre d'un obstacle quelconque, qui s'oppose entiérement, ou en partie au mouvement des particules contigues de l'air. Pour cela il n'y a qu'à chercher quelle devra être la position d'une particule mobile quelconque, lorsque les coordonnées $X = [X] + pt$; $Y = [Y] + qt$, $Z = [Z] + rt$ tomberont au delà de l'obstacle immobile. Or en examinant les calculs de *l'Art.* 47. on voit que les valeurs des X, Y, Z pour une particule quelconque mobile sont les mêmes que celles qui constituent les fonctions $L^{(X, Y, Z)}$, $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$; donc tout se réduit à examiner la nature de ces fonctions, & à voir de quelle maniére il faudra les transformer, afin que les quantités X, Y, Z ne surpassent jamais des valeurs données.

Imaginons donc que la masse de l'air soit interrompuë de quelque côté, & comme terminée par une espèce de parois immobile de figure donnée; il est constant par ce qui a été enseigné dans *l'Art.* 45. que les expressions intégrales à deux seules changeantes, que nous avons traité comme nulles dans *l'Art. cité*, devront disparoître par elles mêmes, en tant qu'elles se rapporteront à un point quelconque de la figure proposée. Rapellons-nous ces expressions négligées dans les calculs précédens, & considérons d'abord celles qui ont le signe —; je dis que leur somme est toujours évanoüissante, quelle que soit la figure à quelle il faille les rapporter. Pour le prouver ajoutons-les ensemble; on aura

$\int(dL$

$\int(\frac{dL}{dX}+\frac{dM}{dY}+\frac{dN}{dZ})\times(x\,dYdZ+y\,dYdZ+z\,dXdY)$.
Or soit le rapport entre les trois coordonnées X, Y, Z exprimé par l'équation $dZ = PdX + QdY$; il est aisé de prouver qu'on peut ramener tous les termes de l'expression précédente à la variabilité des seules coordonnées X, Y, en substituant au lieu de dZ, PdX dans le produit $dYdZ$, & QdY dans le produit $dXdZ$; d'où l'on aura la transformée $\int(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dY}+\frac{dN}{dZ})\times(xP+yQ+z)$ $dXdY$ qu'il faudra maintenant intégrer en faisant varier X & Y l'une après l'autre. Mais x, y, z dénotant les espaces parcourus par une même particule suivant les directions des trois coordonnées X, Y, Z, il n'est pas difficile de voir que $\frac{xP+yQ+z}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ dénotera l'espace que cette même particule décrira suivant une direction perpendiculaire à la surface dont l'équation est $dZ = PdX + QdX$; or il est clair, que dans notre cas, cet espace doit être nul, puisque le mouvement est entiérement arrêté suivant la direction perpendiculaire à chaque point de la paroi immobile; donc on aura $\frac{xP+yQ+z}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}} = 0$; & par conséquent $xP + yQ + z = 0$.

Joignant ensemble les autres formules qui ont le signe $+$; on aura l'expression $\int(\frac{dx}{dX}+\frac{dY}{dY}+\frac{dZ}{dZ})\times(LdYdZ + MdXdZ + NdXdY)$ qui doit aussi être $= 0$, en tant qu'elle se rapporte à chacun des points de la surface exprimée par $dZ = PdX + QdY$. Or le facteur $LdYdZ + MdXdZ + NdXdY$ se réduira, de la même façon que ci-dessus, à $(LP + MQ + N)\,dXdY$, d'où l'on tirera l'équation $LP + MQ + N = 0$, qui devra avoir lieu pour tous les points de la surface proposée; & cette équa-

 tion-

tion renfermera en général les conditions que doivent avoir les valeurs de L, M, N. (*Voïés ci-dessus art.* 45.).

Supposons maintenant, pour simplifier les choses, $P = 0$ & $Q = 0$, de sorte que la paroi immobile soit un plan perpendiculaire à l'axe des Z; l'équation trouvée se réduira à $N = 0$; ou bien, si on veut que le plan donné soit perpendiculaire à l'axe des X, & que sa distance au point de l'origine des abscisses soit $= a$, on aura $L = 0$, X étant $= a$, & Y & Z étant quelconques; ce qui s'exprimera à notre maniére par $L^{(a, Y, Z)} = 0$. Or, si dans l'expression générale $L^{(X, Y, Z)}$ on suppose que X surpasse a d'une quantité infiniment petite u, de sorte que $X = a + u$, on aura $L^{(X, Y, Z)} = L^{(a+u, Y, Z)} = L^{(a, Y, Z)} + u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$ à très-peu-près, $= u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; de même, si on suppose u négative, on aura $L^{(a-u, Y, Z)} = -u \frac{d \cdot L^{(a, Y, Z)}}{dX}$; d'où je tire $L^{(a-u, Y, Z)} = -L^{(a-u, Y, Z)}$; & remettant pour u sa valeur $X - a$, $L^{(X, Y, Z)} = -L^{(2a-X, Y, Z)}$.

Maintenant, comme les fonctions $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$ doivent avoir un certain rapport avec la fonction $L^{(X, Y, Z)}$, en vertu des équations (A), (B), (C), il est clair que la même condition de $L^{(a, Y, Z)} = 0$ servira aussi à trouver les transformations qui conviennent aux fonctions M & N, lorsque X est supposé plus grand que a; pour y parvenir je reprens les équations mentionnées, & comparant la premiére, différentiée suivant la variable Y & divisée par dY, à la seconde, différentiée suivant la variable X & divisée par dX, je trouve $\frac{dL}{dY} = \frac{dM}{dX}$; & de même comparant la premiére, différentiée suivant Z, & divisée par dZ à la troisiéme, différentiée suivant X, & divisée par dX, j'ai

$\frac{dL}{dZ}$

$\frac{dL}{dZ} = \frac{dN}{dX}$; posons dans ces deux équations $X = a$, de sorte que $\frac{dL^{(a, Y, Z)}}{dY} = \frac{dM^{(a, Y, Z)}}{dX}$, & $\frac{dL^{(a, Y, Z)}}{dZ} = \frac{dN^{(a, Y, Z)}}{dX}$;

or aiant en général $L^{(a, Y, Z)} = o$, on aura aussi $\frac{dL^{(a, Y, Z)}}{dY} = o$, & $\frac{dL^{(a, Y, Z)}}{dZ} = o$; donc, $\frac{dM^{(a, Y, Z)}}{dX} = o$, & $\frac{dN^{(a, Y, Z)}}{dX} = o$;

Supposons maintenant dans les fonctions indéterminées $M^{(X, Y, Z)}$, $N^{(X, Y, Z)}$, $X = a + u$, & développons-les, en poussant les series jusqu'aux infinimens petits du second ordre; on aura $M^{(a+u, Y, Z)} = M^{(a, Y, Z)} + u \frac{d \cdot M^{(a, Y, Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2} \frac{d^2 \cdot M^{(a, Y, Z)}}{dX^2}$, & $N^{(a+u, Y, Z)} = N^{(a, Y, Z)} + u \frac{d \cdot N^{(a, Y, Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2} \frac{d^2 N^{(a, Y, Z)}}{dX^2}$; & de même, en prenant u négativement, $M^{(a-u, Y, Z)} = M^{(a, Y, Z)} - u \frac{dM^{(a, Y, Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2} \frac{d^2 M^{(a, Y, Z)}}{dX^2}$, & $N^{(a-u, Y, Z)} = N^{(a, Y, Z)} - u \frac{d \cdot N^{(a, Y, Z)}}{dX} + \frac{u^2}{2} \frac{d^2 N^{(a, Y, Z)}}{dX^2}$; d'où l'on déduit, à cause de $\frac{dM^{(a, Y, Z)}}{dX} = o$, & $\frac{dN^{(a, Y, Z)}}{dX} = o$ par hipothèse, $M^{(a+u, Y, Z)} = M^{(a-u, Y, Z)}$, & $N^{(a+u, Y, Z)} = N^{(a-u, Y, Z)}$, ou bien, restituant pour u sa valeur $X - a$,

$$M^{(X, Y, Z)} = M^{(2a - X, Y, Z)}$$
$$N^{(X, Y, Z)} = N^{(2a - X, Y, Z)}$$

Soient reprises maintenant les formules (D), (E), & supposant que X surpasse a d'une quantité infiniment petite, on commencera par changer l'expression $L^{(X, Y, Z)}$ des termes xL, $x'L$, ou ce qui est la même chose, des termes $xL^{(X, Y, Z)}$, $x'L^{(X, Y, Z)}$ en $-L^{(2a - X, Y, Z)}$, lorsque

X deviendra plus grand que a, & l'on aura par conséquent ces termes transformés en $-x\,L^{(2a-X,\,Y,\,Z)}$, $-x'\,L^{(2a-X,Y,Z)}$, sur lesquels on opérera comme auparavant, pour en tirer les valeurs de x & x'. Or, puisque les coordonnées qui répondent à x & x' sont les mêmes, que celles qui entrent dans l'expression de L, il est clair que, sans autre opération, il suffira de changer la valeur X de l'abscisse de x & x' en $2a - X$, en rendant en même tems ces quantités x & x' négatives. On changera de même les expressions $M^{(X,\,Y,\,Z)}$, $N^{(X,\,Y,\,Z)}$ qui entrent dans les termes My, My', & Nz, Nz' des mêmes formules (D), (E), en $M^{(2a-X,\,Y,\,Z)}$ & $N^{(2a-X,\,Y,\,Z)}$, & par un raisonnement semblable au précédent, on trouvera que l'abscisse X en tant qu'elle répond aux autres quantités y, y', z, z' deviendra de même $2a - X$, mais sans que la valeur de ces quantités soit changée.

On conclura donc pour notre cas, que, lorsque le tems t sera tel, que l'abscisse $[X] + pt$ surpassera a, il faudra mettre à sa place l'abscisse $2a - [X] - pt$, & faire en même tems l'espace x négatif, laissant les mêmes les deux coordonnées $[Y] + pt$, & $[Z] + qt$, & les deux autres espaces y, z.

Voici maintenant le changement qu'il en résultera dans les rayons sonores. Que CA (*fig.* 13.) représente l'axe des X, qui est le même que celui des $[X]$, & qui rencontre perpendiculairement le plan inébranlable AB; que C soit un centre de rayons sonores déterminé par les trois coordonnées $[X]$, $[Y]$, $[Z]$; & que CD soit un de ces rayons quelconque déterminé par les coordonnées $[X] + pt$, $[Y] + qt$, $[Z] + rt$. Supposons maintenant que t soit augmenté en sorte, que $[X] + pt$ surpasse a, c'est-à-dire que pt surpasse CA, & soit par exemple $= CA'$; le point A' tombant derriére l'obstacle immobile AB; il faudra, suivant ce que nous venons d'enseigner, changer

ger la valeur de $[X] + pt$ en $2a - [X] - pt$; ce qui donnera, en ſuppoſant $CA = \alpha$ & par conſéquent $a = [X] + \alpha$, $[X] + 2\alpha - pt$ au lieu de $[X] + pt$; ou bien, poſant $AA' = \theta$ & par conſéquent $pt = \alpha + \theta$, $[X] + \alpha - \theta$ au lieu de $[X] + pt$, ſavoir de $[X] + \alpha + \theta$; d'où l'on voit que le point A' ſera tranſporté en $'A$, les diſtances AA' & $A'A$ au plan AB étant égales de part & d'autre; donc, comme les deux autres coordonnées perpendiculaires à l'axe CA demeurent les mêmes, le rayon CD ſera continué du côté CA dans la direction de la droite DE, dont la poſition devra être telle qu'elle ſe trouve dans le plan des deux lignes CD, CA, & qu'elle faſſe de plus avec le plan BA l'angle BDE égal à l'angle CDA. Le rayon CD ſera donc réfléchi par le plan BA; en ſorte que l'angle de réflexion ſoit égal à l'angle d'incidence, tout de même que il arrive à un corps parfaitement élaſtique.

Voilà donc la réflexion du Son, déduite de ſes vrais principes, & prouvée d'une maniére rigoureuſe & exacte, ce que perſonne n'avoit encore fait. *Voïés ce que j'ai dit ſur ce ſujet Art. 61. des Rech. préc.*

Au reſte, ſi nous n'avons conſidéré qu'une ſurface plane, ce n'a été que pour rendre notre calcul moins embarraſſant; car il n'auroit pas été difficile de l'appliquer auſſi à des ſurfaces courbes d'une nature quelconque; mais, comme les rayons ſonores ſe multiplient continuellement, & ſe repandent en tout ſens, comme on l'a fait voir (*Art.* 50.), il ſeroit aſsés inutile de déterminer les loix de la réflexion de chaque rayon à la rencontre d'un obſtacle de figure quelconque. Il ſuffit pour l'explication des *Echos*, d'avoir prouvé que cette réflexion doit toujours avoir lieu, lorſque l'air eſt appuïé ſur un obſtacle quelconque inébranlable.

SCOLIE

SCOLIE I.

33. Il eſt viſible que, dans les formules (P), (Q), (R), (P'), (Q'), (R'), on peut regarder les expreſſions $(x)^{(X+pt,\,Y+qt,\,Z+rt)}$ &c. comme des fonctions indéterminées de $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$; de ſorte qu'en ſubſtituant pour (x), (x'), (y), (y'), (z), (z') des fonctions de différente nature, & compoſées des mêmes variables qui conſtituent l'expoſant de chacune des quantités (x), (x') &c., on aura les valeurs de x, x', y &c. données en fonctions indéterminées, ainſi que M. D'Alembert l'a pratiqué le premier dans la Théorie des vibrations des cordes, & ailleurs.

Au reſte pour démontrer que ces valeurs de x, y, z ſatisfont aux trois équations de *l'Art.* 10., il faudra néceſſairement regarder t comme infiniment petit, & développer les fonctions indéterminées comme on l'a pratiqué à l'égard des fonctions L, M, N (*Art.* 47. *ci-deſſus*), en négligeant tous les termes qui feront multipliés par des puiſſances de t plus hautes que la quatriéme.

SCOLIE II.

34. Si on vouloit ſe borner à chercher les valeurs de x, y, z par les ſeries, on y parviendroit fort aiſément par les principes de *l'Art.* 47. Car développant en ſuites infinies les expreſſions coſ. $t\sqrt{-ck}$, & ſin. $t\sqrt{-ck}$ de l'équation (D), & faiſant enſuite évanoüir toutes les puiſſances de k, par les transformations enſeignées dans le même *Art.*, on obtiendra une équation qui ne renfermera que les fonctions inconnues L, M, N avec leurs différences; or ces différences pourront toujours ſe réduire aux quantités finies L, M, N par les opérations connues des inté-

grations

grations par parties. Car, soit par exemple $\frac{1}{2} t^2 c \int (x) \frac{d^2 L}{dX^2}$ $dXdYdZ$ un terme quelconque de l'équation (D), transformée comme nous venons de la dire, ce terme se réduira, en négligeant toujours les intégrales à deux seules changeantes, à $\frac{1}{2} t^2 c \int \frac{d^2 (x)}{dX^2} L \, dXdYdZ$, & généralement il suffira d'ôter les différentiations aux quantités L, M, N, & de les appliquer aux quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z'), par lesquelles celles-là sont multipliées. Cela fait, comme l'équation ne renfermera plus que les fonctions finies L, M, N, qui, à cause de la quantité k qu'elles contiennent, ne doivent point entrer dans les valeurs de x, y, z, on trouvera ces valeurs, en comparant ensemble tous les termes qui seront multipliés séparément par L, M, N. On aura donc par là

$$x = (x) + t\,(x') + \frac{1}{2} t^2 c \left[\frac{d^2 (x)}{dX^2} + \frac{d^2 (y)}{dXdY} + \frac{d^2 (z)}{dXdZ} \right] + \&c.$$
$$y = (y) + t\,(y') + \quad \&c.$$
$$z = (z) + t\,(z') + \quad \&c.$$

où les quantités (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') devront être regardées comme des fonctions indéterminées des trois variables X, Y, Z, pour qu'on puisse avoir les valeurs des différences $\frac{d^2 (x)}{dX^2}$, $\frac{d^2 (y)}{dXdY}$ &c. Or dans le cas où t est supposé infiniment petit, si on néglige les termes multipliés par des puissances de t plus hautes que la quatrième, & qu'on pratique ensuite sur les fonctions (x), (y), &c. des réductions analogues à celles qui ont été pratiquées sur les fonctions L, M, N dans le calcul de l'*Art.* 47., il sera aisé de réduire les expressions de x, y, z à des fonctions de $X + pt$, $Y + qt$, $Z + rt$, comme dans le Scolie précédent, ce qui sera une preuve de la justesse de nos calculs.

Au

Au reste la méthode, que nous n'avons fait qu'indiquer dans ce Scolie, est générale & peut aussi être appliquée à la résolution d'une infinité d'autres équations de la nature de celles que nous avons examiné dans tout le cours des Recherches précédentes. Mais on trouvera toujours des series composées de puissances croissantes de t, & qui, par conséquent, ne seront bonnes que tant t aura des valeurs fort-petites.

§. III.

Conjectures sur la loi de l'élasticité des particules de l'air.

55. Nous avons vu que la vitesse du Son, suivant la Théorie, est exprimée par $\sqrt{c} = \frac{\sqrt{2hE}}{T^2 D}$, & nous avons vu aussi qu'elle différe de la véritable d'environ 163 pieds par seconde, quantité qui ne peut raisonnablement être négligée; comment donc concilier sur ce point la Théorie & l'Expérience?

L'expression $\frac{\sqrt{2hE}}{T^2 D}$ est fondée sur l'hypothèse ordinaire que l'élasticité des parties de l'air soit exactement proportionnelle à leur densité; mais ne pourroit-on pas supposer que l'élasticité variât dans uue autre raison peu différente de celle de la densité simple. Si on vouloit en général supposer E proportionel à φD, comme dans *l'Art.* 11., il n'y auroit qu'à mettre dans nos calculs $E \varphi' D$ au lieu de E tout le reste demeurant le même; ce qui ne produiroit d'autre différence dans les résultats, si non que la vitesse du Son seroit augmentée dans la raison de $\sqrt{\varphi' D} : 1$.

Soit l'élasticité proportionnelle à une puissance quelconque m de la densité, ce qui paroit le cas le plus naturel; on

on aura $\varphi D = D^m$ & $\varphi' D = m D^{m-1}$; d'où, en posant $D = 1$, l'on tire la viteſſe du Son $= \sqrt{m} \times \sqrt{c} = 979 \sqrt{m}$ piés par ſeconde; par conſéquent, en prenant 1142 piés par ſeconde pour l' expreſſion véritable de cette viteſſe, il faudra que $979 \sqrt{m} = 1142$, ce qui donnera $\sqrt{m} = \frac{1142}{979}$ & $m = 1 \cdot 3' 6''$ en fractions décimales, ou $m = 1 + \frac{1}{3}$ à très-peu-près. Or, comme l' élaſticité ſe meſure par le poid comprimant, il eſt clair que ſi cette hypothèſe a lieu dans la nature, il faudra que la denſité devenant double, triple, quadruple &c., les poids comprimans croiſſent comme les nombres $2\sqrt[3]{2}$, $3\sqrt[3]{3}$, $4\sqrt[3]{4}$ &c. qui ſurpaſſent les nombres de la progreſſion aritméthique 2, 3, 4 &c. d' environ $\frac{518}{1000}$, $1\frac{326}{1000}$, $1\frac{848}{1000}$.

Ces différences paroiſſent à la vérité trop fortes, pour qu'on puiſſe raiſonablement ſuppoſer qu'elles ayent échappées aux ſavans Phiſiciens, qui ont déterminé par l' expérience les loix de la compreſſion de l'air; auſſi je ne donne l' hypothèſe de l' élaſticité proportionelle à $D^{1 + \frac{1}{3}}$, que comme une légére conjecture, & je me contenterai ſeulement de faire obſerver, que l'expérience même paroit juſqu'à un certain point favorable à la ſuppoſition, que l'élaſticité croiſſe dans une raiſon plus grande que la denſité; puiſque on ſait que de très-habiles Phiſiciens ont trouvé que, lorſque la denſité eſt devenue quadruple de la naturelle, l'air ne ſe comprime plus que ſuivant une proportion moindre que celle des poids.

56. Au reſte il eſt clair que ſi l' hypothèſe $P = D$, & en général $P = D^m$ avoit exactement lieu dans la nature, la denſité d'une particule d'air deviendroit nulle, lorſque le poid comprimant ſeroit nul, ce qui paroit renfermer quelque eſpèce de contradiction; ſi donc, pour éviter un pareil inconvénient, on ſuppoſe que le poid comprimant ſoit pro-

portionel à quelque autre fonction φ de la densité, on satisfaira tout-à-la-fois à la Théorie de la propagation du Son, & aux expériences de la compression de l'air, si on peut déterminer φ en sorte que $\varphi' D$ soit (en y mettant $D = 1$) $= 1 + \frac{2}{7}$, & qu'en même tems φD soit assès sensiblement proportionel à D, tant que D est contenu entre les limites 1 & 4.

CHAPITRE VI.

Reflexions sur la Théorie des instrumens à vent.

57. Dans *l'Art.* 52. *des Rech. préc.* j'ai réduit la Théorie des flutes à celle des oscillations d'une fibre élastique d'air, dont les deux extrémités soient fixes, comme dans les cordes sonores; mais cette supposition n'est pas exacte; car on sait que l'air renfermé dans le tuiau communique toujours avec l'air extérieur, ou de deux côtés, comme dans toutes les espèces de flutes, ou d'un côté seulement comme dans les trompettes, les cors de chasse, & dans les tuiaux d'orgue bouchés; je vais donc maintenant avoir égard à ces circonstances.

Considérons d'abord des flutes de forme exactement cilindrique, & supposons que la colonne d'air qui y est renfermée soit soutenue, à ses deux extrémités, par une force égale au ressort naturel de l'air extérieur.

Dénotant par z les excursions longitudinales de chaque partie d'air, on aura l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z}{dx^2}$; d'où il sera aisé de tirer par le Prob. 1. ci-dessus, les mêmes résultats que dans *l'Art. cité*, en supposant, comme on l'a pratiqué partout ailleurs, z nul, lorsque $x = 0$, & $x = a$, a étant ici la longueur entière de la flute; mais, dans le

cas

cas que nous nous proposons d'examiner, ce n'est plus cette condition qui doit avoir lieu, mais il faut que l'élasticité de la premiére & de la derniére particule soit la même que l'élasticité naturelle de l'atmosphère, savoir que $c\left(1 - \frac{dz}{dx}\right) = c$, ou bien $\frac{dz}{dx} = 0$, lorsque $x = 0$, & $x = a$. Or, puisque dans ces deux points les deux termes $\frac{dz}{dx} M - z \frac{dM}{dx}$ doivent disparoître d'eux mêmes, par la nature de notre méthode, (*Voïés Prob.* 1.) il faudra que la différentielle $\frac{dM}{dx}$ y devienne nulle; c'est pourquoi l'on aura $M = A$ cos. $x \sqrt{-k}$, & $\sqrt{-k} = \frac{\nu\pi}{2a}$, & par conséquent les équations

$$\int z \text{ cos. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{cos. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ cos. } x\sqrt{-k}\, dx + \frac{\text{sin. } t\sqrt{-ck}}{\sqrt{-ck}} \int V \text{ cos. } x\sqrt{-k}\, dx$$

$$\int u \text{ cos. } x\sqrt{-k}\, dx = \text{cos. } t\sqrt{-ck} \int V \text{ cos. } x\sqrt{-k}\, dx - \sqrt{-ck} \text{ sin. } t\sqrt{-ck} \int Z \text{ cos. } x\sqrt{-k}\, dx.$$

Ces équations fourniront une construction à peu-près semblable à celle de *l'Art.* 7.; mais on pourra s'en passer, lorsqu'il ne sera question que de déterminer la durée commune des oscillations des particules de l'air. Car il suffira pour cela de considérer, que les équations trouvées demeurent invariables, lorsqu'on augmente la valeur de t d'un multiple quelconque de $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; d'où il s'ensuit qu'au bout de chaque intervalle de tems $\frac{2a}{\sqrt{c}}$ les valeurs de z & de u reviendront les mêmes, & que par conséquent toutes les particules reprendront aussi la même situation, & le même mouvement; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans l'endroit cité des *Rech. préc.*, quoique d'après une autre hipothèse.

 Cela

Cela aura lieu en général pour toutes les valeurs possibles de ν; mais si on suppose que les valeurs de ν soient renfermées dans la formule particuliére $\nu = m \times \mu$, m étant un nombre entier, positif & déterminé, & μ un nombre quelconque entier; il est évident, par la nature des sinus & cosinus, que les valeurs de z & de u reviendront les mêmes après chaque intervalle de tems $= \frac{2a}{m\sqrt{c}}$, & qu'ainsi la durée des oscillations se réduira à la moitié, au tiers, au quart &c., selon que m sera exprimé par 2, 3, 4 &c.

Or dans ce cas il est clair, que si on décrit une courbe, où les abscisses étant x, les ordonnées soient cos. $x\sqrt{-k}$, cette courbe aura autant de ventres égaux & semblables qu'il y a d'unités dans le nombre m; par conséquent les quantités Z, V, z, u qui sont multipliées par chacune de ces ordonnées devront former aussi des courbes de pareille forme; autrement le Problême demeureroit indéterminé, ou plutôt indéterminable, puisque on pourroit trouver pour z & u plusieurs valeurs différentes, ce qui seroit absurde.

On voit parlà que ce cas répond exactement à celui, que nous avons examiné dans *l'Art.* 49. *des Rech. préc.*, & qu'il contient par conséquent l'explication des Sons harmoniques.

58. Supposons maintenant que la flute soit bouchée à l'extrémité opposée à l'embouchure; puisque alors $z = 0$, x étant $= a$, le terme $z\,dM$ disparoîtra de lui même, & le terme restant $M dz$ donnera $M = 0$, d'où l'on tirera cos. $a\sqrt{-k} = 0$, & $\sqrt{-k} = (2\nu + 1)\frac{\pi}{4a}$, ν marquant un nombre quelconque entier, positif, ou négatif.

Cette valeur substituée dans les deux équations de *l'Art. préc.*, on verra aisément que les termes cos. $t\sqrt{-ck}$, & sin. $t\sqrt{-ck}$ ne reprendront les mêmes valeurs, que lorsque

t sera

t sera augmenté de $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; ce qui donnera la durée des oscillations double de celle qu'on a trouvé dans le cas précédent.

Ce fait est confirmé par l'expérience, par laquelle on trouve en effet que les tuïaux bouchés donnent justement l'octave du son, qu'ils donneroient étant ouverts. Mais il y a plus; comme la durée des oscillations ne peut s'acourcir à moins que $2\nu + 1$ ne devienne le produit de deux nombres entiers & par conséquent impairs, il s'ensuit qu'elle ne pourra devenir que le tiers, ou la cinquiéme partie, ou &c. de la durée naturelle $\frac{4a}{\sqrt{c}}$; d'où il résulte qu'une flute bouchée, après avoir rendu le son fondamental, ira immédiatement à la quinte en haut de ce même son, & puis à la double tierce &c. sans passer par aucune des octaves intermédiaires.

Voilà l'explication exacte d'un phénomène assés singulier, que M. Daniel Bernoulli a le premier fait remarquer dans *l'Art. III. de son Mémoire sur les vibrations des cordes* (*Acad. de Berlin* 1753.); mais dont ni lui, ni aucun autre, que je sache, n'avoit encore jusqu'ici rendu raison.

59. Lorsque les flutes n'ont pas une forme cilindrique, ou en général, lorsqu'il s'agit des trompettes & des cors de chasse, il semble qu'on pourroit tirer leur Théorie des calculs de *l'Art.* 30. *ci-dessus*; cependant voici une difficulté.

On sait, que ces instrumens, quelque figure qu'ils aient, donnent toujours, par une simple variation d'embouchure, tous les sons qui répondent aux nombres 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. & il n'est pas difficile de voir, en appliquant aux formules générales de *l'Art.* 28. les remarques des *Art. précéd.*, que cela demande nécessairement que les valeurs de k soient 1, 2, 3, 4 &c. comme dans les flutes cilindriques. Or je ne vois point comment l'expression de M de *l'Art.* 27.

Pour-

pourroit fournir des telles valeurs pour k, à moins que les coéficiens alternatifs A, C &c., ou B, D &c. ne fussent nuls, ainsi qu'on l'a déja remarqué dans *l'Art.* 32.

Au reste quels que soient les mouvemens des particules de l'air dans les instrumens à vent, ils seront toujours renfermés dans les trois équations générales de *l'Art.* 10., dont nous avons donné une construction approchée dans le *Chap. préc.* Il est vrai que cette construction ne nous apprendra rien sur la nature des vibrations des particules; mais les équations (D), & (E) font connoître que, pour ces vibrations deviennent sinchrones, il faut que toutes les valeurs de $\sqrt{-k}$ soient commensurables entr'elles, afin qu'il y ait un certain intervalle de tems, après lequel les fonctions sin. $t\sqrt{-ck}$ & cos. $t\sqrt{-ck}$ reprenant toujours les mêmes valeurs, les équations mentionnées redeviennent aussi exactement les mêmes.

Cette condition cependant n'est point nécessaire, si on suppose que les équations dont il s'agit soient vérifiées indépendanment des quantités sin. $\sqrt{-ck}$, & cos. $\sqrt{-ck}$; ce qui à lieu, lorsque chacune des intégrales $\int(xL + yM + zN)\,dXdYdZ$, $\int(x'L + y'M + z'N)\,dXdYdZ$, $\int[(x)L + (y)M + (z)N]\,dXdYdZ$, $\int[(x')L + (y')M + (z')N]\,dXdYdZ$ s'évanoüit d'elle même. Il ne sera donc pas inutile d'examiner ici quelles doivent être les valeurs de x, y, z, x', y', z' &c. pour que ces derniéres conditions aient lieu.

60. Pour cela soient substituées au lieu de L, M, N leurs valeurs tirées des équations de condition (A), (B), (C) de *l'Art.* 45.; & faisant évanoüir par des intégrations par parties les différences de L, M, N, on aura d'abord, en négligeant les intégrales à deux seules changeantes qui sont nulles par la nature mêmes des quantités x, y, z, & des fonctions L, M, N, la transformée suivante

$\int(xL$

$\int (xL + yM + zN)\, dXdYdZ = \frac{1}{k} \int [(\frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ}) L + (\frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2x}{dYdX} + \frac{d^2z}{dYdZ}) M + (\frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY}) N]\, dXdYdZ$, où l'on voit que les quantités multipliées par L, M, N, sont les mêmes que celles qui composent les seconds membres des équations différentielles proposées; ce qui ne pourra jamais être autrement, quelque forme que puissent avoir ces équations; puisque il est clair que les nouvelles intégrations par parties, dont on fait usage ici, ne servent qu'à defaire ce qu'on avoit fait par les premiéres.

On aura donc, en posant α pour une constante quelconque, $\int [(\alpha x + \frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ}) L + (\alpha y + \frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2z}{dYdZ} + \frac{d^2x}{dYdX}) M + (\alpha z + \frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY}) N]\, dXdYdZ = (\alpha + k) \int (xL + yM + zN)\, dXdYdZ$, & par conséquent, tant que α ne sera pas $= -k$, on satisfera à l'équation $\int (xL + yM + zN)\, dXdYdZ = 0$, en faisant séparément

$$(a) \ldots\ldots \alpha x + \frac{d^2x}{dX^2} + \frac{d^2y}{dXdY} + \frac{d^2z}{dXdZ} = 0$$

$$(b) \ldots\ldots \alpha y + \frac{d^2y}{dY^2} + \frac{d^2z}{dYdZ} + \frac{d^2x}{dYdX} = 0$$

$$(c) \ldots\ldots \alpha z + \frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{d^2x}{dZdX} + \frac{d^2y}{dZdY} = 0.$$

d'où l'on tirera les valeurs de x, y, z qu'on pourra exprimer généralement ainsi: $x = A\varphi\,(\alpha, X, Y, Z)$, $y = A\psi\,(\alpha, X, Y, Z)$, $z = A\chi\,(\alpha, X, Y, Z)$, les lettres φ, ψ, χ marquant des fonctions variables données.

La

La constante A peut-être quelconque, & même une fonction du tems t qui est ici regardé comme constant, mais les autres constantes qui se trouveront dans les fonctions φ, ψ, χ devront être déterminées par les conditions qu'on supposera aux quantités x, y, z; conditions qui dépendront dans le cas présent de la figure du tuïau qui renferme les particules mobiles de l'air.

A' l'égard de la constante α, elle sera susceptible d'une infinité de valeurs, qui seront les mêmes précisément que celles de la la quantité k, mais prises négativement; ce qu'on peut démontrer en général de la maniére suivante. Les équations trouvées (a), (b), (c) comparées avec les équations fondamentales de l'*Art.* 10. donnent $\frac{d^2x}{dt^2} = -c\alpha x$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -c\alpha y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -c\alpha z$; d'où l'on tire l'équation $\frac{d^2s}{dt^2} = -c\alpha s$, qui comparée avec l'équation en s trouvée dans l'*Art.* 45. $\frac{d^2s}{dt^2} = kcs$ donne $-\alpha = k$, & $\alpha = -k$.

En raisonnant & opérant de même sur les autres formules intégrales qui doivent aussi être $= 0$, on trouvera pour x', y', z', comme aussi pour (x), (y), (z), & (x'), (y'), (z') des valeurs qui ne différeront de celles de x, y, z que dans la constante arbitraire, par laquelle les fonctions φ, ψ, χ peuvent être multipliées; on aura ainsi
$x' = B\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $y' = B\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$z' = B\chi(\alpha, X, Y, Z)$;
$(x) = E\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $(y) = E\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$(z) = E\chi(\alpha, X, Y, Z)$; &
$(x') = F\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $(y') = F\psi(\alpha, X, Y, Z)$
$(z') = F\chi(\alpha, X, Y, Z)$.

Maintenant il faut observer que comme les équations (a), (b), (c) ne rendent l'intégrale proposée $= 0$ que tant

tant que α n'eft pas $= -k$, & que d'ailleurs les équations (D) & (E) de *l'Art.* 45. doivent avoir lieu en général pour toutes les valeurs de k, il reftera encore à vérifier ces équations dans le cas de $k = -\alpha$; or fubftituant dans l'équation (D) les valeurs trouvées ci-deffus de x, y &c. il viendra $A\int[L\varphi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)]\, dX dY dZ$ $= (E \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}) \int[L\varphi(\alpha, X, Y, Z) + M\psi(\alpha, X, Y, Z) + N\chi(\alpha, X, Y, Z)]\, dX dY dZ$; ce qui donnera $A = E \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}$. On aura de même, par l'équation (E), $B = F \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}$, donc

$$x = [E \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\, \varphi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$y = [E \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\, \psi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$z = [E \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} + \frac{F \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}}{\sqrt{c\alpha}}]\, \chi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$x' = [F \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}]\, \varphi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$y' = [F \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}]\, \psi(\alpha, X, Y, Z)$$
$$z' = [F \text{ cof. } t\sqrt{c\alpha} - E\sqrt{c\alpha} \text{ fin. } t\sqrt{c\alpha}]\, \chi(\alpha, X, Y, Z).$$

Il n'eft pas difficile de voir ici, que les vibrations des particules feront toutes fyncrones à celles d'une pendule fimple, dont la longeur foit $= \frac{2h}{\alpha T^2 c} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{D}{E}$; par conféquent, quelles que foient les valeurs de α, le fluide pourra toujours faire des ofcillations ifochrones d'autant d'efpèces qu'il y aura de différentes valeurs de α. Au refte ce cas eft celui de l'ifochronifme ordinaire, où les forces accélératrices font proportionelles aux efpaces à parcourir.

61. Sup-

61. Suppoſons maintenant

$$\alpha x + \frac{d^2 x}{dX^2} + \frac{d^2 y}{dXdY} + \frac{d^2 z}{dXdZ} = p$$

$$\alpha y + \frac{d^2 y}{dY^2} + \frac{d^2 z}{dYdZ} + \frac{d^2 x}{dYdX} = q$$

$$\alpha z + \frac{d^2 z}{dZ^2} + \frac{d^2 x}{dZdX} + \frac{d^2 y}{dZdY} = r$$

on aura $\int(pL + qM + rN)\, dXdYdZ = (\alpha + k) \int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$.

Donc, pour que $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$ devienne $= 0$, il ſuffira de faire $\int(pL + qM + rN)\, dXdYdZ = 0$, ſans qu'il ſoit ſéparément $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, comme dans les équations (a), (b), (c).

Or cette derniére formule étant ſemblable à la formule $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$ qui a fourni les équations (a), (b), (c); on trouvera par des pareils procédés les équations ſuivantes

$$(p) \ldots\ldots \beta p + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{d^2 q}{dXdY} + \frac{d^2 r}{dXdZ} = 0$$

$$(q) \ldots\ldots \beta q + \frac{d^2 q}{dY^2} + \frac{d^2 r}{dYdZ} + \frac{d^2 p}{dYdX} = 0$$

$$(r) \ldots\ldots \beta r + \frac{d^2 r}{dZ^2} + \frac{d^2 p}{dZdX} + \frac{d^2 q}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de p, q, r qui étant ſubſtituées ci-deſſus donneront des nouvelles valeurs de x, y, z &c.

Il faut remarquer que dans la transformation de la formule $\int(pL + qM + rN)\, dXdYdZ$, on trouvera des intégrales à deux changeantes de même forme que celles qui réſultent de la formule $\int(xL + yM + zN)\, dXdYdZ$; il faudra donc les faire évanouïr, en ſuppoſant aux valeurs de p, q, r, les mêmes conditions qu'à celles de x, y, z; d'où il s'enſuit que, comme les équations (p), (q), (r) ſont d'ailleurs entiérement ſemblables aux équations (a), (b), (c), on aura de même $p =$

$A\varphi$

$A\varphi(\beta, X, Y, Z)$, $q = A\psi(\beta, X, Y, Z)$, $r = A\chi(\beta, X, Y, Z)$, & de plus que la quantité β aura les mêmes valeurs que la lettre $-k$.

Maintenant au lieu de ſubſtituer ces valeurs de p, q, r dans les équations en x, y, z; je multiplie ces mêmes équations telles qu'elles ſont par un coéficient indéterminé H, & j'ajoute chacune d'elles avec ſa correſpondante d'entre les trois autres (p), (q), (r), ce qui me donne

$$H\alpha x + (\beta - H)p + \frac{H d^2 x}{dX^2} + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{H d^2 y}{dXdY}$$
$$+ \frac{d^2 q}{dXdY} + \frac{H d^2 z}{dXdZ} + \frac{d^2 r}{dXdZ} = 0$$
$$H\alpha y + (\beta - H)q + \&c. = 0$$
$$H\alpha z + (\beta - H)r + \&c. = 0.$$

Soit donc fait $\beta - H = \alpha$; ſavoir $H = \beta - \alpha$, & ſuppoſant pour abreger $Hx + p = p'$, $Hy + q = q'$, $Hz + r = r'$ on aura

$$\alpha p' + \frac{d^2 p'}{dX^2} + \frac{d^2 q'}{dXdY} + \frac{d^2 r'}{dXdZ} = 0$$
$$\alpha q' + \frac{d^2 q'}{dY^2} + \frac{d^2 r'}{dYdZ} + \frac{d^2 p'}{dYdX} = 0$$
$$\alpha r' + \frac{d^2 r'}{dZ^2} + \frac{d^2 p'}{dZdX} + \frac{d^2 q'}{dZdY} = 0;$$

d'où l'on tirera comme ci-deſſus $p' = A\varphi(\alpha, X, Y, Z)$, $q' = A\psi(\alpha, X, Y, Z)$, $r' = A\chi(\alpha, X, Y, Z)$, ($A$ marquant une nouvelle conſtante arbitraire).

Or les conditions qui déterminent les conſtantes de p, q, r étant les mêmes que celles qui déterminent les conſtantes de x, y, z, par ce qui a été dit ci-deſſus, elles ſeront encore les mêmes pour les conſtantes de p', q', r'; d'où il s'enſuit qu'on aura auſſi pour α les mêmes valeurs que pour β, ſavoir les mêmes que celles de la quantité $-k$.

 Main-

Maintenat comme $x = \frac{p' - p}{H}$, $y = \frac{q' - q}{H}$, $z = \frac{r' - r}{H}$; on aura en subſtituant, & prenant deux différentes conſtantes arbitraires A', A'', & marquant par α', α'' deux valeurs quelconques de $-k$;

$$x = A'\varphi(\alpha', X, Y, Z) + A''\varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$y = A'\psi(\alpha', X, Y, Z) + A''\psi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$z = A'\chi(\alpha', X, Y, Z) + A''\chi(\alpha'', X, Y, Z);$$

formules qui ſerviront auſſi pour les autres variables x', y', z', (x), (y) &c. en ne faiſant que changer les conſtantes A', A''.

Or pour trouver le rapport entre les quantités x, y, z, x', y', z', & (x), (y), (z), (x'), (y'), (z') dépandant du tems t, on remarquera qu'il y a ici deux cas, où les équations (p), (q), (r) ne rempliſſent point la condition propoſée de $\int(xL + yM + zN)\,dXdYdZ = 0$; ſavoir celui, où k eſt $= -\alpha'$, & celui où $k = -\alpha''$. Il faudra donc dans ces cas recourir immédiatement aux équations (D) & (E), & ſubſtituant au lieu de x, y, z &c. les expreſſions trouvées faire en ſorte, que ces équations deviennent poſſibles, lorſque $k = -\alpha'$, & $k = -\alpha''$.

Soient déſignées par B', B'', les conſtantes qui répondent aux quantités x, y, z, & par E', E'', F', F'' celles qui répondent aux quantités (x), (y), (z), & (x'), (y'), (z'), & poſons d'abord $k = -\alpha'$, il eſt clair que la formule $\int[L\varphi(\alpha'', X, Y, Z) + M\psi(\alpha'', X, Y, Z) + N\chi(\alpha'', X, Y, Z)]\,dXdYdZ$ évanouïra par elle même, ſuivant ce qui a été démontré dans *l'Art. préc.*; donc l'équation (D) ſe réduira comme ci-deſſus à $A'\int[L\varphi(\alpha', X, Y, Z) + M\psi(\alpha', X, Y, Z) + N\chi(\alpha', X, Y, Z)]\,dXdYdZ = (E'\,\text{coſ.}\,t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'\,\text{ſin.}\,t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}})\int[L\varphi(\alpha', X, Y, Z) + M\psi(\alpha', X, Y, Z) + N\chi(\alpha', X, Y, Z)]\,dXdYdZ$;

d'où

d'où l'on tire $A' = E' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F' \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}$. On tirera de même de l'équation (E), $B' = F' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha'}$.

Après cela on supposera $k = -\alpha''$, & l'on trouvera par des procédés semblables $A'' = E'' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F'' \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha'}}{\sqrt{c\alpha'}}$, $B'' = F' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha''}$.

On aura donc,

$$x = [\,E' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha}} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha'}\,]\ \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [\,E'' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha''}\,]\ \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$$y = [\,E' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha'}\,]\ \psi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [\,E'' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha''}\,]\ \psi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$z =$ &c.

$$x' = [\,F' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha'}\,]\ \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$

$$+ [\,F'' \text{cos}.\ t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \text{ sin}.\ t\sqrt{c\alpha''}\,]\ \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$

$y' =$ &c.

$z' =$ &c.

On voit par ces formules que le mouvement de chaque particule sera composé de deux mouvemens analogues chacun au mouvement représenté par les formules de *l'Art. préc.*; d'où il est aisé de conclure, que les vibrations ne seront jamais isochrones, à moins que les mouvemens composans ne soient sinchrones entr'eux, ce qui ne pourra arriver que, lorsque les quantités α' & α'' seront commensurables entr'elles.

62. En suivant la méthode que nous venons d'expliquer on pourra supposer de nouveau au lieu des équations (p), (q), (r)

$$\beta p + \frac{d^2 p}{dX^2} + \frac{d^2 q}{dXdY} + \frac{d^2 r}{dXdZ} = P$$

$$\beta q + \frac{d^2 q}{dY^2} + \frac{d^2 r}{dYdZ} + \frac{d^2 p}{dYdX} = Q$$

$$\beta r + \frac{d^2 r}{dZ^2} + \frac{d^2 p}{dZdX} + \frac{d^2 q}{dZdY} = R$$

& ensuite

$$\gamma P + \frac{d^2 P}{dX^2} + \frac{d^2 Q}{dXdY} + \frac{d^2 R}{dXdZ} = 0$$

$$\gamma Q + \frac{d^2 Q}{dY^2} + \frac{d^2 R}{dYdZ} + \frac{d^2 P}{dYdX} = 0$$

$$\gamma R + \frac{d^2 R}{dZ^2} + \frac{d^2 P}{dZdX} + \frac{d^2 Q}{dZdY} = 0;$$

d'où, par des opèrations analogues à celles qui ont été pratiqué ci-dessus, on parviendra aux formules suivantes,

$$x = [\, E' \text{cos}.\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{ sin}.\, t\sqrt{c\alpha'}\,]\, \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [\, E' \text{cos}.\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{ sin}.\, t\sqrt{c\alpha''}\,]\, \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$+ [\, E''' \text{cos}.\, t\sqrt{c\alpha'''} + \frac{F'''}{\sqrt{c\alpha'''}} \text{ sin}.\, t\sqrt{c\alpha'''}\,]\, \varphi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$y =$ &c.

$z =$ &c.

$$x' = [\, F' \text{cos}.\, t\sqrt{c\alpha'} - E' \sqrt{c\alpha'} \text{ sin}.\, t\sqrt{c\alpha'}\,]\, \varphi(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [\, F'' \text{cos}.\, t\sqrt{c\alpha''} - E'' \sqrt{c\alpha''} \text{ sin}.\, t\sqrt{c\alpha''}\,]\, \varphi(\alpha'', X, Y, Z)$$
$$+ [\, F''' \text{cos}.\, t\sqrt{c\alpha'''} - E''' \sqrt{c\alpha'''} \text{ sin}.\, t\sqrt{c\alpha'''}\,]\, \varphi(\alpha''', X, Y, Z)$$

$y' =$ &c.

$z' =$ &c.

qui donnent les mouvemens des particules composés de trois mouvemens simples, analogues chacun à celui de l'*Art.* 60.; d'où il s'ensuit que l'isochronisme n'y aura lieu que, lorsque les quantités α', α'', α''', qui expriment trois valeurs quelconques de $-k$ seront toutes commensurables entr'elles.

En

En ſuivant encore la même méthode, on trouvera pour les valeurs de x, y, z, x', y', z' des formules compoſées de 4, 5, 6 &c. termes ſemblables donc chacun répondra à une quelconque des valeurs de k; on pourra donc par ce moïen avoir autant de ſolutions particuliéres, qu'il y aura de combinaiſons à faire, à une à une, à deux à deux, à trois à trois &c. des valeurs de k, de ſorte, que leur nombre étant m, celui de ſolutions particuliéres ſera $2^m - 1$; mais ſi le nombre des valeurs commenſurables eſt ſeulement $= n$, il n'y aura que $2^n + m - n - 1$ de ces ſolutions qui rendent les oſcillations iſochrones.

REMARQUE.

63. Si on pouſſoit les expreſſions des valeurs de x, y &c. juſqu'à ce que le nombre de leurs termes fût égal à celui des valeurs de k, on auroit alors une ſolution générale, & applicable à tous les cas poſſibles; quoique cette propoſition ne ſoit pas une ſuite néceſſaire de l'Analiſe précédente, il eſt aiſé de la démontrer en rigueur par le moïen des principes juſqu'ici établis.

Pour cela je ſuppoſe qu'on développe la formule (D) en autant de formules particuliéres qu'il y a de valeurs de k, & qu'on en tire par la combinaiſon la valeur de chacune des quantités x, y, z, ſoit en ſe ſervant des régles ordinaires, où en emploïant une méthode analogue à celle, dont nous avons fait uſage dans le *Chap. III. des Recher. préc.*, *Art. 24.*; il eſt facile de voir que ces valeurs ſeront exprimées de la maniére ſuivante;

$$x = P' \left[S' \operatorname{coſ.} t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{c\alpha'} \right]$$

$$+ P'' \left[S'' \operatorname{coſ.} t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \operatorname{ſin.} t\sqrt{c\alpha''} \right]$$

&c. &c.

+

$$+ P^m [S^m \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha^m}]$$

$$y = Q' [S' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}]$$

$$+ Q'' [S'' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha''}]$$

&c. &c.

$$+ Q^m [S^m \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha^m}]$$

$$z = R' [S' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}]$$

$$+ R'' [S'' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha''}]$$

&c. &c.

$$+ R^m [S^m \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha^m}];$$

posant α^m pour la derniére des valeurs de $-k$.

Les quantités S', S'' &c. S^m & V', V'' &c. V^m sont mises pour dénoter les valeurs des expressions $\int[(x)L + (y)M + (z)N]\, dX\, dY\, dZ$, & $\int[(x')L + (y')M + (z')N]$, lorsque on fait successivement $-k = \alpha', = \alpha''$ &c. $= \alpha^m$. Les autres quantités P', P'' &c. P^m, Q', Q'' &c. Q^m, R', R'' &c. R^m sont différentes pour chaque particule, c'est-à-dire, sont des fonctions variables de X, Y, Z.

Or, si l'on regarde ces fonctions comme indéterminées, on pourra en connoître la valeur par le moïen de la substitution & de la comparaison, ainsi qu'on le pratique dans la méthode connue des indéterminées. Substituons donc au lieu de x, y, z dans l'équation (D) les expressions ci-dessus, & supposant pour abreger que S, V dénotent en géneral les valeurs de S', S'' &c. V', V'' &c., lorsqu'il y a encore $-k$ au lieu de α', α'' &c, on aura

$$[S' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha'} + \frac{V'}{\sqrt{c\alpha'}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha'}] \int (P'L + Q'M + R'N)\, dX\, dY\, dZ$$

$$+ [S''$$

$$+ [S'' \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha''} + \frac{V''}{\sqrt{c\alpha''}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha''}] \int (P''L + Q''M + R''N)\, dXdYdZ$$

&c. &c.

$$+ [S^m \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha^m} + \frac{V^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha^m}] \int (P^m L + Q^m M + R^m N)\, dXdYdZ$$

$$= S \text{ cof. } t\sqrt{-ck} + \frac{V}{\sqrt{-ck}} \text{ fin. } t\sqrt{-ck}.$$

Equation qui doit être identique en faifant $-k = \alpha'$, $= \alpha''$, $=$ &c., $= \alpha^m$.

Soit donc pofé, en général $-k = \alpha^\mu$, le fecond membre de l'équation deviendra S^μ cof. $t\sqrt{c\alpha^\mu} + \frac{V^\mu}{\sqrt{c\alpha^\mu}}$ fin. $t\sqrt{c\alpha^\mu}$, & le terme μ^{me} du premier membre étant

$$[S^\mu \text{cof.}\, t\sqrt{c\alpha^\mu} + \frac{V^\mu}{\sqrt{c\alpha^\mu}} \text{fin.}\, t\sqrt{c\alpha^\mu}] \int (P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\, dXdYdZ,$$

pour identifier les deux membres, on fuppofera que $\int (P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\, dXdYdZ$ foit $= 1$, & que toutes les autres formules exprimées généralement $\int (PL + QM + RN)\, dXdYdZ$ foient nulles, $-k$ étant $= \alpha^\mu$ dans les valeurs de L, M, N; d'où l'on voit que les valeurs de P, Q, R devront être telles que la formule générale $\int (P^\mu L + Q^\mu M + R^\mu N)\, dXdYdZ$ foit toujours $= 1$, lorfque $k = -\alpha^\mu$, & qu'elle foit toujours $= 0$, lorfque k a une autre valeur quelconque.

Or, par ce qui a été démontré dans *l'Art.* 69., on trouvera d'abord, pour remplir cette dernière condition, les équations fuivantes,

$$\alpha^\mu P^\mu = \frac{d^2 P^\mu}{dX^2} + \frac{d^2 Q^\mu}{dXdY} + \frac{d^2 R^\mu}{dXdZ}$$

$$\alpha^\mu Q^\mu = \frac{d^2 Q^\mu}{dY^2} + \frac{d^2 R^\mu}{dYdZ} + \frac{d^2 P^\mu}{dYdX}$$

$$\alpha^\mu R^\mu = \frac{d^2 R^\mu}{dZ^2} + \frac{d^2 P^\mu}{dZdX} + \frac{d^2 Q^\mu}{dZdY};$$

d'où il réfultera comme dans *l'Art.* cité

$P^\mu = A\,\varphi\,(\alpha^\mu, X, Y, Z)$; $Q^\mu = A\,\psi\,(\alpha^\mu, X, Y, Z)$
$R^\mu = A\,\chi\,(\alpha^\mu, X, Y, Z$.

Soit maintenant la valeur de $\int [L\varphi\,(\alpha^\mu, X, Y, Z) + M\,\psi\,(\alpha^\mu, X, Y, Z) + N\chi\,(\alpha^\mu, X, Y, Z)]\,dXdYdZ$, en y posant $-k = \alpha^\mu$, exprimée par D^μ; on aura pour satisfaire à la premiére condition $A D^\mu = 1$, & par conséquent $A = \frac{1}{D^\mu}$.

Substituant enfin les valeurs trouvées de P, Q, R, dans les expressions de x, y, z, & posant pour plus de simplicité E', E'', &c. au lieu de $\frac{S'}{D'}$, $\frac{S''}{D''}$ &c. & F', F'', &c. au lieu de $\frac{V'}{D'}$, $\frac{V''}{D''}$ &c. il viendra

$$x = [E' \operatorname{cos}. t\sqrt{c\alpha'} + \frac{F'}{\sqrt{c\alpha'}} \operatorname{sin}. t\sqrt{c\alpha'}]\,\varphi\,(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [E'' \operatorname{cos}. t\sqrt{c\alpha''} + \frac{F''}{\sqrt{c\alpha''}} \operatorname{sin}. t\sqrt{c\alpha''}]\,\varphi\,(\alpha'', X, Y, Z)$$
&c. &c.
$$+ [E^m \operatorname{cos}. t\sqrt{c\alpha_m} + \frac{F^m}{\sqrt{c\alpha^m}} \operatorname{sin}. t\sqrt{c\alpha}]\,\varphi\,(\alpha^m, X, Y, Z)$$
$y =$ &c.
$z =$ &c.

Par des raisonnemens, & des opérations semblables on tirera de l'équation (E)

$$x' = [F' \operatorname{cos}. t\sqrt{c\alpha'} - E'\sqrt{c\alpha'} \operatorname{sin}. t\sqrt{c\alpha'}]\,\varphi\,(\alpha', X, Y, Z)$$
$$+ [F'' \operatorname{cos}. t\sqrt{c\alpha''} - E''\sqrt{c\alpha''} \operatorname{sin}. t\sqrt{c\alpha''}]\,\varphi\,(\alpha'', X, Y, Z)$$
+ &c.
$$+ [F^m \operatorname{cos}. t\sqrt{c\alpha^m} - E^m\sqrt{c\alpha^m} \operatorname{sin}. t\sqrt{c\alpha^m}]\,\varphi\,(\alpha^m, X, Y, Z).$$
$y' =$ &c.
$z' =$ &c.

Voilà, comme l'on voit, une construction générale des mêmes équations que nous avons déja traité dans le §. 2. du *Chap. préc.* par une voie fort différente, & seulement par

par approximation ; mais il faut avouer que cette construction n' est guères utile pour la connoissance du mouvement des particules de l'air. Car les valeurs de x, y, z sont composées de suites infinies, dont les termes ne sont point convergens, ou du moins ne peuvent point être regardés comme tels, puisque les constantes E, F, que ces termes renferment, dépendent des premiéres valeurs de x, y, z, & de x', y', z', qui doivent être supposées quelconques.

S C O L I E.

64. Il est clair que la méthode de la Remarque précédente peut aussi être emploïée dans une infinité d'autres équations de même espèce, & qu'elle s'applique également, soit que le nombre des corps mobiles soit infini, ou qu'il soit fini ; de sorte qu'on peut la regarder comme une simplification, & une généralisation de celle, dont nous nous sommes servis dans le *Chap. III. des Rech. préc.*

Au reste cette méthode sert à démontrer la belle Proposition de M. Daniel Bernoulli que, lorsque un sistème quelconque de corps fait des oscillations infiniment petites, le mouvement de chaque corps peut être considéré, comme composé de plusieurs mouvemens partiels, & sinchrones chacun à celui d'un pendule simple. *Voïés les Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1753.*

Fautes à corriger dans la Dissertation précédente.

Pag. 15 *lig.* 16 ; & qui renferme même quelque chose de contradictoire à la nature du Problême ; *lisez* & qui est même incompatible avec les principes de l'Analise de M. Newton.

Pag. 23 *lig.* 4 ; *au lieu de R dans le terme* $R\sqrt{-ck}$ sin. $t\sqrt{-ck}$; *mettez S.*

ibid. changez les signes aux deux dernières termes des équations $s =$ &c., & $r =$ &c. *comme aussi aux termes correspondans des équations qui suivent* $\int z M dx =$ &c., $\int u M dx =$ &c. *Au reste cette faute a été corrigée dans la suite du calcul.*

Pag. 25 *lig.* 16; dans les seconds termes; *lisez* dans les seconds membres.

lig. 19; dans ces termes; *lisez* dans les termes de ces membres.

Pag. 32 *lig.* 27; de sa partie $A''S$; *mettez* de sa partie $A'S'$.

lig. suiv.; comme aussi que; *effacez* que.

Pag. 48 *lig.* 21 *au lieu de* $\frac{2h}{T^2} \times \frac{E}{D}$; *posez* $\frac{1}{T}\sqrt{\frac{2hE}{D}}$.

Pag. 52 *lig.* 6; que l'autre; *effacez* l'autre.

Pag. 59; *dans l'équation* $r =$ &c. *au lieu de* $R\sqrt{ck}$ sin. $t\sqrt{-ck}$; *mettez* $S\sqrt{-ck}$ sin. $t\sqrt{-ck}$.

Pag. 67 *lig.* 5; & de dy au lieu; *mettez* & $-dy$ au lieu.

lig. 7; *placez le signe — avant le premier terme de la valeur de* (Z). *Même correction aux formules des lig.* 22 & 23.

Pag. 72 *lig.* 17; *changez le signe — en + avant le dernier terme de l'équation de cette ligne,* $\varphi(a+y) =$ &c.

lig. 22; *mettez* $\varphi(a+y)$ *au lieu de* $\varphi(a+z)$.

Pag. 96 *lig. dernière*; $X = hx^m$, *posez* $X = hx^n$.

Pag. 104 *lig.* 17; $s + \mu v$ *lisez* $s + \mu r$.

lig. 21; *posez* $e^{t\sqrt{ck}}$ *au lieu de* $e^{-t\sqrt{ck}}$ *après le signe* $\int$ *dans le dernier terme de l'équation* (A).

Pag. 105 *lig.* 6; *après* $\int Z M dx$, *ajoutez* $\int V M dx$.

Pag. 110 *lig.* 17; que M soit; *lisez* que z, & M soient.

Pag. 140 *lig.* 14; $= \frac{\sqrt{3c}}{6}$; *lisez* $= \frac{\sqrt{7c}}{6}$.

Pag. 146 *lig.* 16; *au lieu de* $L^{(a-u, Y, Z)} =$ &c. *mettez* $L^{(a+u, Y, Z)} =$ &c.

Pag. 157 *lig.* 13 & 14; à la quinte en haut de ce même Son, & puis à la double tierce; &c. *lisez pour plus d'intelligence* à la douxiéme, & puis à la dixseptiéme &c. de ce même Son.

ESSAI

ESSAI

D'UNE NOUVELLE METHODE

POUR DE'TERMINER LES *MAXIMA*, ET LES *MINIMA*

DES FORMULES INTEGRALES INDEFINIES.

PAR M. DE LA GRANGE.

POUR peu qu'on ſoit au fait des Principes du Calcul différentiel, on connoit la méthode de déterminer les plus grandes, & les moindres ordonnées des courbes; mais il eſt des queſtions *de maximis*, *& minimis* d'un genre plus élévé, & qui, quoique dépendantes de la même méthode ne s'y appliquent pas ſi aiſément. Ce ſont celles, où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans leſquelles une expreſſion intégrale donnée ſoit un *maximum*, ou un *minimum* par rapport à toutes les autres courbes.

Le premier Problême de ce genre, que les Géomètres aïent reſolu, eſt celui de la *Brachryſtochrone*, ou ligne de la plus vite deſcente, que M. Jean Bernoulli propoſa vers la fin du ſiécle paſſé. On n'y parvint alors que par des voies particuliéres, & ce ne fut que quelque tems après, & à l'occaſion des recherches ſur les *Iſopérimètres*, que le grand Géomètre dont nous venons de parler, & ſon Illuſtre frere M. Jacque Bernoulli donnerent quelques régles générales pour réſoudre pluſieurs autres queſtions de même nature. Mais ces régles n'aïant pas aſsès d'étendue, le célèbre M. Euler a entreprit de réduire toutes les recherches de ce genre à une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes: ſive ſolutio Problematis iſoperimetrici latiſſimo ſenſu accepti.* Ouvrage original, & qui brille par tout d'une pro-

profonde science de calcul. Cependant, quelque ingénieuse & feconde que soit sa méthode, il faut avouer qu'elle n'a pas toute la simplicité qu'on peut désirer dans un sujet de pure Analise. L'Auteur le fait sentir lui même dans *l'Art.* 39. du *Chap.* 2. de son livre par ces paroles: *Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica & lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco* P d p *scribi debere* — p d P.

Maintenant voici une méthode qui ne demande qu'un usage fort simple des principes du Calcul différentiel & intégral; mais avant tout je dois avertir que, comme cette méthode exige que les mêmes quantités varient de deux maniéres différentes, pour ne pas confondre ces variations, j'ai introduit dans mes calculs une nouvelle carathéristique δ. Ainsi δZ exprimera une différence de Z qui ne sera pas la même que la dZ, mais qui sera cependant formée par les mêmes régles; de sorte qu'aïant une équation quelconque $dZ = m\delta x$, on pourra avoir également $\delta Z = m\delta x$, & ainsi des autres. Cela posé je viens d'abord au Problême suivant.

I.

Probleme I. Etant proposée une formule intégrale indéfinie représentée par $\int Z$, où Z désigne une fonction quelconque déterminée des variables x, y, z, & de leurs différences dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z &c., trouver la rélation que ces variables doivent avoir entr'elles, pour que la formule $\int Z$ devienne un *maximum*, ou un *minimum*.

Solution. Suivant la méthode connue *de maximis, & minimis*, il faudra différentier la proposée $\int Z$, en regardant les quantités x, y, z, d^2x, d^2y, d^2z &c. comme variables, & faire la différentielle, qui en résulte, égale à zero. Marquant donc ces variations par δ, on aura d'abord pour l'équation du *maximum*, ou *minimum* $\delta \cdot \int Z = 0$, où, ce qui en est l'équivalent, $\int \delta Z = 0$. Or

Or soit Z tel que $\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2 x + r\delta d^3 x + \&c. + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + R\delta d^3 y + \&c. + \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2 z + \rho\delta d^3 z + \&c.$ il en viendra l'équation

$$\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2 x + \int r\delta d^3 x + \&c. +$$
$$\int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2 y + \int R\delta d^3 y + \&c. +$$
$$\int \nu\delta z + \int \pi\delta dz + \int \chi\delta d^2 z + \int \rho\delta d^3 z + \&c. = 0;$$

Mais on comprend aisément que $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2 x = d^2\delta x$, & ainsi des autres; de plus on trouve par la méthode des intégrations par parties $\int p d\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$, $\int q d^2\delta x = qd\delta x - dq\delta x + \int d^2 q\delta x$, $\int r d^3\delta x = rd^2\delta x - dr\delta x + d^2 r\delta x - \int d^3 r\delta x$; & ainsi du reste; donc l'équation précédente se changera en celle-ci,

$$(A) \ldots \int(n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\,\delta x +$$
$$\int(N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\,\delta y +$$
$$\int(\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c.)\,\delta z +$$
$$(p - dq + d^2 r - \&c.)\,\delta x + (q - dr\,\&c.)\,d\delta x +$$
$$(r - \&c.)\,d^2\delta x + \&c. +$$
$$(P - dQ + d^2 R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR\,\&c.)\,d\delta y +$$
$$(R - \&c.)\,d^2\delta y + \&c. +$$
$$(\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.)\,\delta z + \chi - d\rho\,\&c.)\,d\delta z +$$
$$(\rho - \&c.)\,d^2 + \&c. = 0;$$

d'où l'on tirera premiérement l'équation indéfinie

$$(B) \ldots (n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\,\delta x +$$
$$(N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\,\delta y +$$
$$(\nu - d\pi + d\chi - d^3\rho + \&c.)\,\delta z = 0;$$

& ensuite l'équation déterminée

$$(C) \ldots (p - dq + d^2 r - \&c.)\,\delta x + (q - dr + \&c.)\,d\delta x$$
$$+ (r - \&c.)\,d^2\delta x + \&c. +$$
$$(P - dQ + d^2 R - \&c.)\,\delta y + (Q - dR + \&c.)\,d\delta y$$
$$+ (R - \&c.)\,d^2\delta y + \&c. +$$
$$(\pi - d\chi + d^2\rho - \&c.)\,\delta x + \chi - d\rho + \&c.)\,d\delta z$$
$$+ (\rho - \&c.)\,d^2\delta z + \&c. = 0.$$

Cette équation se rapporte au dernier point de l'intégrale $\int Z$; mais il faut observer, que comme chacun de ses termes

mes

mes comme $p\delta x$ dépend d'une intégration partielle de la formule $\int p\, d\delta x$, on peut lui ajouter, ou en retrancher une quantité constante. Or la condition, par laquelle cette constante doit se déterminer est qu'elle fasse évanoüir le terme $p\delta x$ au point, où commence l'intégrale $\int p\, d\delta x$; il faudra donc retrancher de $p\delta x$ sa valeur en ce point; d'où résulte la régle suivante. Soit le premier membre de l'équation (C) exprimé généralement par M, & soit la valeur de M, au point où commence l'intégrale $\int Z$, désignée par $'M$, & au point où cette intégrale finit, désignée par M', on aura $M' - 'M = 0$ pour l'expression complete de l'équation (C).

Maintenant pour se défaire dans les équations trouvées des différences indéterminées δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$ &c. on examinera d'abord si par la nature du Problême il y a entr'elles quelque rapport donné; & les aiant réduit au plus petit nombre possible, on fera ensuite le coéficient de chacune de celles qui resteront égal à zero. Si elles sont absolument indépendantes les unes des autres, l'équation (B) nous donnera sur le champ les trois suivantes

$$n - dp + d^2q - d^3r + \&c. = 0$$
$$N - dP + d^2Q - d^3R + \&c. = 0$$
$$\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\rho + \&c. = 0$$

II.

Exemple. Soit cherchée la courbe brachristochrone dans le vuide. Nommant x l'abscisse verticale, & y, & z les deux ordonnées orizontales, & perpendiculaires l'une à l'autre, la formule qui exprime le tems sera $\int \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$, laquelle étant comparé à $\int Z$, on a $Z = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{\sqrt{x}}$; & différentiant par δ suivant les régles ordinaires des différentiations, δZ

$= -$

$= - \frac{\delta x \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{2x \sqrt{x}} + \frac{dx \delta dx}{\sqrt{x} \times (dx^2 + dy^2 + dz^2)}$
$+ \frac{dy \delta dy}{\sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}} + \frac{dz \delta dz}{\sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}$ donc, posant pour abreger $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $n = - \frac{ds}{2x\sqrt{x}}$ $p = \frac{dx}{ds\sqrt{x}}$, $P = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, $\pi = \frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, & toutes les autres quantités q, r, N, Q &c. $= 0$.

III.

Premier cas. Or si le Problême est de trouver en général, entre toutes les courbes possibles, celle de la plus vite descente, on aura en ce cas les équations $n - dp = 0$; $dP = 0$; $dP' = 0$, savoir, $- \frac{ds}{2xdx} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$; $- d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$; $- d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$; ces trois équations devant représenter une courbe unique, il faut qu'elles se réduisent à deux seulement; c'est de quoi il est facile de s'assurer par le calcul; car, la seconde étant multipliée par $2 \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$ & ajoutée à la troisiéme multipliée par $2 \frac{dz}{ds\sqrt{x}}$, il vient, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $d \cdot (\frac{1}{x} - \frac{dx^2}{ds^2 x}) = 0$, savoir, en différentiant & divisant le tout par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$, $- \frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$ qui est la premiére équation.

Présentement, si l'on intégre les deux équations $d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} = 0$, on a $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, & $\frac{dz}{ds\sqrt{x}}$

 =

$= \frac{1}{\sqrt{b}}$; d'où l'on tire d'abord $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; ce qui fait voir que la courbe cherchée est toute dans un même plan vertical, & que par conséquent elle est à simple courbure. Pour la mieux connoître rapportons-là à deux coordonnées prises dans son même plan. Que x soit l'une, & t l'autre, on aura $\sqrt{(y^2 + z^2)} = t$, & puisque $\frac{dy}{dz} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, on aura en intégrant $z = y \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (je n'ajoute point de constante, parce que je suppose que l'axe des x passe par la courbe même); d'où l'on tire $z = t \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b)}}$, $y = t \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$, $dy = dt \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dt^2)}$, & enfin $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{b\,dt}}{\sqrt{(a+b)} \times \sqrt{x} \times \sqrt{(dx^2 + dt^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ce qui se réduit, en posant $\frac{ab}{a+b} = c$, à $dt = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(c-x)}}$, équation d'une cicloïde décrite sur une base horizontale par un cercle, dont le diamêtre $= c$.

I V.

Maintenant, si le premier & le dernier point de la brachristochrone sont donnés, il est clair que, les coordonnées x, y, z étant invariables pour ces points, leurs différences δx, δy, δz, $d\delta x$, $d\delta y$ &c. seront nulles, & par conséquent aussi tous les termes de l'équation (C); la constante c devra donc être déterminée en sorte, que la cicloide passe par les deux points donnés.

Si le premier point est donné, & que la brachristochrone doive être telle qu'un corps partant de ce point arrive dans le moindre tems à un plan horizontal donné, alors M sera

sera nul de lui même, & l'équation (C) donnera $M' = o$, savoir $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\delta y + \frac{dz}{ds\sqrt{x}}\delta z = o$, équation qui devra avoir lieu seulement dans le point où la courbe rencontre le plan ; or ce plan étant donné de position, l'abscisse x qui y répond sera donnée aussi, par conséquent on aura $\delta x = o$, & le reste de l'équation devra être vrai quelles que soient δy, & δz. On aura donc $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = o$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = o$, $a = \infty$, $b = \infty$, ce qui transformera la cicloïde en une droite verticale. Mais si le plan donné au lieu d'être horizontal, étoit vertical, & perpendiculaire à l'axe des y, ou des z, on auroit alors $\delta y = o$ & par conséquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = o$, $\frac{dz}{ds\sqrt{x}} = o$ pour le premier cas, & $\delta z = o$, & par conséquent $\frac{dx}{ds\sqrt{x}} = o$ $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = o$ pour le second ; par-là on détermineroit les constantes a, & b, & l'on trouveroit que la cicloïde devroit être telle qu'elle rencontrât le plan donné à angles droits.

En général si au lieu d'un plan, on prend une surface quelconque pour terme de la brachristocrhone, il est clair que les δx, δy, δz de l'équation (C) devront avoir entr'elles un rapport dépendant de la nature de la surface donnée ; de sorte, que $dz = Tdx + Vdy$ étant supposée l'équation différentielle de cette surface, on aura $\delta z = T\delta x + V\delta y$; donc substituant cette valeur de δz dans l'équation (C) on aura

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + T\frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right)\delta x + \left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}} + V\frac{dz}{ds\sqrt{x}}\right)\delta y = o;$$

d'où l'on tire séparément $dx + Tdz = o$; & $dy +$

$V dz = o$. Equations qui font connoître que la surface proposée doit toujours être coupée à angles droits par la courbe cherchée.

Si la brachristochrone doit simplement être terminée par deux surfaces données de position; alors pour remplir l'équation (C) il est nécessaire de faire séparément $M = o$, & $M' = o$; d'où l'on tire pour le premier, & le dernier point de la courbe les mêmes conditions qu'on a trouvé dans le cas précédent pour le dernier point seulement; on en conclura donc que la courbe cherchée sera celle, d'entre toutes les cicloides possibles, qui rencontrera perpendiculairement les deux surfaces proposées.

V.

Second cas. Supposons maintenant que la brachristochrone doive être toute couchée sur une surface donnée, dont l'équation soit $dz = pdx + qdy$; changeant la caractheristique d en δ, on aura donc $\delta z = p\delta x + q\delta y$, équation qui donne le rapport qu'il doit y avoir en général entre les différences δz, δy, δx. Substituant cette valeur de δz dans l'équation (B), & faisant ensuite les deux coéficiens de δx, & de δy chacun $= o$ on aura pour la courbe cherchée

$$-p d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} - \frac{ds}{2x\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = o$$

$$-q d \cdot \frac{dz}{ds\sqrt{x}} - d \cdot \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = o.$$

Ces équations reviennent au même, étant combinées avec l'équation à la surface $dz = pdx + qdy$. Car multipliant la premiére par $\frac{2dx}{ds\sqrt{x}}$, & la seconde par $\frac{2dy}{ds\sqrt{x}}$ & les joignant ensemble, on trouve, après toutes les

rédu-

réductions, $-d \cdot \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} = 0$. On prendra donc une de ces équations à volonté, & on la combinera avec l'équation $dz = pdx + qdx$, pour avoir la brachristochrone cherchée.

V I.

A l'égard de l'équation (C) il est clair que tous les termes de cette équation s'évanouïront, lorsque on supposera donnés le premier & le dernier point de la courbe; mais si l'un d'eux étoit arbitraire, alors aïant substitué au lieu de δz sa valeur $p\delta x + q\delta y$, on auroit les équations $p\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = 0$, & $q\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$, qu'il faudroit vérifier par rapport à ce point. Mais si l'on avoit tracée sur la surface une courbe, à laquelle le mobile dût arriver dans le tems le plus court; supposant cette courbe donnée par l'équation $dy = mdx$, on auroit de même $\delta y = m\delta x$; &, cette valeur de δy étant substituée dans l'équation (C) on feroit $p\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{ds\sqrt{x}} + (q\frac{dz}{ds\sqrt{x}} + \frac{dy}{ds\sqrt{x}})m = 0$, ou bien $(p + qm)dz + dx + mdy = 0$; équation qui renferme les conditions nécessaires pour que la brachristochrone rencontre à angles droits la courbe proposée.

V I I.

Remarque 1. M. Euler est le premier qui ait donné des formules générales pour trouver les courbes, dans lesquelles une fonction intégrale donnée est la plus grande, ou la plus petite; (*Voiés le Traité dont on a fait mention plus haut*) mais

mais les formules de cet Auteur sont moins générales que les notres; 1.° parce qu'il ne fait varier que la seule changeante y dans l'expression Z; 2.° parce qu'il suppose, que le premier & le dernier point de la courbe sont fixes. En introduisant ces conditions dans nos formules, elles deviendront entiérement conformes à celles du Prob. V. du Traité cité; il faudra seulement mettre Zdx au lieu de Z, & ensuite $\frac{P}{dx}$, $\frac{Q}{dx^2}$ &c. au lieu de P, Q &c., dx étant constant.

VIII.

REMARQUE 2. Soit supposé $dy = Adx$, $dA = Bdx$ &c. $dz = \alpha dx$, $d\alpha = \beta dx$ &c. il est clair, qu'en substituant ces valeurs dans l'expression Z, elle prendra cette forme Xdx, où X sera une fonction quelconque algébrique des variables finies x, y, z, A, B &c. α, β &c.; faisons donc $\delta X = N'\delta x + n'\delta y + \nu'\delta z + P'\delta A + Q\delta B +$ &c. $+ \pi'\delta\alpha + \chi'\delta\beta +$ &c. on aura $\delta Z = \delta\cdot Xdx = \delta Xdx + X\delta dx = \delta Xdx + \frac{Z\delta dx}{dx} = N'dx\delta x + \frac{Z}{dx}\delta dx + n'dx\delta y + \nu'dx\delta z + P'dx\delta A + Q'dx\delta B +$ &c. $+ \pi'dx\delta\alpha + \chi'dx\delta\beta +$ &c. Or $dy = Adx$, $d^2y = Bdx^2 + Ad^2x$, &c. donc $\delta dy = \delta Adx + A\delta dx$, $\delta d^2y = \delta Bdx^2 + \delta Ad^2x + 2Bdx\delta dx + A\delta d^2x$, &c.; on trouvera de même $\delta dz = \delta\alpha dx + \alpha\delta dx$, $\delta d^2z = \delta\beta dx^2 + \delta\alpha d^2x + 2\beta dx\delta dx + \alpha\delta d^2x$, &c.; substituant ces valeurs dans l'expression de δZ, & ordonnant les termes on aura $\delta Z = n\delta x + (p + PA + 2QBdx +$ &c. $+ \pi\alpha + 2\chi\beta dx +$ &c.$)\delta dx + (q + QA +$ &c. $+ \chi\alpha +$ &c.$)\delta d^2x +$ &c. $+ N\delta y + \nu\delta z + (Pdx + Qd^2x +$ &c.$)\delta A + (Qdx^2 +$ &c.$)\delta B +$ &c. $+ (\pi dx + \chi d^2x +$ &c.$)$

&c.) $\delta\alpha$ + ($\chi\, dx^2$ + &c.) $\delta\beta$ + &c. Cette valeur de δZ doit être identique avec celle qu'on trouvé précédemment; comparant donc les termes affectés de $\delta\, dx$, $\delta\delta^2 x$ &c. on aura les équations $\frac{Z}{dx} = p + PA + 2QB\,dx$ + &c. + $\pi\alpha + 2\chi\beta\, dx$ + &c. $q + QA$ + &c. + $\chi\alpha$ + &c. $= 0$.

La seconde étant différentiée, & ensuite retranchée de la première, on a $\frac{Z}{dx} = p - dq$ + &c. + $PA + QB\,dx - dQA$ + &c. + $\pi\alpha + \chi\beta\, dx - d\chi\alpha$ + &c. $= 0$. La même èquation étant multipliée par d^2x, & ensuite ajoutée à celle-ci multipliée par dx, il vient $Z = p\,dx + P\,dy + \pi\, dz + q\, d^2x - dq\,dx + Qd^2y - dQdy + \chi\, d^2z - d\chi\, dz$ + &c. Différentiant, & effaçant ce qui se détruit, on aura, à cause de $dZ = n\,dx + N dy + \nu\, dz + p\, d^3x + P\, d^3y$ + &c., $(n - dp + d^2q$ + &c.$)\, dx + (N - dP + d^2Q$ + &c.$)\, dy + (\nu - d\pi + d^2\chi$ − &c.$)\, dz = 0$; équation qui est d'elle même identique, & qui montre par conséquent, que les équations trouvées à la fin de *l'Art. I.* sont telles, que si on en prend deux à volonté, la troisiéme s'ensuit toujours nécessairement.

I X.

Probleme 2. Rendre la formule $\int Z$ un *maximum*, ou un *minimum*, en supposant que Z est une fonction quelconque algébrique composée des changeantes x, y, z avec leurs différences dx, dy, dz, d^2x, d^2y &c., & de la quantité $\Pi = \int Z'$, Z' étant une autre fonction algébrique quelconque des seules changeantes x, y, z &c., & de leurs différences dx, dy, dz, d^2x, d^2y &c.

Solution. Soit, en différentiant par δ, & ne regardant que y comme variable, $\delta Z = L\delta\Pi + n\delta x + p\delta dx$ +

$+ q\delta d^2x + $ &c. $+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y +$ &c. $+ \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z +$ &c. & $\delta Z' = n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c. $+ N'\delta y + P'\delta dy + Q'\delta d^2y +$ &c. $+ \nu'\delta z + \pi'\delta dz + \chi\delta d^2z +$ &c., on aura, par l'hipothèse, $\delta\Pi = \delta\int Z' = \int\delta Z' = \int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c. $]$, donc $\delta\cdot\int Z = \int\delta Z = \int[n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x +$ &c. $] + \int L\int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c. $]$. La première partie se réduira, comme dans le Prob. 1., à $\int(n - dp + d^2q -$ &c.$)\delta x + (p - dq +$ &c.$)\delta x + (q -$ &c.$)d\delta x +$ &c. A l'égard de la seconde on la transformera d'abord en $\int L \times \int[n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$] - \int[\int L \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$)]$.

Or soit la valeur totale de l'intégrale $\int L$ représentée par H, prenant cette quantité H pour constante, la transformée précédente se réduira à celle-ci

$\int[(H - \int L) \times (n'\delta x + p'\delta dx + q'\delta d^2x +$ &c.$)]$

laquelle se transformera aisément, par des intégrations par parties, en

$\int[n'(H - \int L) - d\cdot p'(H - \int L) + d^2\cdot q'(H - \int L) -$ &c.$]\delta x$

$+ [p'(H - \int L) - d\cdot q'(H - \int L) +$ &c.$]\delta x$

$+ [q'(H - \int L) -$ &c.$]d\delta x +$ &c.

Posant donc pour abréger

$n + n'(H - \int L) = (n)$, $p + p'(H - \int L) = (p)$ $q + q'(H - \int L) = (q)$ &c., & de même $N + N'(H - \int L) = (N)$, $P + P'(H - \int L) = (P)$ $P + Q'(H - \int L) = (Q)$ &c. comme aussi $\nu + \nu'(H - \int L) = (\nu)$, $\pi + \pi'(H - \int L) = (\pi)$, $\chi + \chi'(H - \int L) = (\chi)$ &c., on aura en général

$\delta\cdot\int Z = \int[(n) - d\cdot(p) + d^2(q) -$ &c.$]\delta x$

$+ \int[(N) - d\cdot(P) + d^2(Q) -$ &c.$]\delta y$

$+ \int[(\nu) - d\cdot(\pi) + d^2(\chi) -$ &c.$]\delta x$

$+ [(p) - d\cdot(q) +$ &c.$]\delta x + [(q) -$ &c.$]\delta dx +$ &c.

$+ [(P) - d\cdot(Q) +$ &c.$]\delta y + [(Q) -$ &c.$]\delta dy +$ &c.

$+ [(\pi) - d \cdot (\chi) + \&c.] \delta z + [(\chi) - \&c.] \delta d z + \&c.$ $= 0$ . . . . (D) Equation réduite à la forme de l'équation (A) du Prob. préc. ; donc &c.

X.

Corollaire. Ce seroit la même méthode qu'il faudroit suivre si la quantité Z' renfermoit une autre fonction intégrale indéfinie $\Pi' = \int Z''$, ensorte que $\delta Z' = L' \delta \Pi' + n' \delta x + p' \delta dx + \&c.$, & $\delta Z'' = n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c. + N'' \delta y + P'' \delta dy + Q'' \delta d^2 y + \&c. + \nu'' \delta z + \pi'' \delta dz + \chi'' \delta d^2 z + \&c.$ Alors l'expression de $\delta \int Z$ seroit augmentée de la formule $\int L \int L' \int (n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)$; or cette formule se réduit d'abord à $\int [(H - \int L) L' \int (n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)]$, & ensuite à $\int [(H' - \int (H - \int L) L') \times (n'' \delta x + p'' \delta dx + q'' \delta d^2 x + \&c.)]$, en posant H' pour la valeur totale de l'intégrale $\int (H - \int L) L'$. Par conséquent il n'y aura qu'à augmenter, dans la formule (D), la valeur de (n) de la quantité $n'' [H' - \int (H - \int L) L]$, celle de (p) de la quantité $p'' [H' - \int (H - \int L) L]$, & ainsi des autres.

Il est aisé de voir maintenant le procédé qu'il faudroit suivre si la formule Z'' contenoit encore une autre formule intégrale $\int Z'''$, & ainsi de suite.

X I.

Probleme 3. Trouver l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de la formule $\int Z$, lorsque Z est donné simplement par une équation différentielle qui ne renferme d'autres différences de Z que la première.

Solution. Quelle que soit l'équation proposée, pourvû qu'elle soit délivrée de tout signe d'intégration, il est clair, qu'en la différentiant par δ, on pourra toujours la mettre

 sous

sous la forme suivante $\delta dZ + T\delta Z = n\delta x + p\delta dx$ + &c. + $N\delta y + P\delta dy$ + &c. + $\nu\delta z + \pi\delta dz$ + &c.; d'où l'on tirera, à cause de $\delta dZ = d\delta Z$, la valeur de δZ exprimée par $e^{-\int T}\int e^{\int T}(n\delta x + p\delta dx + \&c.)$, & delà $\delta\int Z = \int e^{-\int T}\int e^{\int T}(n\delta x + p\delta dx + \&c.)$.

En suivant les principes établis dans le Problême précédent, on supposera que G soit la valeur totale de $\int e^{-\int T}$, & faisant ensuite $n e^{\int T}(G - \int e^{-\int T}) = (n)$, $p e^{\int T}(G - \int e^{-\int T}) = (p)$, $q e^{\int T}(G - \int e^{-\int T}) = (q)$ &c., on trouvera pour l'expression de $\delta\int Z$ une formule tout-à-fait semblable à la formule (D) ci-dessus.

XII.

Scholie. Les formules qui font l'objet des deux Problêmes précédens, sont analogues à celles que M. Euler a traitées dans le Chap. III. de son Ouvrage sur cette matiére.

Le Lecteur qui sera curieux de comparer nos solutions avec celles que ce savant Auteur a trouvées par une méthode différente verra qu'elles s'accordent dans les résultats, en aïant égard à ce qu'on a dit dans *l'Art.* VII. *ci-dessus*. Au reste M. Euler n'est pas allé plus loin, & n'a point examiné les cas où la formule Z dépendroit d'une équation différentielle, d'un ordre plus élévé que le premier. Le Corollaire suivant ne laissera plus rien à désirer sur ce sujet.

XIII.

Corollaire. Supposons que dans l'équation différentielle proposée il se trouve des différences de Z du second ordre; de sorte qu'en différentiant par δ, il vienne $\delta d^2 Z + T\delta dz + V\delta Z = n\delta x + p\delta dx$ + &c. Je commence par mettre la caractéristique d avant la caractéristique δ, ensuite je multiplie toute l'équation par une variable indéter-

déterminée α, & j'en prend la somme, en affectant les deux membres du signe $\int$; après je transforme le premier membre $\int(\alpha d^2 \delta Z + \alpha T d \delta Z + \alpha V \delta Z)$ en $\alpha d \delta Z + (\alpha T - d\alpha) \delta Z + \int[\alpha V - d \cdot (\alpha T - d\alpha)] \delta Z$, & supposant α tel que $\alpha V - d \cdot (\alpha T - d\alpha) = 0$, j'ai l'équation $d \delta Z + \frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha} \delta Z = \frac{1}{\alpha} \int(n \delta x + p \delta dx$ $+ \&c.) \alpha$; d'où l'on tire aisément $\delta Z = e^{-\int T'} \int \frac{e^{\int T'}}{\alpha}$ $\int(n \delta x + p \delta dx + \&c.) \alpha$; T' étant mis pour $\frac{\alpha T - d\alpha}{\alpha}$; & enfin $\delta \cdot \int Z = \int e^{-\int T'} \int \frac{e^{\int T'}}{\alpha} \int(n \delta x + p \delta dx + \&c.) \alpha$, formule qui est dans le cas de celle qu'on a traitée dans l'*Art.* X.

Par des procédés semblables on trouvera l'expression de $\delta \cdot \int Z$ lorsque δZ sera donnée par une équation différentielle du troisiéme ordre, & au delà, & cette expression sera toujours susceptible de la métode expliquée dans le Prob. II.

X I V.

Remarque. L'équation de condition $\alpha V - d \cdot (\alpha T - d\alpha) = 0$ est du second ordre, & ne peut-être intégrée que dans certains cas particuliers; mais notre solution n'en est pas moins générale. Car, pour délivrer l'équation du *maximum*, ou du *minimum* de l'inconnue α, il ne faudra que la combiner avec la précédente par le moïen de plusieurs différentiations réitérées; il n'y aura de difficulté que la longueur du calcul.

X V.

Scholie. Il est clair que la méthode du Corol. préc. suffit pour déterminer les *maxima*, & les *minima* de toutes

les formules intégrales imaginables; car dénotant par Π la formule proposée, il sera toujours possible d'exprimer Π par une équation différentielle, qui ne renferme aucun signe d'intégration; ainsi l'on aura, en différentiant par δ, une nouvelle équation qui contiendra $\delta\Pi$ avec ses différences $d\delta\Pi$ &c., & on en tirera l'expression intégrale de $\delta\Pi$, & par conséquent l'équation du *maximum*, ou *minimum* par les régles enseignées.

APPENDICE I.

Par la méthode qui vient d'être expliquée on peut aussi chercher les *maxima*, & les *minima* des surfaces courbes, d'une maniére plus générale qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Pour ne donner là-dessus qu'un exemple très-simple, supposons qu'il faille trouver la surface qui est la moindre de toutes celles qui ont un même périmètre donné. Aiant pris trois coordonnées rectangles x, y, z, & la surface étant supposée représentée par l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, on trouvera pour l'élément de la quadrature $dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$; par conséquent la surface entiére sera $= \iint dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$, où les deux signes $\iint$ marquent deux intégrations successives, l'une par rapport à x & l'autre par rapport à y, ou réciproquement. On aura donc, suivant notre métode, $\delta\cdot\iint dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)} = 0$ ce qui se réduit d'abord à $\iint\delta\cdot dx\,dy\sqrt{(1+p^2+q^2)}$ $=$ (en différentiant, & supposant dx, dy constantes) $\iint dx\,dy\,\frac{p\,\delta p + q\,\delta q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = 0$. Or $p = (\frac{dz}{dx})$, $q = (\frac{dz}{dy})$; donc $\delta p = (\frac{\delta dz}{dx}) = (\frac{d\delta z}{dx})$, $\delta q = (\frac{\delta dz}{dy}) = (\frac{d\delta z}{dy})$; donc $\iint dx\,dy\,\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dx}) + \iint dx dy$

$\frac{q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dy}) = 0$. Maintenant, comme dans l'expreſſion $(\frac{d\delta z}{dx})$, $d\delta z$ exprime la différence de δz, x ſeul étant variable, il eſt clair que pour faire diſparoître cette différence, il ne faudra conſidérer, dans la formule $\iint dx\,dy \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{\delta dz}{dx})$, que l' intégration rélative à x; ſoit donc pris l'intégrale $\int dx \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dx})$, où x ſeul varie; il eſt facile de la transformer par des intégrations par parties, en $\frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \delta z - \int d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times \delta z$, ce qui ſe réduit, en ſuppoſant les premiers & les derniers z donnés, à $-\int d \cdot \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times \delta z$, la différentielle de $\frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ étant priſe en variant ſeulement x. Soit, pour abreger, $\frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} = P$; on aura, en multipliant par dy & intégrant de nouveau, $\int dy \int dx \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dx})$, ou (ce qui eſt la même choſe) $\iint dx\,dy \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dx}) = -\int dy \int dx\, (\frac{dP}{dx}) \delta z, = -\iint dx\,dy\, (\frac{dP}{dx}) \delta z$. On trouvera de même, en n'aïant égard qu'à la variabilité de y, & poſant Q pour $\frac{q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$, $\int dy \frac{q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dy}) = Q\delta z - \int dy\, (\frac{dQ}{dy}) \delta z = -\int dy\, (\frac{dQ}{dy}) \delta z$, & $\iint dx\,dy \frac{q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} \times (\frac{d\delta z}{dy}) = -$

$\iint dx$

$\iint dx\,dy\,(\frac{dQ}{dy})\,\delta z$. Substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, elle deviendra $-\iint dx\,dy\,[(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$, laquelle devra être vraie indépendenment de δz; on aura donc en général, pour tous les points de la surface cherchée, $(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy}) = 0$; ce qui montre que cette quantité $P\,dy - Q\,dx$, savoir $\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ doit être une différentielle complette. Le Problême se réduit donc à chercher p & q par ces conditions que $p\,dx + q\,dy$, & $\frac{p\,dy - p\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$ soient l'une & l'autre des différentielles exactes.

Il est d'abord clair qu'on satisfera à ces conditions en faisant p & q constantes, ce qui donnera un plan quelconque pour la surface cherchée, mais ce ne sera là qu'un cas très-particulier; car la solution générale doit être telle que le périmétre de la surface puisse être déterminé à volonté.

Si la surface cherchée ne devoit être un *minimum*, qu'entre toutes celles qui forment des solides égaux, alors $z\,dx\,dy$ étant l'élément du solide, il faudroit que la formule $\iint z\,dx\,dy$ demeurât la même pendant que l'autre la formule $\iint dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ varie; on auroit donc à la fois les deux équations $\delta\cdot\iint z\,dx\,dy = 0$, & $\delta\cdot\iint dx\,dy\,\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = 0$, savoir $\iint dx\,dy\,\delta z = 0$, & $\iint dx\,dy\,[(\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$. Qu'on multiplie la premiére par un coéficient quelconque k, & qu'on l'ajoute à la seconde, on aura $\iint dx\,dy\,[k + (\frac{dP}{dx}) + (\frac{dQ}{dy})]\,\delta z = 0$, d'où l'on tire l'équation générale $k + (\frac{dP}{dx})$

+

$+ \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0$, qui aura lieu toutes les fois que $(P + kx)\,dy - Q\,dx$ fera une différentielle complette. Donc la queſtion ſera réduite à chercher p, & q par cette condition que $p\,dx + q\,dy$ étant une différentielle exacte, $\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} + k\,x\,dy$ en ſoit une auſſi.

L'équation de la ſphére eſt en général $(z - a)^2 + (y - b)^2 + (x - c)^2 = r^2$; ce qui donne

$$dz = \frac{(y - b)\,dy + (x - c)\,dx}{\sqrt{[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]}},\ \text{donc}$$

$$p = \frac{x - c}{\sqrt{[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]}},$$

$$q = \frac{y - b}{\sqrt{[r^2 - (y - b)^2 - (x - c)^2]}},\ \text{donc}$$

$$\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}} + k\,x\,dy = \left(\frac{1}{r} + k\right) x\,dy - \frac{1}{r}\,y\,dx + \frac{b\,dx - c\,dy}{r},$$

qui eſt une différentielle complette ſi $\frac{1}{r} + k = -\frac{1}{r}$.

Appendice 2.

Soit propoſé de trouver celui, d'entre tous les poligones qui ont un nombre donné de côtés donnés, dont l'aire eſt la plus grande. La méthode de ce Mémoire eſt auſſi applicable à ces ſortes de queſtions; car ſoit y une ordonnée quelconque du poligone, & x l'abſciſſe correſpondante, on aura pour l'élément fini de l'aire, $(y + \frac{1}{2}\,dy)\,dx$ comme il eſt aiſé de s'en aſſurer par l'inſpection d'une figure fort ſimple; par conſéquent l'aire entiére ſera $\int (y + \frac{1}{2}\,dy)\,dx$. Donc, ſuivant notre méthode, $\delta \cdot \int (y + \frac{1}{2}\,dy)\,dx = \int [\delta y\,dx + \frac{1}{2}\,\delta dy\,dx + (y + \frac{1}{2}\,dy)\,\delta dx] = 0$. Or chaque

chaque côté du poligone eſt en général $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc on aura $\delta \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = o$, c'eſt-à-dire $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy = o$, & $\delta dx = -\frac{dy\,\delta dy}{dx}$; ſubſtituant cette valeur de δdx dans l'équation précédente, elle deviendra celle-ci $\int[dx\,\delta y + (\frac{1}{2}dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx})\,\delta dy] = o$. Qu'on mette au lieu de δdy ſon égale $d\delta y$, & qu'on faſſe pour abréger $\frac{1}{2}dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx} = z$, on aura la formule $z\,d\delta y$ qu'il faudra intégrer par parties, afin de faire diſparoître la différence de δy. Pour cela je remarque que dans le cas des différences finies, on a $d \cdot z\,\delta y = dz\,\delta y + z\,d\delta y + dz\,d\delta y = z\,d\delta y + dz\,(\delta y + d\delta y) =$ (en dénotant par $\delta y'$ le terme qui ſuit δy) $z\,d\delta y + dz\,\delta y'$; donc $z\,\delta y = \int z\,d\delta y + \int dz\,\delta y'$, donc $\int z\,d\delta y = z\,\delta y - \int dz\,\delta y'$, où (ce qui eſt la même choſe) $z\,dy - \int d'z\,\delta y$, $d'z$ étant le terme qui précéde dz, & qui par conſéquent, eſt multiplié par δy; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation ci-deſſus, elle deviendra $z\,\delta y + \int(dx - d'z)\,\delta y = o$.

Suppoſons que le poligone coupe l'axe en deux points, en ſorte que le premier, & le dernier y ſoient nuls, auſſi bien que leurs différences δy; le terme $z\,\delta y$ qui eſt *hors du* ſigne $\int$, diſparoîtra; & l'on aura ſimplement $\int(dx - d'z)\,\delta y = o$; ce qui donnera en général $dx - d'z = o$; c'eſt-à-dire, en intégrant, $a = x - 'z = x' - z = x + dx - z = x + dx - \frac{1}{2}dx + \frac{y\,dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}$; multipliant par dx eſt réduiſant, on aura $a\,dx = (x + \frac{1}{2}dx)\,dx + (y + \frac{1}{2}dy)\,dy = \frac{1}{2}d \cdot x^2 + \frac{1}{2}d \cdot y^2$; & intégrant de nouveau, $2ax + r^2 = x^2 + y^2$. Equation à un cercle,

cle, dont le centre eſt dans l'axe des x, donc l'on voit que le poligone cherché doit être tel qu'il puiſſe être inſcrit dans la demie circonférence d'un cercle.

Si la baſe du poligone étoit donnée, alors il faudroit que le dernier δx fût $= 0$; or $\delta x = -\int \frac{dy\,d\delta y}{dx}$; il faudroit donc que la valeur totale de $\int \frac{dy\,d\delta y}{dx}$ fût $= 0$ en même tems que celle de $\int [dx \delta y + (\frac{1}{2} dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}) d\delta y]$ eſt auſſi $= 0$. Pour cela ſoit multipliée la premiére formule par un coéficient indéterminé k, & enſuite ajoutée à la ſeconde, on aura

$$\int [dx \delta y + (k\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}) d\delta y] = 0;$$

donc, faiſant $k\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} dx - \frac{y\,dy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx} = z$, on parviendra, comme ci-deſſus, à l'équation $a = x + dx - z$, qui ſe réduit, en multipliant par dx, à $a\,dx = k\,dy + \frac{1}{2} d \cdot x^2 + \frac{1}{2} d \cdot y^2$, dont l'intégrale eſt $ax + b^2 = ky + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2$; équation pour un cercle en général; d'où réſulte ce Théoréme, que le plus grand poligone qu'on puiſſe former avec des côtés donnés eſt celui qui peut être inſcrit dans un cercle.

M. Cramer a démontré ce théoréme ſyntétiquement dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1752.

Si l'on veut que les cotés du poligone ne ſoient pas donnés chacun en particulier, mais ſeulement leur ſomme, c'eſt-àdire le périmètre du poligone, on fera ſimplément égale à zéro la différence de l'intégrale $\int \surd (dx^2 + dy^2)$; ce qui donnera l'équation $\delta \cdot \int \surd (dx^2 + dy^2)$

 $= \int$

$= \int \frac{dx\delta dx + dy\delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 0$, laquelle devra avoir lieu en même tems que l'équation du *maximum* $\int [dx\delta y + \frac{1}{2} dx\delta dy + (y + \frac{1}{2} dy)\delta dx] = 0$. Multipliant donc une de ces équations, par un coéficient indéterminé k, & les ajoutant ensemble, on aura en général $\int [dx\delta y + (\frac{1}{2}dx + \frac{kdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}})\delta dy + (y + \frac{1}{2}dy + \frac{kdx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}})\delta dx] = 0$. Soit supposé $\frac{1}{2}dx + \frac{kdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = z$, & $y + \frac{1}{2}dy + \frac{kdx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = u$, on aura $\int (dx\delta y + z\delta dy + u\delta dx) = 0$, équation qui se transforme, par la même méthode que ci-dessus, en $z\delta y + u\delta x - \int [(dx - dz)\delta y - du\delta x) = 0$, d'où l'on tire $dx - dz = 0$, & $du = 0$; on aura donc, en intégrant, $x - z = a$, savoir $x + dx - z = a$, & $u = b$, savoir $u = b$; c'est-à-dire, en substituant pour z & u leurs valeurs, $x + \frac{1}{2}dx - \frac{kdy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = a$, $y + \frac{1}{2}dy + \frac{kdx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = b$.

Qu'on multiplie la première par dx, & la seconde par dy, & qu'ensuite on les ajoute ensemble, il viendra $(x + \frac{1}{2}dx)dx + (y + \frac{1}{2}dy)dy = adx + bdy$; & en intégrant $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = ax + by + r^2$, équation à un cercle en général. Qu'on reprenne les mêmes équations, & qu'on les quarre, après avoir transposé les termes $x + \frac{1}{2}dx$ & $y + \frac{1}{2}dy$, on aura $\frac{k^2dy^2}{dx^2 + dy^2} = (a - x - \frac{1}{2}dx)^2$, $\frac{k^2dx^2}{dx^2 + dy^2} = (b - y - \frac{1}{2}dy)^2$; ces équations étant ajoutées ensemble donnent, $k^2 = (a - x - \frac{1}{2}dx)^2 + (b - y - \frac{1}{2}dy)^2 = a^2 + b^2 - 2ax - 2by$;

+

$+ x^2 + y^2 - (a-x)\,dx - (b-y)\,dy + \frac{1}{4}dx^2 + \frac{1}{4}dy^2$ $=$ [à cause de $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2$, & $(a-x)\,dx + (b-y)\,dy = \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2}dy^2$] $a^2 + b^2 + r^2 - \frac{1}{4}dx^2 - \frac{1}{4}dy^2$; donc $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\sqrt{(a^2 + b^2 + r^2 - k^2)}$ ce qui montre que tous les côtés du poligone doivent être égaux entr'eux, & que par conséquent le poligone doit être régulier.

A l' égard des termes $z\delta y$, $u\delta x$, il est clair que ces termes disparoîtront d' eux mêmes, si on suppose les premiers, & les derniers x, & y donnés; mais si la base du poligone étant donnée, & $= c$, le y qui y répond ne ne l' étoit pas, il faudroit faire u & $z = 0$, lorsque $x = c$; on auroit donc $b = 0$, $c = a$, & la base c deviendroit le diamètre du cercle circoncrit au poligone.

Fautes à corriger dans le Mémoire précédent.

Pag. 173. *lign.* 16.; Brachtystochrone; *lisez* Brachystochrone. *Faites la même correction dans la suite du Mémoire.*

Pag. 174. *lign.* 1. de calcul; *lisez* du calcul.
dans la lign. 9. *de l'Art. I.* les quantités x, y, z, d^2x, d^2y, d^2z, *&c.*; *mettez* les quantités x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z *&c.*

Pag. 175. *dans la ligne* 5. *de l' équation* (C); *changez* δx *en* δz.

Pag. 177. *dans la ligne* 4. *de l'Art. III. au lieu de* $dP = 0$, $dP' = 0$; *écrivez* $- dP = 0$; $- d\pi = 0$.

Pag. 182. *dans la ligne* 16. de l' Art. VIII. *après ces mots* l' expression de δZ; *ajoutez pour plus d' intelligence* de l' Art. I.

Application de la Méthode précédente à la solution de différens Problèmes de Dynamique.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. Euler dans une Addition à son excellent Ouvrage qui a pour titre *Methodus maximorum &c.* a démontré ce Principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

Je me propose ici de généraliser ce même Principe, & d'en faire voir l'usage pour résoudre avec facilité toutes les questions de Dynamiques.

Principe général.

Soient tant de corps qu'on voudra M, M'; M'' &c. qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, & qui soient, de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionelles à des fonctions quelconques des distances; que s, s', s'' &c. dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le tems t, & que u, u', u'' &c. soient leurs vitesses à la fin de ce tems; la formule $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds''$ + &c. sera toujours un *maximum*, ou un *minimum*.

I.

Probleme 1. Trouver le mouvement d'un corps M attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces P, Q, R &c. exprimées par des fonctions quelconques des distances.

Solu-

SOLUTION. Comme il n'y a ici qu'un seul corps M, la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* sera simplement $M\int u\,ds$; on aura donc, suivant la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, l'équation $\delta \cdot M\int u\,ds = 0$, ou, en divisant par M qui est constante, $\delta \cdot \int u\,ds = 0$. Or $\delta \cdot u\,ds = u\,\delta\,ds + \delta u\,ds$; donc changeant l'expression $\delta \cdot \int u\,ds$ en son équivalente $\int \delta \cdot u\,ds$, comme on l'a enseigné (*Art. I. Mém. précéd.*) on aura l'équation $\int(u\,\delta\,ds + \delta u\,ds) = 0$.

Soient p, q, r *&c.* les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R *&c.*, on aura, comme tous les Géométres le savent, $\frac{u^2}{2} = \text{const.} - \int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.)$ donc $u\,\delta u = -\delta \cdot \int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.) = -\int(\delta P\,dp + P\,\delta dp + \delta Q\,dq + Q\,\delta\,dq + \delta R\,dr + R\,\delta\,dr + \&c.) =$ (en changeant $\delta\,dp$, $\delta\,dq$, $\delta\,dr$ *&c.* en $d\,\delta p$, $d\,\delta q$, $d\,\delta r$ *&c.* & intégrant par parties les termes $P\,d\,\delta p$, $Q\,d\,\delta q$, $R\,d\,\delta r$ *&c.*) $-P\,\delta p - Q\,\delta q - R\,\delta r - \&c. + \int(\delta P\,dp - dP\,\delta p + \delta Q\,dq - dQ\,\delta q + \delta R\,dr - dR\,\delta r + \&c.)$. Or (*hip.*) $P =$ fonct. p, $Q =$ fonct. q, $R =$ fonct. r *&c.*, on trouvera donc, en différentiant $\frac{\delta P}{\delta p} = \frac{dP}{dp}$, $\frac{\delta Q}{\delta q} = \frac{dQ}{dq}$, $\frac{\delta R}{\delta r} = \frac{dR}{dr}$ *&c.*, & par conséquent $\delta P\,dp - dP\,\delta p = 0$, $\delta Q\,dq - dQ\,\delta q = 0$, $\delta R\,dr - dR\,\delta r = 0$ *&c.*; donc $u\,\delta u = -P\,\delta p - Q\,\delta q - R\,\delta r - \&c.$, & $\delta u\,ds = -P\,dt\,\delta p - Q\,dt\,\delta q - R\,dt\,\delta r - \&c.$, en mettant au lieu de $\frac{ds}{u}$ son égale dt; donc l'équation ci-dessus se changera en celle-ci

$$\int(u\,\delta\,ds - P\,dt\,\delta p - Q\,dt\,\delta q - R\,dt\,\delta r - \&c.) = 0 \quad . \; . \; (A)$$

Il faut maintenant chercher le rapport que les différences δp, δq, δr, $\delta\,ds$ ont entr'elles; ce qui se fera différemment

ment selon les différentes sortes de coordonnées, qu'on emploiera pour représenter la trajectoire. Et premiérement soient prises trois coordonnées rectangles x, y, z; on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; par conséquent $\delta ds = \frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds}$ = (en changeant δdx &c. en $d\delta x$ &c.) $\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}$; donc $\int u\delta ds = \int(\frac{udx}{ds}d\delta x + \frac{udy}{ds}d\delta y + \frac{udz}{ds}d\delta z)$. Qu'on fasse disparoître dans cette expression les différentielles de δx, δy, δz par la méthode des intégrations par parties, pratiquée dans le Mém. préc., on aura la transformée suivante

$$\int u\delta ds = -\int(d\cdot\frac{udx}{ds}\times\delta x + d\cdot\frac{udy}{ds}\times dy + d\cdot\frac{udz}{ds}\times\delta z) + \frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}\delta z.$$

Il ne s'agit plus que d'exprimer les différences δp, δq, δr &c. par les δx, δy, δz. Pour cela on cherchera les valeurs analitiques des lignes p, q, r &c. rapportées aux coordonnées x, y, z, & en prendra leurs différentielles, en mettant δ pour d. Soit supposé en général $dp = Ldx + ldy + \lambda dz$, $dq = Mdx + mdy + \mu dz$, $dr = Ndx + ndy + \nu dz$; il est clair qu'on aura aussi $\delta p = L\delta x + l\delta y + \lambda\delta z$, $\delta q = M\delta x + m\delta y + \mu\delta z$, $\delta r = N\delta x + n\delta y + \nu\delta z$. Donc si on fait pour abréger

$$PL + QM + RN = \Pi$$
$$Pl + Qm + Rn = \pi$$
$$P\lambda + Q\mu + R\nu = \Psi,$$ on aura

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c. = \Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z.$$

Faisant toutes ces différentes substitutions dans l'équation (A), elle deviendra

$$(B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}\delta z$$

—

$$-\int([d\cdot\frac{udx}{ds}+\Pi dt]\delta x+[d\cdot\frac{udy}{ds}+\pi dt]\delta y$$
$$+[d\cdot\frac{udz}{ds}+\Psi dt]\delta z)=0;$$

Equation qui doit avoir lieu, quelques valeurs qu'on suppose aux différences δx, δy, δz; c'eſt pourquoi l'on fera les trois équations ſuivantes:

$$d\cdot\frac{u\,dx}{ds}+\Pi dt=0$$
$$d\cdot\frac{u\,dy}{ds}+\pi dt=0$$
$$d\cdot\frac{u\,dz}{ds}+\Psi dt=0.$$

Ce ſont ces équations qui ſerviront à déterminer la courbe décrite par le corps M, & ſa viteſſe à chaque inſtant.

Si on met dt au lieu de $\frac{ds}{u}$, qu'on multiplie la premiére équation par $\frac{dx}{dt}$, la ſeconde par $\frac{dy}{dt}$, la troiſiéme par $\frac{dz}{dt}$, & qu'enſuite on les intégre, on aura $\frac{dx^2}{2dt^2}=a^2-\int\Pi dx$, $\frac{dy^2}{2dt^2}=b^2-\int\pi dy$, & $\frac{dz^2}{2dt^2}=c^2-\int\Psi dz$; d'où l'on tire en chaſſant dt, & extraïant la racine quarrée

$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-\int\Pi dx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(b^2-\int\pi dy)}}$$
$$\frac{dx}{\sqrt{(a^2-\int\Pi dx)}}=-\frac{dz}{\sqrt{(c^2-\int\Psi dz)}};$$

Equations, où les indéterminées ſeront ſéparées ſi $\Pi =$ fonct. x, $\pi =$ fonct. y, $\Psi =$ fonct. z.

II.

I I.

REMARQUE. Quant aux termes $\frac{udx}{ds}\delta x + \frac{udy}{ds}\delta y + \frac{udz}{ds}dz$; on pourra se dispenser d'y avoir égard, en supposant que les deux extrémités de la trajectoire soient données de position; car cette supposition fera évanoüir les premiers & les derniers δx, δy, δz, & par conséquent aussi tous les termes en question. (*Voïés l'Art. IV. du Mém. préc.*)

I I I.

COROLLAIRE. Imaginons que le mobile M sollicité par les mêmes forces P, Q, R *&c.* soit contraint de se mouvoir sur une surface courbe donnée par l'équation $dz = pdx + qdy$; en changeant d en δ, on aura $\delta z = p\delta x + q\delta y$; substituant cette valeur de δz dans l'équation (B), & faisant les deux coéficiens de δx, & δy chacun $= 0$, on aura

$$d\cdot\frac{udx}{ds} + \Pi dt + [d\cdot\frac{udz}{ds} + \Psi dt]p = 0$$

$$d\cdot\frac{udy}{ds} + \pi dt + [d\cdot\frac{udz}{ds} + \Psi dt]q = 0;$$

Deux équations, qui, avec l'équation donnée $dz = pdx + qdy$, suffiront pour résoudre le Problême.

I V.

AUTRE SOLUTION. Qu'on prenne, à la place des deux coordonnées rectangles x, y, un rayon variable x qui tourne autour d'un point fixe dans le même plan des x & y, & dont la position à chaque instant soit déterminée

par

par un angle φ. Conservant la troisiéme coordonnée z, qu'on imaginera élevée de l'extrémité du rayon x perpendiculairement au plan de l'angle φ, il est facile de trouver que l'élément ds de la courbe sera $= \sqrt{(x^2 d\varphi^2 + dx^2 + dz^2)}$; ainsi on aura en différentiant $\delta ds = \frac{x^2 d\varphi \delta d\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx \delta dx + dz \delta dz}{ds} = \frac{x^2 d\varphi d\delta\varphi + x d\varphi^2 \delta x + dx d\delta x + dz d\delta z}{ds}$.

Mettant donc cette valeur dans la formule intégrale $\int u \delta ds$, & faisant disparoître les différentielles de $\delta\varphi$, δx, δz, par la voie ordinaire des intégrations par parties, on aura $\int u \delta ds = - \int [d \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} \times \delta\varphi + (d \cdot \frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\varphi^2}{ds}) \delta x + d \cdot \frac{u dz}{ds} \times \delta z] + \frac{u x^2 d\varphi}{ds} \delta\varphi + \frac{u dx}{ds} \delta x + \frac{u dz}{ds} \delta z$.

Après la substitution de cette valeur de $\int u \delta ds$ dans l'équation (A) de *l'Art. I.*, il n'y aura plus qu'à réduire les différences δp, δq, δr *&c.* aux différences δx, δy, δz. Pour cela soit supposé en général

$$dp = L dx + l d\varphi + \lambda dz$$
$$dq = M dx + m d\varphi + \mu dz$$
$$dr = N dx + n d\varphi + \nu dz,$$

on aura de même

$$\delta p = L \delta x + l \delta\varphi + \lambda \delta z$$
$$\delta q = M \delta x + m \delta\varphi + \mu \delta z$$
$$\delta r = N \delta x + n \delta\varphi + \nu \delta z.$$

Donc si on fait les mêmes substitutions que dans la solution précédente, on aura aussi $P \delta p + Q \delta q + R \delta r$ *&c.* $= \Pi \delta x + \pi \delta\varphi + \Psi \delta z$, & l'équation ($A$) deviendra enfin

$$(C) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{u x^2 d\phi}{ds}\delta\phi + \frac{u dx}{ds}\delta x + \frac{u dz}{ds}\delta z$$
$$-\int\left[\left(d\cdot\frac{u x^2 d\phi}{ds} + \pi dt\right)\delta\phi + \left(d\cdot\frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\phi^2}{ds} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\Pi dt\right)\delta x + \left(d\cdot\frac{u dz}{ds} + \Psi dt\right)\delta z\right] = 0.$$

Maintenant si on suppose, comme dans l'*Art.* II. que le premier & le dernier point de la trajectoire sont donnés, il est clair que les $\delta\phi$, δx, δz qui y répondent feront nulles d'elles mêmes; & que par conséquent, les trois premiers termes de cette équation le feront aussi. Donc pour satisfaire au reste de l'équation, indépendanment des différences indéterminées $\delta\phi$, δx, δz, on fera chacun de leurs coéficiens $= 0$, & l'on aura pour les équations générales du mouvement du corps

$$d\cdot\frac{u x^2 d\phi}{ds} + \pi dt = 0$$
$$d\cdot\frac{u dx}{ds} - \frac{u x d\phi^2}{ds} + \Pi dt = 0$$
$$d\cdot\frac{u dz}{ds} + \Psi dt = 0.$$

Qu'on mette dans ces équations dt pour $\frac{ds}{u}$, & qu'on intégre la premiére, après l'avoir multipliée par $\frac{x^2 d\phi}{dt}$, on aura $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 d\phi}{dt}\right)^2 = a^2 - \int\pi x^2 d\phi$, d'où l'on tire $dt = \frac{x^2 d\phi}{\sqrt{(2a^2 - 2\int\pi x^2 d\phi)}}$; substituant cette valeur dans la seconde équation; & faisant pour abréger $\sqrt{(2a^2 - 2\int\pi x^2 d\phi)} = V$ on aura

$$d\cdot\frac{V dx}{x^2 d\phi} - \frac{V d\phi}{x} + \frac{\Pi x^2 d\phi}{V} = 0,$$

ou

ou, en mettant y pour $\frac{1}{x}$,

$$- d \cdot \frac{V\,dy}{d\varphi} - Vy\,d\varphi + \frac{\Pi\,d\varphi}{Vy^2} = 0,$$

ce qui donnera par la différentiation, en regardant $d\varphi$ comme constante, & multipliant par $\frac{\delta\varphi}{V}$,

$$- d^2 y - \frac{dV}{V}\,dy - Vy\,d\varphi^2 + \frac{\Pi\,d\varphi^2}{V^2 y^2} = 0,$$

savoir, à cause de $\frac{dV}{V} = - \frac{\pi x^2\,d\varphi}{V^2} = - \frac{\pi\,d\varphi}{V^2 y^2}$,

$$- d^2 y - y\,d\varphi^2 + \frac{\Pi + \frac{\pi\,dy}{d\varphi}}{V^2 y^2}\,d\varphi^2 = 0,$$ équation constructible dans plusieurs cas particuliers.

Enfin la troisiéme équation étant multipliée par $\frac{d\zeta}{dt}$, & ensuite intégrée deviendra $\frac{d\zeta^2}{2dt^2} = b^2 - \int \Psi\,d\zeta$, d'où l'on tirera la valeur de dt, laquelle étant comparée à celle qu'on a trouvée plus haut fournira l'équation $\frac{d\zeta}{\sqrt{(2b^2 - 2\int \Psi\,d\zeta)}} = \frac{d\varphi}{Vy^2}$.

V.

Corollaire. Si le corps étoit obligé de se mouvoir sur une surface courbe donnée, alors rapportant cette surface aux trois variables x, φ, ζ; & la supposant exprimée par l'équation $d\zeta = p\,d\varphi + q\,dx$, on mettroit dans l'équation (C), au lieu de $\delta\zeta$, $p\,\delta\varphi + q\,\delta x$, ensuite on égaleroit à zéro les coéficiens de δx, & $\delta\varphi$, & l'on auroit

$$d \cdot \frac{u\,x^2\,d\varphi}{ds} + \pi\,dt + \left(d \cdot \frac{ud\zeta}{ds} + \Psi\,dt\right) p = 0$$

$$d \cdot \frac{udx}{ds} - \frac{u\,x\,d\varphi^2}{ds} + \Pi\,dt + \left(d \cdot \frac{ud\zeta}{ds} + \Psi\,dt\right) q = 0.$$

 VI.

V I.

Remarque 1. Nous avons ſuppoſé que les forces P, Q, R *&c.* étoient comme des fonctions quelconques des diſtances p, q, r *&c.*; cependant il eſt facile de démontrer, par les principes de Dynamique, que les équations trouvées ſont générales pour toutes ſortes de forces accélératrices; & l'on peut d' ailleurs s' en convaincre par cette ſeule raiſon, que les équations dont il s' agit, ne renferment point la loi ſuivant laquelle les forces P, Q, R *&c.* croiſſent ou décroiſſent, mais ſeulement les quantités & les directions inſtantanées de ces forces, comme il eſt aiſé de le voir en ſubſtituant pour Π, π & ψ leurs valeurs. Au reſte, à examiner les ſolutions précédentes, il eſt évident que l' hipotéſe de $P =$ fonct. p, $Q =$ fonct. q, $R =$ fonct. r *&c.* ne ſert qu'à rendre $= 0$ la formule intégrale $\int(\delta P dp - dP\delta p, + \delta Q dq - dQ\delta q, + \delta R dr - dR\delta r$ *&c.*). Or pour cela il ſuffiroit que les quantités P, Q, R *&c.* euſſent entr' elles un rapport tel, que $Pdp\delta - dP\delta p + \delta Q dq - dQ\delta q + \delta R dr - dR\delta r +$ *&c.* $= 0$; ſoient donc P, Q, R *&c.* des fonctions quelconques de p, q, r *&c.*, de ſorte que l' on ait par la différentiation $dP = Adp + Bdq + Cdr$ *&c.*, $dQ = Ddp + Edq + Fdr$ *&c.* $dR = Gdp + Hdq + Idr$ *&c.*; il eſt clair qu'on aura également $\delta P = A\delta p + B\delta q + R\delta r +$ *&c.* $\delta Q = D\delta p + E\delta q + F\delta r$ *&c.* $\delta R = G\delta p + H\delta q + I\delta r$ *&c.* Subſtituant ces valeurs dans l' équation de condition, & réduiſant on aura $(B - D)\times(dp\delta q - dq\delta p) + (C - G)\times(dp\delta r - dr\delta p) + (F - H)\times(dq\delta r - dr\delta q) = 0$, donc $B - D = 0$, $C - G = 0$, $F - H = 0$, ſavoir $\left(\frac{dP}{dq}\right) = \left(\frac{dQ}{dp}\right)$, $\left(\frac{dP}{dr}\right) = \left(\frac{dR}{dp}\right)$, $\left(\frac{dQ}{dr}\right) = \left(\frac{dR}{dq}\right)$; c' eſt-à-dire que $Pdp + Qdq + Rdr$ *&c.* devra être une diffé-

différentielle complette. Si cette condition a lieu la valeur de $u \delta u$ sera ſimplement $- P \delta p - Q \delta q - R \delta r$ $-$ &c.; autrement, il faudra encore tenir compte de l'intégrale $\int (\delta P dp - dP \delta p +$ &c.$)$ pour rendre la formule $\int u ds$ un vrai *maximum*, ou *minimum*; mais les équations qu'on trouveroit alors ne ſeroient plus les véritables équations du mouvement du corps.

VII.

Remarque 2. Ce Problême eſt le ſeul, auquel M. Euler ait appliqué ſon Principe. Il l'a auſſi réſolu pour les deux cas, des coordonnées rectangles, & des rayons partant d'un centre fixe. Mais pour pouvoir comparer ſes ſolutions avec les notres, il faut remarquer; 1.° Que M. Euler n'a conſidéré que des courbes à ſimple courbure, 2.° Qu'il n'a cherché le *maximum*, ou le *minimum* de la formule $\int u ds$ qu'eu égard à la variabilité de l'ordonnée y dans le premier cas, & à celle de l'angle que nous avons nommé φ, dans le ſecond; *Voïés l'Addition citée au commencement de ce Mémoire*.

Au reſte il eſt clair que par nôtre Méthode on pourra encore varier la ſolution de ce Problême en pluſieurs autres maniéres, ſelon les différentes ſortes de coordonnées qu'on choiſira pour repréſenter la trajectoire cherchée.

VIII.

Probleme 2. général. Soit un ſiſtème quelconque de pluſieurs corps, M, M', M'' &c., qui ſoient ſollicités par tant de forces centrales qu'on voudra, ſavoir M par les forces P, Q, R &c., M' par les forces P', Q', R' &c. M'' par les forces P'', Q'', R'' &c., & qui agiſſent, de plus, les uns ſur les autres par des forces quelconques d'attraction

traction mutuelle; trouver le mouvement de chacun de ces corps.

Solution. Tout se réduit à rendre la formule $M\int u\,ds + M'\int u'ds' + M''\int u''ds'' +$ &c. un *maximum*, ou un *minimum*. On fera donc, suivant notre méthode, $\delta \cdot M\int u\,ds + \delta \cdot M'\int u'ds' + \delta \cdot M''\int u''ds'' +$ &c. $= 0$. Or $\delta \cdot M\int u\,ds$ $=$ (à cause que M est constant) $M\delta \cdot \int u\,ds = M\int(u\,\delta\,ds + u\,\delta\,u\,dt)$, *Art. I.*, $= \int M(u\,\delta\,ds + u\,\delta\,u\,dt)$. On trouvera de même, en substituant toujours dt pour $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., $\delta \cdot M'\int u'ds' = \int(u'\delta\,ds' + u'\delta\,u'\,dt)$, $\delta \cdot M''\int u''ds''$ $= \int M''\,(u''\delta\,ds'' + u''\delta\,u''\,dt)$, & ainsi de suite; on aura donc l'équation

$(D)\ \ldots \int(M\,u\,\delta\,ds + M'u'\delta\,ds' + M''u''\delta\,ds'' +$ &c. $+ [M\,u\,\delta\,u + M'\,u'\,\delta\,u' + M''\,u''\delta\,u''$ &c.$]\,dt) = 0$.

Maintenant soient p, q, r &c. les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R &c., & p', q', r' &c., p'', q'', r'' &c. celles des autres corps M', M'' &c. aux centres de leurs forces P', Q', R' &c., P'', Q'', R'' &c. Soient, outre cela, f la distance entre le corps M, & le corps M', & F la force, avec laquelle chaque point de l'un attire chaque point de l'autre, & de même f' la distance entre les corps M', M'', & F' leur force d'attraction, & ainsi de suite; soient encore g la distance entre le corps M', & le corps M'', & G leur attraction, & ainsi pour tous les autres corps; on aura par le Principe général de la conservation des forces vives, l'équation

$Mu^2 + M'u'^2 + M''u''^2 +$ &c. $= MV^2 + M'V'^2 + M''V''^2 +$ &c. $- 2M\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr +$ &c.$)$ $- 2M'\int(P'dp' + Q'dq' + R'dr' +$ &c.$) - 2M''\int(P''dp'' + Q''dq'' + R''dr''$ &c.$) -$ &c. $- 2MM'\int F\,df - 2MM''\int F'\,df'$ $-$ &c. $- 2M'M''\int G\,dg -$ &c.

V, V', V'' &c. étant les vitesses primitives des corps M, M', M'' &c. Or

Or soit supposé $P =$ fonct. p, $Q =$ fonct. q, $R =$ fonct. r, &c. $P' =$ fonct. p', $Q' =$ fonct. q &c. $F =$ fonct. f, &c. $G =$ fonct. g &c., on trouvera, par un calcul analogue à celui qu'on a fait dans le Prob. 1., l'équation différentielle

$$(V) \ldots \quad M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \&c. =$$
$$- M \, (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \&c.)$$
$$- M' \, (P' \delta p' + Q' \delta q' + R' \delta r' + \&c.)$$
$$- M'' \, (P'' \delta p'' + Q'' \delta q'' + R'' \delta r'' + \&c.)$$
$$- \&c.$$
$$- M M' F \delta f - M M'' F' \delta f' - \&c.$$
$$- M' M'' G \delta g - \&c.$$

Il faut maintenant trouver les valeurs des différences δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$ &c., & cette recherche dépend, comme on le voit, de la nature des coordonnées qu'on emploie pour représenter les courbes décrites par chaque corps.

I X.

Premier cas. Soient, comme dans *l'Art. I.*, x, y, z trois coordonnées rectangles qui déterminent la position du corps M dans un tems quelconque, & soient de même x', y', z', x'', y'', z'' &c. d'autres coordonnées rectangles & paralelles à celles-là pour la position des autres corps M', M'' &c. dans le même tems; on aura, comme dans *l'Art. cité*,

$$\delta \, d \, s = \frac{dx \, d\delta x + dy \, d\delta y + dz \, d\delta z}{ds}$$

& de même

$$\delta \, ds' = \frac{dx' \, d\delta x' + dy' \, d\delta y' + dz' \, d\delta z'}{ds'}$$

$$\delta \, ds'' = \frac{dx'' \, d\delta x'' + dy'' \, d\delta y'' + dz'' \, d\delta z''}{ds''}$$

& ainsi de suite.

Qu'on

Qu'on fubftitue ces valeurs dans l'équation (D), & qu'on faffe difparoître, comme à l'ordinaire, les différentielles de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c., on aura, en négligeant tous les termes hors du figne $\int$, qui peuvent être fuppofés nuls par la Remarque de *l'Art. II.*

$$\int \Big(Md \cdot \frac{u\,dx}{ds} \times \delta x + Md \cdot \frac{u\,dy}{ds} \times \delta y + Md \cdot \frac{u\,dz}{ds} \times \delta z$$
$$+ M'd \cdot \frac{u'\,dx'}{ds'} \times \delta x' + M'd \cdot \frac{u'\,\delta y'}{ds'} \times \delta y' + M'd \cdot \frac{u'\,dz'}{ds'} \times \delta z'$$
$$+ M''d \cdot \frac{u''dx''}{ds''} \times \delta x'' + M''d \cdot \frac{u''dy''}{ds''} \times \delta y'' + M''d \cdot \frac{u''dz''}{ds''} \times \delta z''$$
$$+ \quad \&c. \quad \&c.$$
$$- [\,Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.\,]\,dt \Big) = 0 \,.\,(E)$$

Il ne s'agira plus maintenant que de fubftituer dans cette équation au lieu de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$ + &c. fa valeur tirée de l'équation (V), & de réduire enfuite les différences δp, δq, δr &c. $\delta p'$, $\delta q'$ &c. δf, $\delta f'$ &c. δg &c. aux différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. par une méthode analogue à celle qu'on a pratiquée dans le Prob. préc.; après quoi, fi chaque corps eft entiérement libre, en forte que toutes les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. demeurent indéterminées, on fera chacun de leurs coéficiens $= 0$, & l'on aura trois fois autant d'équations, qu'il y a de corps, lefquelles prifes enfemble fuffiront pour déterminer toutes les viteffes, & les courbes cherchées: mais fi un, ou plufieurs de ces corps font forcés de fe mouvoir fur des courbes, ou des furfaces données, & qu'ils agiffent de plus, les uns fur les autres, foit en fe pouffant, foit en fe tirant par des fils, ou des verges inflexibles, ou de quelque autre maniére que ce foit, alors on cherchera les rapports qui devront néceffairement fe trouver entre les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. On réduira par-là ces différences au plus petit nombre poffible, & on fera enfuite chacun de leurs coéficiens $= 0$ ce qui

donnera

donnera toutes les équations néceſſaires pour la ſolution du Problême.

X.

Corollaire. Suppoſons le ſiſtème entiérement libre, & que les corps agiſſent les uns ſur les autres d'une maniére quelconque; ſuppoſons, outre cela, que tous les corps ſoient ſollicités par trois forces P, Q, R dirigées parallélement aux coordonnées x, y, z, & qui ſoient les mêmes pour chacun d'eux; on mettra dans l'équation (V) x, y, z à la place de p, q, r, & l'on aura $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' +$ &c. $= - M(P\delta x + Q\delta y + R\delta z) - M'(P'\delta x' + Q'\delta y' + R'\delta z') - M''(P''\delta x'' + Q''\delta y'' + R''\delta z'')$ − &c. $- MM'F\delta f - MM''F'\delta f'$ − &c. $- M'M''G\delta g$ − &c. Cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' +$ &c. étant ſubſtituée dans l'équation (E), ſoit fait $x' = x + X$, $y' = y + Y$, $z' = z + Z$, $x'' = x + X'$, $y'' = y + Y'$, $z'' = z + Z'$ &c., & par conſéquent $\delta x' = \delta x + \delta X$, $\delta y' = \delta y + \delta Y$, $\delta z' = \delta z + \delta Z$, $\delta x'' = \delta x + \delta X'$, $\delta y'' = \delta y + \delta Y'$, $\delta z'' = \delta z + \delta Z'$ &c.; il eſt clair que les lignes f, f', g &c. qui marquent les diſtances des corps entr'eux, dépendront uniquement des lignes X, Y, Z, X', Y', Z' &c. qui déterminent leur poſition reſpective, & qu'ainſi les expreſſions des différences δf, $\delta f'$, δg &c. ne renfermeront aucunement les différences δx, δy, δz; on remarquera de plus que ces mêmes différences δx, δy, δz ſeront abſolument indépendantes de toutes les autres différences δX, δY &c. Car il eſt évident que, l'action mutuelle des corps ne dépendant que de leur poſition reſpective, ſavoir des lignes X, Y, Z, X', Y', Z', X'' &c., il n'y aura que les ſeules différences δX, δY, δZ, $\delta X'$, $\delta Y'$, $\delta Z'$ &c. de

 ces

ces mêmes lignes qui ſoient liées entr' elles par des rapports donnés par la nature du Problême ; d' où il s' enſuit que les termes affectés des différences δx, δy, δz dans l'équation (E) devront être chacun en particulier $= 0$; ce qui donnera les trois équations générales.

$$M d \cdot \frac{u\,dx}{ds} + M' d \cdot \frac{u'dx'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u''dx''}{ds''} + \&c. + (M + M' + M'' + \&c.)\, P\, dt = 0,$$

$$M d \cdot \frac{u\,dy}{ds} + M' d \cdot \frac{u'dy'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u''dy''}{ds''} + \&c. + (M + M' + M'' + \&c.)\, Q\, dt = 0,$$

$$M d \cdot \frac{u\,dz}{ds} + M' d \cdot \frac{u'dz'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u''dz''}{ds''} + \&c. + (M + M' + M'' + \&c.)\, R\, dt = 0.$$

Or $\frac{ds}{u} = \frac{ds'}{u'} = \frac{ds''}{u''}$ &c. $= dt$, donc ces équations deviendront celles ci

$$d \cdot \frac{M dx + M'dx' + M''dx'' + \&c.}{dt} + (M + M' + M'' + \&c.)\, P\, dt = 0,$$

$$d \cdot \frac{M dy + M'dy' + M''dy'' + \&c.}{dt} + (M + M' + M'' + \&c.)\, Q\, dt = 0,$$

$$d \cdot \frac{M dz + M'dz' + M''dz'' + \&c.}{dt} + (M + M' + M'' + \&c.)\, R\, dt = 0;$$

D' où l' on voit que ſi on prend à chaque inſtant dans le ſiſtème un point tel, que ſa poſition ſoit déterminée par trois coordonnées, l' une paralléle à x, & $= \frac{Mx + M'x' + M''x'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}$, l'autre paralléle à y, & $= \frac{My + M'y' + M''y'' + \&c.}{M + M' + M'' \&c.}$, & la troiſiéme pa-

rallèle

rallèle à z, & $= \frac{Mz + M'z' + M''z'' + \&c.}{M + M' + M'' + \&c.}$, ce point se mouvra, comme feroit un corps sollicité simplement par les trois forces P, Q, R. Or il est évident que ce point ne sera autre chose que le centre de gravité du sistème, savoir de tous les corps M, M' &c. qui le composent.

X I.

SECOND CAS. Soit pris, comme dans *l'Art. IV.* au lieu des deux coordonnées rectangles x & y, un raïon vecteur x avec un angle φ; & soient de même substitués aux autres coordonnées x', y', x'', y'' &c., les raïons vecteurs x', x'' &c. partant du même point fixe que le raïon x, avec les angles correspondans φ', φ'' &c. pris dans le même plan de l'angle φ; on trouvera, comme dans *l'Art. cité*,

$$\delta ds = \frac{x^2 d\varphi\, d\delta\varphi + x\, d\varphi^2 \delta x + dx\, d\delta x + dz\, d\delta z}{ds},$$

& de même

$$\delta ds' = \frac{x'^2 d\varphi' d\delta\varphi' + x' d\varphi'^2 \delta x' + dx' d\delta x' + dz' d\delta z'}{ds'}$$

$$\delta ds'' = \frac{x''^2 d\varphi'' d\delta\varphi'' + x'' d\varphi''^2 \delta x'' + dx'' d\delta x'' + dz'' d\delta z''}{ds''},$$

& ainsi des autres. On substituera ces valeurs dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, & pratiquant les mêmes réductions que dans *l'Art. IV.*, elle deviendra

$$\begin{aligned}
&[Md\cdot\frac{ux^2 d\varphi}{ds}\times\delta\varphi + M\left(d\cdot\frac{udx}{ds} - \frac{uxd\varphi^2}{ds}\right)\delta x + Md\cdot\frac{udz}{ds}\times\delta z\\
&+ M'd\cdot\frac{u'x'^2 d\varphi'}{ds'}\times\delta\varphi' + M'\left(d\cdot\frac{u'dx'}{ds'} - \frac{u'x'd\varphi'^2}{ds'}\right)\delta x' + M'd\cdot\frac{u'dz'}{ds'}\times\delta z'\\
&+ M''d\cdot\frac{u''x''^2 d\varphi''}{ds''}\times\delta\varphi'' + M''\left(d\cdot\frac{u''dx''}{ds''} - \frac{u''x''d\varphi''^2}{ds''}\right)\delta x'' + M''d\cdot\frac{u''dz''}{ds''}\times\delta z''\\
&+ \&c. \qquad \&c.\\
&+ (Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.)] = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (F)
\end{aligned}$$

Equation, dans laquelle j'ai rejetté tous les termes qui sont hors du signe $\int$, parceque ces termes deviennent évidemment nuls dans la supposition que le premier & le dernier point de chaque trajectoire soient donnés. Or cette équation étant analogue à l'équation (E) de *l'Art. VIII.*; ne demandera plus que des opérations semblables, pour trouver le mouvement de chaque corps. On en verra des exemples dans les Problêmes suivans.

X I I.

Corollaire. Si le sistème est entiérement libre, ou qu'il soit simplement assujetti à se mouvoir autour d'un point fixe, & que toutes les forces sollicitatrices des corps concourent à ce point; prenant ce point pour le centres des raïons vecteurs x, x', x'' &c., & faisant $\varphi' = \varphi + \Phi$, $\varphi'' = \varphi + \Phi'$ &c., il est facile de voir que $\delta\varphi$ sera absolument indépendante des autres différences $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$ &c., δx, $\delta x'$, $\delta x''$ &c. quelle que soit l'action réciproque des corps les uns sur les autres; il est de plus évident que toutes les différences δp, δq, δf &c. qui entrent dans la valeur de $M u \delta u + M' u' \delta u'$ &c. seront aussi indépendantes de la différence $\delta\varphi$; d'où il s'ensuit que tous les termes de l'équation (F) qui se trouveront affectés de la différence $\delta\varphi$ après les substitutions de $\delta\varphi + \delta\Phi$, $\delta\varphi + \delta\Phi'$ &c. à la place de $\delta\varphi'$, $\delta\varphi''$ &c. devront être $= 0$ séparément du reste l'équation, on aura donc en général, après avoir effacé le $\delta\varphi$, l'équation

$$Md \cdot \frac{u x^2 d\varphi}{ds} + M' d \cdot \frac{u' x'^2 d\varphi'}{ds'} + M'' d \cdot \frac{u'' x''^2 d\varphi''}{ds''}$$

$+$ &c. $= 0$, dont l'intégrale est

$$\frac{M u x^2 d\varphi}{ds} + \frac{M' u' x'^2 d\varphi'}{ds'} + \frac{M'' u'' x''^2 d\varphi''}{ds''}$$

$$\ldots + \text{\&c.} = \text{const.} \quad \ldots \ldots \quad (G)$$

où,

où, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., & nommant H la constante

$Mx^2 d\varphi$ $M'x'^2 d\varphi' + M''x''^2 d\varphi'' +$ &c. $= Hdt$,

& intégrant de nouveau

$M\int x^2 d\varphi + M'\int x'^2 d\varphi' + M''\int x''^2 d\varphi'' +$ &c. $= Ht$.

Il est visible que l'intégrale $\int x^2 d\varphi$ exprime l'aire que la projection du corps M décrit autour du centre des forces, & que les autres intégrales $\int x'^2 d\varphi'$, $\int x''^2 d\varphi''$ &c. expriment de même les aires décrites par les projections des autres corps M', M'' &c. autour du même centre; donc la somme de chacune de ces aires multipliée par la masse du corps qui la décrit est toujours proportionelle au tems.

Le Lecteur, qui sera curieux de voir une démonstration de ce Théorème tirée des Principes de Mécanique, la trouvera dans un Mémoire de M. le Chevalier d'Arcy, imprimé parmi ceux de l'Académie Roïale des Sciences de Paris pour l'année 1747.; il y trouvera aussi l'usage de ce même Théorème pour résoudre plusieurs questions de Dynamique.

Au reste nous remarquerons que l'équation (G) renferme le Principe que Mrs. Daniel Bernoulli, & Euler ont appellé *la conservation du moment du mouvement circulatoire*, & qui consiste en ce que la somme des produits de chaque corps (M) par sa vitesse circulatoire ($\frac{u x d\varphi}{ds}$) & par sa distance au centre (x) est constante pendant le mouvement du sistème. *Voïés les Mémoires de l'Académie Roïale des Sciences de Berlin pour l'année 1745., & les Opuscules de M. Euler imprimés à Berlin en 1746.*

La même équation (G) renferme aussi le Principe de M. le Chevalier d'Arcy, que la somme des produits de chaque corps (M) par sa vitesse (u), & par la perpen-

dicu-

diculaire ménée du centre ſur la direction du corps $(\frac{x^2 d\phi}{ds})$ fait toujours une quantité conſtante. *Voïés les Mémoires de l'Académie de Paris pour les années* 1749., 1752.

XIII.

REMARQUE. Il eſt aiſé de trouver, par la méthode que j'ai donné dans la Remarque de *l'Art. VI.*, que l'équation (V) ſera exacte en général toutes les fois que la formule $-M(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \&c.) - M'(P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' + \&c.) - \&c.$ qui exprime la valeur de $Mudu$ $M'u'du' + M''u''du'' + \&c.$, ſera une différentielle complette. Dans tous les autres cas cette équation ne pourra plus ſervir à trouver les conditions de la *maximité*, ou de la *minimité* de la formule intégrale $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' + \&c.$; mais elle ſervira toujours également pour trouver les mouvemens des corps M, M' M'' &c., quelles que ſoient les forces dont ils ſont animés. Ainſi ſans s'embaraſſer que la formule dont nous parlons ſoit réellement un *maximum*, ou un *minimum*, on pourra toujours emploïer l'équation (V) dans quelque hipotéſe de forces que ce ſoit.

XIV.

PROBLEME 3. Trois corps M, M', M'' s'attirent mutuellement par des forces d'attraction F, F', G; trouver les orbites des corps M', M'' par rapport au corps M regardé comme en repos.

SOLUTION. Les mêmes noms étant conſervés que dans *l'Art. IX.* on fera de plus, comme dans *l'Art. X.*, $x' = x + X$, $y' = y + Y$ &c., & l'on aura $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ $ds' = \sqrt{[(dx + dX)^2 + (dy + dY)^2 + (dz + dZ)^2]}$

ds''.

$ds'' = \sqrt{[(dx + dX')^2 + (dy + dY')^2 + (dz + dZ')^2]}$, d'où l'on tirera, par la différentiation, les valeurs de δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, qu'il faudra substituer dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*

Mais pour mieux représenter les orbites rélatives des corps M', M'', soient pris, au lieu des coordonnées rectangles X, Y, X', Y', deux rayons vecteurs r, r', avec deux angles correspondans φ, φ', tels que l'on ait $X = r$ cos. φ, $Y = r$ sin. φ, $X' = r'$ cos. φ', $Y' = r'$ sin. φ'; aïant fait ces substitutions dans les valeurs de ds', ds'', on aura
$ds' = \sqrt{(ds^2 + 2\,dx\,d\cdot r \text{ cos. } \varphi + 2\,dy\,d\cdot r \text{ sin. } \varphi + r^2 d\varphi^2 + dr^2 + 2\,dz\,dZ + dZ^2)}$,
$ds'' = \sqrt{(ds^2 + 2\,dx\,d\cdot r' \text{ cos. } \varphi' + 2\,dy\,d\cdot r' \text{ sin. } \varphi' + r'^2 d\varphi'^2 + dr'^2 + 2\,dz\,dZ' + dZ'^2)}$.

Maintenant, si l'on veut regarder l'orbite du corps M comme connue, on prendra les différences δds, $\delta ds'$, $\delta ds''$, en supposant dx, dy, dz constantes; on aura $\delta ds = 0$; $\delta ds' = [dx\,\delta d\cdot r \text{ cos. } \varphi + dy\,\delta d\cdot r \text{ sin. } \varphi + r^2 d\varphi\,\delta d\varphi + r\,d\varphi^2\,\delta r + dr\,\delta dr + (dz + dZ)\,\delta dZ] : \delta s'$; $\delta ds'' = [dx\,\delta d\cdot r' \text{ cos. } \varphi' + dy\,\delta d\cdot r' \text{ sin. } \varphi' + r'^2 d\varphi'\,\delta d\varphi + r'\,d\varphi'^2\,\delta r' + dr'\,\delta dr' + (dz + dZ')\,\delta dZ'] : ds''$.

Avant que de faire ces substitutions dans l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, je remarque que les corps M', M' dont on cherche le mouvement, étant entiérement libres par l'hipotése du Problême, les différences de leurs coordonnées δr, $\delta\varphi$, δZ, $\delta r'$, $\delta\varphi'$, $\delta Z'$ sont nécessairement indépendantes entr'elles; d'où il s'ensuit qu'on peut faire pour chacun de ces corps un calcul à part, en ne considérant à la fois que les variations des trois coordonnées r, φ, Z, ou r', φ', Z.

Qu'on ne prenne d'abord que les trois premiéres r, φ, Z pour variables; il est clair qu'on aura $\delta ds = 0$; par conséquent l'équation mentionnée deviendra simplement

$\int (M'$

$\int [\, M' u' \delta ds' + (M u \delta u + M' \delta u' + M'' \delta u'' + \&c.) \, dt \,] = 0.$

Pour appliquer cette équation au Problême présent, on commencera par substituer, à la place de $\delta ds'$, sa valeur trouvée ci-dessus, en y mettant, pour plus de simplicité, au lieu de $\frac{ds'}{u'}$ son égale dt; ensuite on intégrera par parties tous les termes qui renfermeront des différences affectées du double signe δd, après avoir changé ce signe dans son équivalent $d\delta$; cette opération donnera les transformées suivantes

$$\int \frac{dx\, d\delta \cdot r \operatorname{cos.} \varphi}{dt} = \frac{dx \delta \cdot r \operatorname{cos.} \varphi}{dt} - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times \delta \cdot r \operatorname{cos.} \varphi$$

$$= \frac{dx}{dt} (\operatorname{cos.} \varphi \, \delta r - r \operatorname{sin.} \varphi \, \delta \varphi) - \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\operatorname{cos.} \varphi \, \delta r - r \operatorname{sin.} \varphi \, \delta \varphi) =$$

(en rejettant les termes qui sont hors du signe d'intégration, & qui s'évanoüissent toujours dans l'hipotése de l'*Art. II.*) $- \int d \cdot \frac{dx}{dt} \times (\operatorname{cos.} \varphi \, \delta r - r \operatorname{sin.} \varphi \, \delta \varphi)$, & de même

$$\int \frac{dy\, d\delta r \operatorname{sin.} \varphi}{dt} = - \int d \cdot \frac{dy}{dt} \times (\operatorname{sin.} \varphi \, \delta r + r \operatorname{cos.} \varphi \, \delta r)$$

$$\int \frac{r^2 d\varphi \, d\delta \varphi}{dt} = - \int d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} \times \delta \varphi$$

$$\int \frac{dr \delta \, dr}{dt} = - \int d \cdot \frac{dr}{dt} \times \delta r$$

$$\int \frac{(dz + dZ)\, d\delta Z}{dt} = - \int d \cdot \frac{dz + dZ}{dt} \times \delta Z.$$

En joignant ensemble toutes ces transformées, & y ajoutant le terme $\int \frac{r d\varphi^2}{dt} \delta r$, on aura la valeur de $\int u' \delta . ds'$ exprimée par la formule suivante

$$\int [\, (r \operatorname{sin.} \varphi \, d \cdot \frac{dx}{dt} - r \operatorname{cos.} \varphi \, d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt}) \delta \varphi -$$

— (cos.

$(\text{cos.}\ \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{sin.}\ \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{r^2 d\varphi^2}{dt})\delta r -$
$d \cdot \frac{dz + dZ}{dt} \times \delta Z\ ]$.

A présent, pour avoir la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, on fera dans l'équation (V) de *l'Art. VIII.* toutes les quantités P, Q, R, P', Q' *&c.* qui représentent des forces étrangéres $= 0$, & l'on aura
$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = - MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g$.

Or il est facile de trouver que $f = \surd(X^2 + Y^2 + Z^2) = \surd(r^2 + Z^2)$, $f' = \surd(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \surd(r'^2 + Z'^2)$, $g = \surd[(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2] = \surd[r'^2 + r^2 - 2r'r\ \text{cos.}(\varphi' - \varphi) + (Z' - Z)^2]$; d'où l'on tirera, en regardant toujours φ', r', & Z' comme constantes, $\delta f = \frac{r\delta r + Z\delta Z}{f}$, $\delta f' = 0$, $\delta g = \frac{r - r'\ \text{cos.}(\varphi' - \varphi)}{g}\delta r - \frac{r'r\ \text{sin.}(\varphi' - \varphi)}{g}\delta\varphi - \frac{Z' - Z}{g}\delta Z$.

Aiant fait ces substitutions, on ajoutera ensemble les valeurs de $M'\int\delta ds'$, & de $Mudu + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$, & l'on aura une formule intégrale, dont chaque terme contiendra une des différences $\delta\varphi$, δr, δZ, & qui devra être $= 0$, quelles que soient les valeurs de ces différences. On trouvera donc, en faisant séparément $= 0$ chacun de leurs coéficiens, & divisant par M'

$$- d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} + r\ \text{sin.}\ \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} - r\ \text{cos.}\ \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r'r\ \text{sin.}(\varphi' - \varphi)}{g} M''Gdt = 0.$$

$$d \cdot \frac{dr}{dt} - \frac{rd\varphi^2}{dt} + \text{cos.}\ \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \text{sin.}\ \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r}{f} MFdt$$

 +

$$+ \frac{r - r' \operatorname{cof.} (\varphi' - \varphi)}{g} M'' G dt = o;$$

$$d \cdot \frac{dz + dZ'}{dt} - \frac{Z' - Z}{g} M'' G dt = o.$$

Equations qui se réduisent à la forme de celles de l'*Art. IV.* en supposant

$$r \operatorname{fin.} \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} - r \operatorname{cof.} \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{rr' \operatorname{fin.} (\varphi' - \varphi)}{g} M'' G dt = \pi\, dt;$$

$$\operatorname{cof.} \varphi\, d \cdot \frac{dx}{dt} + \operatorname{fin.} \varphi\, d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{r}{f} M F dt + \frac{r - r' \operatorname{cof.} (\varphi' - \varphi)}{g} M'' G dt = \Pi\, dt;$$

$$d \cdot \frac{dz}{dt} - \frac{Z' - Z}{g} M'' G dt = \Psi\, dt.$$

Et ces équations suffiront pour déterminer l'orbite du corps M', en supposant connues les orbites des deux autres corps M, M''.

Qu'on fasse maintenant, dans les expressions de $\delta ds'$, $\delta ds''$, δf, δg, les changeantes r', φ', Z' variables au lieu des r, φ, Z; on trouvera, par des raisonnemens, & des opérations semblables aux précédentes, trois autres équations, qui ne différeront des équations ci-dessus, que parce qu'il y aura r', φ', Z' à la place de r, φ, Z, & réciproquement; & ces équations seront celles de l'orbite du corps M''.

X V

Corollaire. Si on ne connoissoit pas l'orbite absolue du corps M, alors, pour déterminer les valeurs des quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, il faudroit aussi faire varier les trois changeantes x, y, z, dans les valeurs de ds, ds', ds''; ce qui donneroit

δds

$\delta ds = (dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz) : ds$
$\delta ds' = [(dx + d \cdot r \text{cos}.\ \varphi)\delta dx + (dy + d \cdot r \text{sin}.\ \varphi)\delta dy + (dz + dZ)\delta dz] : ds'$
$\delta ds'' = [(dx + d \cdot r' \text{cos}.\ \varphi')\delta dx + (dy + d \cdot r' \text{sin}.\ \varphi')\delta dy + (dz + dZ')\delta dz] ; ds''$.

On ſubſtitueroit ces valeurs dans l'équation générale (D) de *l'Art. VIII*, & faiſant, après les réductions ordinaires, les trois coéficiens de δx, δy, δz chacun $= 0$, on auroit trois équations, par leſquelles on pourroit déterminer les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Au reſte ces équations reviendroient au même que celles de *l'Art. X.* en y faiſant P, Q, $R = 0$.

XVI.

Corollaire 2. Les équations, qu'on trouveroit par la méthode du Corollaire précédent, ne renfermeroient point les forces F, F', G, mais ſeulement les changeantes r, φ, r', φ' avec leurs différences; mais, pour ne pas trop charger de différentielles les équations du mouvement des corps M', M'', il ſera mieux de chercher les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en conſidérant directement les orbites abſolues de ces deux corps.

Que x', y', z', x'', y'', z'' ſoient les ordonnées rectangles des orbites, dont nous parlons; on parviendra à une équation qui ſera la même que l'équation (E) du Prob. 2., & dans laquelle, à cauſe que les corps ſont libres, il faudra faire les coéficiens de δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$ &c. chacun $= 0$. Or il eſt facile de trouver que $f = \sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}$, $f' = \sqrt{[(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2]}$, $g = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$; pour notre cas il ſuffit de

 faire

faire varier x, y, z seulement ; on aura donc $\delta f = -\frac{x'-x}{f}\delta x - \frac{y'-y}{f}\delta y - \frac{z'-z}{f}\delta z$, $\delta f' = -\frac{x''-x}{f'}\delta x - \frac{y''-y}{f'}\delta y - \frac{z''-z}{f'}\delta z$, $\delta g = 0$. On substituera ces valeurs dans l'expression $- MM'F\delta f - MM''F'\delta f' - M'M''G\delta g$, & l'on aura (à cause de $x'-x = X = r$ cos. ϕ, $y'-y = Y = r$ sin. ϕ, $z'-z = Z$, $x''-x = X' = r'$ cos. ϕ', $y''-y = Y' = r'$ sin. ϕ', $z''-z = Z'$)

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = M\left(\frac{M'Fr\,\text{cos.}\,\phi}{f} + \frac{M''F'r'\,\text{cos.}\,\phi'}{f'}\right)\delta x + M\left(\frac{M'Fr\,\text{sin}\,\phi}{f} + \frac{M''F'r'\,\text{sin.}\,\phi'}{f'}\right)\delta y + M\left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'}\right)\delta z.$$

Mettant cette valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$ dans l'équation (E), & faisant séparément $= 0$ chacun des trois coéficiens de δx, δy, δz ; il viendra, après avoir divisé le tout par M, & mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$,

$$d.\frac{dx}{dt} - \left(\frac{M'Fr\,\text{cof.}\,\phi}{f} + \frac{M''F'r'\,\text{cof.}\,\phi'}{f'}\right)dt = 0$$

$$d.\frac{dy}{dt} - \left(\frac{M'Fr\,\text{fin.}\,\phi}{f} + \frac{M''F'r'\,\text{fin.}\,\phi'}{f'}\right)dt = 0$$

$$d.\frac{dz}{dt} - \left(\frac{M'FZ}{f} + \frac{M''F'Z'}{f'}\right)dt = 0.$$

Par-là les valeurs de π, Π, Ψ de l'*Art. XIV.* deviendront, après quelques réductions fort simples.

$$M''\left(\frac{G}{g} - \frac{F'}{f'}\right)rr'\,\text{sin.}\,(\phi' - \phi) = -\pi$$

$$(M + M')\frac{Fr}{f} + M''\left(\frac{G}{g} \times [r - r'\,\text{cof.}\,(\phi' - \phi)]\right.$$

+

$$+ \frac{F'}{f'} \times r' \operatorname{cof.} (\varphi' - \varphi) \Big) = \Pi$$

$$M \frac{FZ}{f} + M'' \left[\frac{F'Z'}{f'} - \frac{G(Z' - Z)}{g} \right] = \Psi.$$

X V I I.

Probleme 4. Un corps M étant follicité par tant des forces qu'on voudra P, Q, R &c., & tirant après lui deux autres corps M', M'' par le moïen de deux fils de longueurs données; trouver le mouvement de chacun de ces trois corps. On fuppofe pour plus de fimplicité, qu'ils fe meuvent tous trois dans le même plan.

Solution. Soient f, f' les longueurs données des fils, c'eft-à-dire les diftances invariables des corps M', M'' au corps M; x, y les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps M, & φ, φ' les angles que les lignes f, f' forment à chaque inftant avec l'axe des x; prenant x', y', x'', y'' pour les coordonnées rectangles des autres corps M', M'', on aura $x' = x - f \operatorname{cof.} \varphi$, $y' = y - f \operatorname{fin.} \varphi$, $x'' = x - f' \operatorname{cof.} \varphi'$, $y'' = y - f' \operatorname{fin.} \varphi'$; $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2 + 2f(\operatorname{fin.} \varphi\, dx - \operatorname{cof.} \varphi\, dy)\, d\varphi + f^2 d\varphi^2$, $ds''^2 = dx''^2 + dy''^2 = dx^2 + dy^2 + 2f'(\operatorname{fin.} \varphi' dx - \operatorname{cof.} \varphi' dy)\, d\varphi' + f'^2 d\varphi'^2$; d'où l'on tire

$\delta ds = (dx\, \delta dx + dy\, \delta dy) : ds$;

$\delta ds' = [(dx + f \operatorname{fin.} \varphi\, d\varphi)\, \delta dx + (dy - f \operatorname{cof.} \varphi\, d\varphi)\, \delta dy + f d\varphi (\operatorname{cof.} \varphi\, dx + \operatorname{fin.} \varphi\, dy)\, \delta\varphi + f(\operatorname{fin.} \varphi\, dx - \operatorname{cof.} \varphi\, dy + f d\varphi)\, \delta d\varphi] : ds'$;

$\delta ds'' = [(dx + f' \operatorname{fin.} \varphi' d\varphi')\, \delta dx + (dy - f' \operatorname{cof.} \varphi' d\varphi')\, \delta dy + f' d\varphi' (\operatorname{cof.} \varphi' dx + \operatorname{fin.} \varphi' dy)\, \delta\varphi' + f' (\operatorname{fin.} \varphi' dx - \operatorname{cof.} \varphi' dy + f' d\varphi')\, \delta d\varphi'] : ds''$.

On fubftituera ces valeurs dans les intégrales $\int u\, \delta ds$, $\int u'\, \delta ds'$, $\int u''\, \delta ds''$ de l'équation (D) de *l'Art. VIII.*, & faifant

faisant les transformations, & les réductions ordinaires, on trouvera

$$\int u\,\delta\,ds = -\int\left(d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta x + d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta y\right)$$

$$\int u'\delta\,ds' = -\int\left(d\cdot\frac{dx + f\,\text{sin.}\,\varphi\,d\varphi}{dt}\times\delta x +\right.$$

$$d\cdot\frac{dy - f\,\text{cos.}\,\varphi\,d\varphi}{dt}\times\delta y - \left[\frac{\text{cos.}\,\varphi\,dx + \text{sin.}\,\varphi\,dy}{dt}f\,d\,\varphi\right.$$

$$\left.\left. - d\cdot\frac{\text{sin.}\,\varphi\,dx - \text{cos.}\,\varphi\,dy + f\,d\varphi}{dt}f\right]\delta\,\varphi\right).$$

Et l'on aura pour $\int u''\,\delta\,ds''$ la même expression que pour $\int u'\,\delta\,ds'$ en marquant seulement d'un trait les lettres φ & f; comme il est aisé de s'en assurer par le calcul.

Pour avoir maintenant la valeur de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u''$ on aura recours à l'équation générale (V) de l'*Art. VIII.*, laquelle donnera pour le cas présent $Mu\,\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' = -M(P\delta p + Q\delta q + R\delta r) =$, en faisant les mêmes suppositions que dans l'*Art. I.*, $-M(\Pi\delta x + \pi\delta y)$.

Il n'y a plus qu'à mettre ces différentes transformées dans l'équation (D); or si l'on fait pour abréger

$$M\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right) + M'\,d\cdot\frac{1}{dt}(dx + f\,\text{sin.}\,\varphi\,d\varphi)$$

$$+ M''\,d\cdot\frac{1}{dt}(dx + f'\,\text{sin.}\,\varphi'\,d\varphi') = [x]$$

$$M\left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\,dt\right) + M'\,d\cdot\frac{1}{dt}(dy - f\,\text{cos.}\,\varphi\,d\varphi)$$

$$+ M''\,d\cdot\frac{1}{dt}(dx - f'\,\text{cos.}\,\varphi'\,d\varphi') = [y]$$

$$\frac{M'f\,d\varphi}{dt}(\text{cos.}\,\varphi\,dx + \text{sin.}\,\varphi\,dy) - M'\,d\cdot\frac{f}{dt}(\text{sin.}\,\varphi\,dx$$

$$- \text{cos.}\,\varphi\,dy + f\,d\varphi) = [\varphi]$$

$$\frac{M''f'd\varphi'}{dt}(\text{cos.}\,\varphi'dx + \text{sin.}\,\varphi'dy) - M''\,d\cdot\frac{f'}{dt}(\text{sin.}\,\varphi'dx$$

$$- \text{cos.}\,\varphi'dy + f'd\varphi') = [\varphi'].$$

On

on trouve

$\int([x]\delta x+[y]\delta y-[\varphi]\delta\varphi-[\varphi']\delta\varphi) = o \ldots (H)$

D'où l'on tire par notre méthode

$[x] = o, [y] = o, [\varphi] = o, [\varphi'] = o.$

Quatre équations qui suffiront pour déterminer le rapport des indéterminées x, y, φ, φ' au tems t, & par conséquent le mouvement de chacun de trois corps M, M'', M''.

XVIII.

Corollaire 1. Si le corps M étoit mu dans une rainure courbe représentée par l'équation $dy = mdx$; alors il n'y auroit qu'à mettre, dans l'équation (H), $m\delta x$ pour δy, & faire ensuite chacun, des trois coéficiens de δx, $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$, $= o$; ce qui donneroit pour les équations du mouvement des corps

$[x] + m[y] = o, [\varphi] = o, [\varphi'] = o.$

Si le corps M étoit, outre cela, obligé de se mouvoir avec une vitesse, dont la loi à chaque point de la courbe fût donnée; alors, comme le mouvement de ce corps seroit entiérement donné, on auroit $\delta x = o$, & $\delta y = o$; c'est pourquoi il faudroit supprimer les équations $[x] = o$, & $[y] = o$, & mettre, dans les deux autres $[\varphi] = o$, $[\varphi'] = o$, au lieu de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs données.

XIX.

Corollaire 2. Supposons que les trois corps M, M', M'', au lieu de se tenir par de fils, soient attachés à une verge inflexible, ensorte que l'angle des lignes f, f' soit constant, & $= \alpha$; on aura donc en ce cas $\varphi' = \varphi + \alpha$, & $\delta\varphi' = \delta\varphi$; ainsi il ne faudra qu'écrire, dans l'équation (H), $\varphi + \alpha$ pour φ', & $\delta\varphi$ pour $\delta\varphi$, & faisant ensuite

ensuite les coéficiens de δx, δy, $\delta\varphi$ chacun en particulier $= o$, on aura
$$[x] = o, [y] = o, [\varphi] + [\varphi'] = o.$$

X X.

Corollaire 3. Si on veut de plus, dans le cas du Corollaire précédent, que le corps M se meuve dans une rainure courbe dont l'équation soit $dy = m dx$; mettant, comme dans l'*Art. XVIII.* $m \delta x$ au lieu de δy, & faisant $= o$ les coéficiens de δx, & $\delta \varphi$, on aura simplement les deux équations
$$[x] + m [y] = o, \& [\varphi] + [\varphi'] = o.$$
Mais si la vitesse du corps M est aussi donnée; en ce cas δx, & δy étant nuls, il ne restera que l'équation $[\varphi] + [\varphi'] = o$, dans laquelle il faudra mettre au lieu de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ leurs valeurs données.

X X I.

Corollaire 4. Si les corps M', M'' étoient liés par un même fil, de longueur donnée, le long duquel l'autre corps M pût couler librement par le moïen d'un anneau: on pourroit résoudre le Problême de la même maniére en faisant les quantités f, f' variables dans les expressions de ds', ds'', & de leurs différences $\delta ds'$, $\delta ds''$.

Pour cela il n'y auroit qu'à augmenter la valeur de ds'^2 trouvée ci-dessus (*Art. XVII.*) de la quantité $- 2$ (cos. $\varphi dx +$ sin. φdy) $df + df^2$, & ensuite celle de $\delta ds'$ de la quantité (sin. $\varphi dx -$ cos. $\varphi dy + f d\varphi$) $d\varphi \delta f -$ (cos. $\varphi dx +$ sin. $\varphi dy - df$) $\delta df +$ (sin. $\varphi dx -$ cos. φdy) $df \delta\varphi$ $-$ cos. $\varphi df \delta dx -$ sin. $\varphi df \delta dy$, divisée par ds'; c'est pourquoi la valeur de la formule intégrale $\int u' \delta ds'$ seroit augmentée

mentée de $\int\left(d\cdot\frac{\text{cos.}\,\varphi df}{dt}\times\delta x+d\cdot\frac{\text{sin.}\,\varphi df}{dt}\times\delta y\right.$
$+\frac{df}{dt}(\text{sin.}\,\varphi dx-\text{cos.}\,\varphi dy)\delta\varphi+\left[\frac{d\varphi}{dt}(\text{sin.}\,\varphi dx-\right.$
$\text{cos.}\,\varphi dy+fd\varphi)+d\cdot\frac{1}{dt}(\text{cos.}\,\varphi dx+\text{sin.}\,\varphi dy$
$\left.\left.-df)\right]\delta f\right)$.

Et l' autre formule intégrale $\int u''\delta ds''$ seroit aussi augmentée de la même quantité, en marquant seulement d'un trait les deux lettres φ & f. Par-là l'équation (H) deviendroit de cette forme

$(I)\ \ldots -\int[(x)\delta x+(y)\delta y-(\varphi)\delta\varphi-(\varphi')\delta\varphi'$
$+(f)\delta f+(f')\delta f']=0$, dans laquelle

$$(x)=[x]-d\cdot\frac{\text{cos.}\,\varphi\, df}{dt}-d\cdot\frac{\text{cos.}\,\varphi' df}{dt}$$

$$(y)=[y]-d\cdot\frac{\text{sin.}\,\varphi\, df}{dt}-d\cdot\frac{\text{sin.}\,\varphi' df'}{dt}$$

$$(\varphi)=[\varphi]+\frac{df}{dt}(\text{sin.}\,\varphi dx-\text{cos.}\,\varphi dy)$$

$$(\varphi')=[\varphi']+\frac{df'}{dt}(\text{sin.}\,\varphi' dx-\text{cos.}\,\varphi' dy)$$

$$(f)=\frac{d\varphi}{dt}(\text{sin.}\,\varphi dx-\text{cos.}\,\varphi dy+fd\varphi)$$
$$+d\cdot\frac{1}{dt}(\text{cos.}\,\varphi dx+\text{sin.}\,\varphi dy-df)$$

$$(f')=\frac{d\varphi'}{dt}(\text{sin.}\,\varphi' dx-\text{cos.}\,\varphi' dy+f'd\varphi')$$
$$+d\cdot\frac{1}{dt}(\text{cos.}\,\varphi' dx+\text{sin.}\,\varphi' dy-df').$$

Maintenant, les deux corps M', M'' étant attachés fixement aux extrémités du fil qui est supposé inextensible, il faut que la somme des lignes f, & f' soit constante ; soit cette somme, c' est-à-dire, la longueur totale du fil

$= a$,

$= a$, on aura $f' = a - f$, & $\delta f' = - \delta f$; on fera donc ces substitutions dans l'équation (I), & mettant ensuite $= 0$ les coéficiens des différences restantes δx, δy, $\delta \varphi$, $\delta \varphi'$, δf, on aura les cinq équations $(x) = 0$, $(y) = 0$, $(\varphi) = 0$, $(\varphi) = 0$, $(f) - (f') = 0$, lesquelles donneront le rapport des cinq indéterminée x, y, φ, φ', f au tems t.

XXII.

Corollaire 5. Si le corps M étoit fixe, ou, ce qui revient au même, si le fil qui joint les deux corps M', M'' passoit à travers un anneau immobile, on auroit pour lors dx, dy, & δx, $\delta y = 0$, & les équations du mouvement des deux corps seroient $(\varphi) = 0$, $(\varphi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; savoir, à cause que $dx = 0$, $dy = 0$, & $f' = a - f$,

$$d \cdot \frac{f^2 d\varphi}{dt} = 0, \quad d \cdot \frac{(a-f)^2 d\varphi'}{dt} = 0, \quad \&$$

$$\frac{f(d\varphi^2 + d\varphi'^2) - a d\varphi'^2}{dt} + 2\, d \cdot \frac{df}{dt} = 0.$$

Les deux premiéres équations étant intégrées, donneront $d\varphi^2 = \frac{A dt^2}{f^4}$, $d\varphi'^2 = \frac{B dt^2}{(a-f)^4}$; & ces valeurs substituées dans la troisiéme, on aura

$\frac{A\, dt}{f^3} - \frac{B\, dt}{(a-f)^3} + 2\, d \cdot \frac{df}{dt} = 0$, laquelle étant multipliée par $\frac{df}{dt}$, & ensuite intégrée devient

$-\frac{A}{2f^2} + \frac{B}{2(a-f)^2} + \frac{df^2}{dt^2} = C$, d'où l'on tire

$$dt = \frac{df}{\sqrt{\left(C + \frac{A}{2f^2} - \frac{B}{2(a-f)^2}\right)}}.$$

XXIII.

XXIII.

Corollaire 6. Si dans le cas du Corollaire précédent les deux corps M', M'' étoient attachées à une verge droite, & inflexible; alors on auroit $\varphi' = \varphi$, & $\delta\varphi' = \delta\varphi$; & les équations $(\varphi) = 0$, $(\varphi') = 0$ n'en feroient plus qu'une seule, savoir $(\varphi) + (\varphi') = 0$; on auroit donc simplement les deux équations $(\varphi) + (\varphi') = 0$, & $(f) - (f') = 0$; c'est-à-dire $d \cdot \frac{(a^2 - 2af + 2f^2)\,d\varphi}{dt} = 0$, & $\frac{(2f - a)\,d\varphi^2}{dt} + 2d \cdot \frac{df}{dt} = 0$; lesquelles donnent, en chassant dt, $\frac{(2f-a)\,d\varphi}{a^2 - 2af + 2f^2} + 2d \cdot \frac{df}{(a^2 - 2af + 2f^2)\,d\varphi} = 0$. Cette équation étant multipliée par $\frac{df}{a^2 - 2af + 2f^2}$, & ensuite intégrée, en regardant $d\varphi$ comme constante, deviendra celle-ci

$$\frac{d\varphi}{2(a^2 - 2af + 2f^2)} + \frac{df^2}{(a^2 - 2af + 2f^2)^2 d\varphi} = \frac{d\varphi}{A^2},$$ qui se réduit à

$$d\varphi = \frac{A\,df\sqrt{2}}{\sqrt{(2[a^2 - 2af + 2f^2]^2 - A^2[a^2 - 2af + 2f^2])}}$$

XXIV.

Probleme 5. Trouver le mouvement d'un fil fixe en une de ses extrémités, & chargé de tant de corps pesants qu'on voudra M, M', M'' &c.

Solution. Aiant pris comme dans l'Art. IX., x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' &c. pour les coordonnées rectangles des corps M, M', M'' &c., on a d'abord l'équation (E). Soit maintenant f la portion du fil interceptée entre l'extrémité fixe, & le corps M; soient aussi f', f'' &c. les

 portions

portions du même fil interceptées entre les corps M & M', M' & M'', & ainſi de ſuite ; on aura les équations

$$f = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$
$$f' = \sqrt{([x' - x]^2 + [y' - y]^2 + [z' - z]^2)}$$
$$f'' = \sqrt{([x'' - x']^2 + [y'' - y']^2 + [z'' - z']^2)}$$
&c. &c.

l'origine des abſciſſes x, x', x'' &c. étant à l'extrémité fixe du fil. On tire de là

$$x = \sqrt{(f^2 - y^2 - z^2)}$$
$$x' = x + \sqrt{(f'^2 - [y' - y]^2 - [z' - z]^2)}$$
$$x'' = x' + \sqrt{(f''^2 - [y'' - y']^2 - [z'' - z']^2)}$$
&c. &c.

& par conſéquent

$$\delta x = -\frac{1}{x}[y\delta y + z\delta z]$$

$$\delta x' = \delta x - \frac{1}{x'-x}[(y'-y)\times(\delta y' - \delta y) + (z'-z)\times(\delta z' - \delta z)]$$
$$= \left(\frac{y'-y}{x'-x} - \frac{y}{x}\right)\delta y - \frac{y'-y}{x'-x}\delta y'$$
$$+ \left(\frac{z'-z}{x'-x} - \frac{z}{x}\right)\delta z - \frac{z'-z}{x'-x}\delta z$$

$$\delta x'' = \delta x' - \frac{1}{x''-x'}[(y''-y')\times(\delta y'' - \delta y') + (z''-z')\times(\delta z'' - \delta z')]$$
$$= \left(\frac{y'-y}{x'-x} - \frac{y}{x}\right)\delta y + \left(\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x}\right)\delta y' - \frac{y''-y'}{x''-x'}\delta y''$$
$$+ \left(\frac{z'-z}{x'-x} - \frac{z}{x}\right)\delta z + \left(\frac{z''-z'}{x''-x'} - \frac{z'-z}{x'-x}\right)\delta z' - \frac{z''-z'}{x''-x'}\delta z'',$$

& ainſi de ſuite.

Maintenant, ſi on ſuppoſe (ce qui eſt abſolument arbitraire) l'axe des x, x', x'' &c. vertical ; & que P exprime la péſanteur abſolue des corps ; il faudra mettre dans l'équation (V) de *l'Art. VIII.* δx, $\delta x'$, $\delta x''$ &c. au lieu de δp, $\delta p'$, $\delta p''$ &c., $-P$ au lieu de P, P', P'' &c., & toutes les autres forces Q, R, Q' &c. égales à zéro ; on aura donc

$Mu\delta u$

$$M u \delta u + M' u' \delta u' + M'' u'' \delta u'' + \&c.$$
$$= P (M \delta x + M' \delta x' + M'' \delta x'' + \&c.)$$

Faisant ces substitutions dans l'équation (E) cité ci-devant, & ordonnant les termes, elle deviendra de la forme suivante

$$\int([y]\delta y + [y']\delta y' + [y'']\delta y'' + \&c. +$$
$$[z]\delta z + [z']\delta z' + [z'']\delta z'' + \&c.) = 0,$$

dans laquelle on aura, après avoir mis au lieu de $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c. leur valeur commune dt,

$$[y] = M [d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{y}{x} (P dt - d \cdot \frac{dx}{dt})] - [\frac{y' - y}{x' - x}$$
$$- \frac{y}{x}] \times [M' (P dt - d \cdot \frac{dx'}{dt}) + M'' (P dt - d \cdot \frac{dx''}{dt})$$
$$+ M''' (P dt - d \cdot \frac{dx'''}{dt}) + \&c.]$$

$$[y'] = M' [d \cdot \frac{dy'}{dt} + \frac{y' - y}{x' - x} (P dt - d \cdot \frac{dx'}{dt})] -$$
$$[\frac{y'' - y'}{x'' - x'} - \frac{y' - y}{x' - x}] \times [M'' (P dt - d \cdot \frac{dx''}{dt}) + M''' (P dt$$
$$- d \cdot \frac{dx'''}{dt}) + \&c.]$$

$$[y''] = M'' [d \cdot \frac{dy''}{dt} + \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (P dt - d \cdot \frac{dx''}{dt}) -$$
$$[\frac{y''' - y''}{x''' - x''} - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}] \times [M''' (P dt - d \cdot \frac{dx'''}{dt}) + \&c.]$$

&c. &c.

& les valeurs de $[z]$, $[z']$, $[z'']$ &c. seront les mêmes que celles de $[y]$, $[y']$, $[y'']$ &c., en y mettant simplement z, z', z'' &c. au lieu de y, y', y'' &c.

On fera donc suivant notre méthode

$$[y] = 0,\ [y'] = 0,\ [y''] = 0 \ \&c.$$
$$[z] = 0,\ [z'] = 0,\ [z''] = 0 \ \&c.$$

Equa-

Equations qui, avec celles qu'on a trouvé plus haut, suffiront pour résoudre le Problême.

XXV.

Corollaire. Soient les corps M, M', M'' &c. infiniment petits, & placés à des distances égales les uns des autres; marquant par la lettre d la différence de deux coordonnées consécutives quelconques, on aura en général
$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{dy}{dx}$, & $\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'-y}{x'-x} = d \cdot \frac{dy}{dx}$.

Soit chaque petit poids, dont le fil est chargé, dm; soit de plus la somme des valeurs de $dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})$ pour toute la longueur du fil désignée par $T\,dt$, & la somme indéfinie des mêmes valeurs prise rélativement à l'abscisse x, marquée par la lettre S de cette maniére $S\,dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})$; il est facile de voir que les équations $(y) = 0$, $(y') = 0$, $(y'') = 0$ &c. se réduiront toutes à celle-ci générale

$$dm\,[d \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx}\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})] -$$
$$d \cdot \frac{dy}{dx} \times [T\,dt - S\,dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})] = 0;$$

que de même les équations $(z) = 0$, $(z') = 0$, $(z'') = 0$ &c. se changeront en

$$dm\,[d \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dx}\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})] -$$
$$d \cdot \frac{dz}{dx} \times [T\,dt - S\,dm\,(P\,dt - d \cdot \frac{dx}{dt})] = 0.$$

Ce seront donc ces deux équations qui serviront à déterminer le mouvement du fil; mais il y faudra encore ajouter une troisiéme équation qui se déduira de ce que chaque élément

ment du fil, dont l'expreſſion générale eſt $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, doit démeurer conſtant, pendant que le fil varie de courbe. Cette équation ſera donc

$$\frac{d\cdot\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt} = 0\text{, ſavoir}$$

$$dx\left(\frac{ddx}{dt}\right) + dy\left(\frac{ddy}{dt}\right) + dz\left(\frac{ddz}{dt}\right) = 0.$$

Dans le cas des oſcillations infiniment petites on a $\frac{dx}{dt} = 0$, parce qu'alors chaque point du fil répond toujours à très-peu-près au même point de l'axe; de plus ſi on regarde le fil comme uniformément épais, & que l'élément de ſa courbe $\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ ſoit dénoté par ds; on aura $dm = ds$, & la formule intégrale $Sdm\,(Pdt - d\cdot\frac{dx}{dt})$ ſe réduira à $SPdsdt =$ (à cauſe de Pdt conſtant) $Psdt$, étant la longueur de la partie du fil qui répond à l'abſciſſe x; par conſéquent ſi la longueur totale du fil eſt l, on aura $T = Pl$, & les deux premiéres équations deviendront celles-ci beaucoup plus ſimples

$$ds\,(d\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dx}Pdt) - Pdt\,d\cdot\frac{dy}{dx} \times (l - s) = 0$$

$$ds\,(d\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dx}Pdt) - Pdt\,d\cdot\frac{dz}{dx} \times (l - s) = 0$$

la troiſiéme ſera inutile.

XXVI.

SCHOLIE. Si les fils f, f', f'' &c. qui joignent les corps M, M', M'' &c. étoient extenſibles, & élaſtiques, on auroit alors les équations

$$f\delta f = x\delta x + y\delta y + z\delta z;$$

$$f'\delta f' = (x' - x)\times(\delta x' - \delta x) + (y' - y)\times(\delta y' - \delta y) + (z' - z)\times(\delta z' - \delta z);$$

$f''\delta f''$

$$f''\delta f'' = (x''-x')\times(\delta x''-\delta x') + (y''-y')\times(\delta y''-\delta y') + (z''-z')\times(\delta z''-\delta z'),$$

& ainsi de suite.

On trouvera de plus, en appellant F, F', F'' &c. les forces d'élasticité, ou de contraction des fils f, f', f'' que l'équation (V) deviendra

$$Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c. = P(M\delta x + M'\delta x' + M''\delta x'' + \&c.) - F\delta f - F'\delta f' - F''\delta f'' - \&c.,$$

comme il est facile de s'en assurer en appliquant le Principe de la conservation des forces vives, au cas dont il s'agit ici.

On mettra donc dans cette expression de $Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.$ au lieu de δf, $\delta f'$, $\delta f''$ &c. les valeurs qu'on vient de trouver, & on la substituera ensuite dans l'équation (E) de *l'Art. IX.*; ce qui donnera, après avoir ordonné les termes, & mis dt à la place de $\frac{ds}{u}$, $\frac{ds'}{u'}$, $\frac{ds''}{u''}$ &c., une équation de cette forme

$$\int[(x)\delta x + (x')\delta x' + (x'')\delta x'' + \&c. + (y)\delta y + (y')\delta y' + (y'')\delta y'' + \&c. + (z)\delta z + (z')\delta z' + (z'')\delta z'' + \&c] = 0;$$

dans laquelle

$$(x) = M\left(d\cdot\frac{dx}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x}{f}F - \frac{x'-x}{f'}F'\right)dt$$

$$(x') = M'\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x'-x}{f'}F' - \frac{x''-x'}{f''}F''\right)dt$$

$$(x'') = M''\left(d\cdot\frac{dx''}{dt} - P\,dt\right) + \left(\frac{x''-x'}{f''}F'' - \frac{x'''-x''}{f'''}F'''\right)dt$$

&c. &c.

$$(y) = M\,d\cdot\frac{dy}{dt} + \left(\frac{y}{f}F - \frac{y'-y}{f'}F'\right)dt$$

$$(y') = M'\,d\cdot\frac{dy'}{dt} + \left(\frac{y'-y}{f'}F' - \frac{y''-y'}{f''}F''\right)dt$$

(y'')

$(y'') = M'' d \cdot \frac{dy''}{dt} + (\frac{y'' - y'}{f''} F'' - \frac{y''' - y''}{f'''} F''') dt$

&c. &c.

& les autres expreſſions (z), (z'), (z'') ſeront les mêmes que les (y), (y'), (y'') &c., en changeant ſeulement y en z, y' en z', y'' en z'' &c.

De cette équation on tirera donc, ſuivant notre méthode les équations particuliéres

$$(x) = 0,\ (x') = 0,\ (x'') = 0 \text{ \&c.}$$
$$(y) = 0,\ (y') = 0,\ (y'') = 0 \text{ \&c.}$$
$$(z) = 0,\ (z') = 0,\ (z'') = 0 \text{ \&c.}$$

qui feront celles du mouvement des corps M, M', M'' &c.

XXVII.

Corollaire. Si on veut, que les maſſes M, M', M'' &c. ſoient infiniment petites, & placées à des diſtances infiniment petites les unes des autres; conſervant les ſuppoſitions faites dans l'Art. XXV., on aura en général $M = dm$, $f = ds$, $x' - x = dx$, $y' - y = dy$, $z' - z = dz$; & l'on trouvera que les équations ci-deſſus ſe changeront dans les trois ſuivantes.

$$dm\,(d \cdot \frac{dx}{dt} - P\,dt) - d \cdot \frac{F\,dx}{ds} \times dt = 0$$
$$dm\, d \cdot \frac{dy}{dt} - d \cdot \frac{F\,dy}{ds} \times dt = 0$$
$$dm\, d \cdot \frac{dz}{dt} - d \cdot \frac{F\,dz}{ds} \times dt = 0,$$

où la quantité F marque l'élaſticité variable de chaque élément du fil.

Si on fait abſtraction de la peſenteur P, & qu'on ſuppoſe, outre cela, les oſcillations du fil infiniment petites, enſorte que l'abſciſſe x demeure toujours la même pour chaque élément ds; la premiére équation ſe réduira à

$- d \cdot \frac{F dx}{ds} \times dt = 0$; dont l'intégrale est $\frac{F dx}{ds} = k$; ce qui donne $\frac{F}{ds} = \frac{k}{dx}$, & cette valeur étant substituée dans les deux autres équations, on aura, à cause de k constant, $dm\, d \cdot \frac{dy}{dt} = d \cdot \frac{dy}{dx} \times k\, dt$, $dm\, d \cdot \frac{dz}{dt} = d \cdot \frac{dz}{dx} \times k\, dt$. Soit X l'épaisseur du fil, en sorte que $dm = X dx$ (il faudroit mettre à la rigueur $dm = X ds$, mais comme on suppose les vibrations infiniment petites, il est clair que dy & dz seront aussi infiniment petites par rapport à dx, & qu'ainsi ds sera à très-peu-près $= dx$); on trouvera, en différentiant & prenant dt & dx pour constantes, ce qui est permis, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k d^2y}{X dx^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{k d^2z}{X dx^2}$; équations connues.

XXVIII.

Remarque. Les équations trouvées pour le mouvement d'un fil vibrant élastique, ou non, peuvent encore l'être d'une autre maniére plus directe, en regardant d'abord le fil comme un assemblage d'une infinité de points mobiles; c'est ce qu'il est bon de faire voir, pour développer davantage l'application de notre Principe général à ces sortes de questions.

XXIX.

Probleme 6. Trouver le mouvement d'un fil inextensible, dont tous les points sont sollicités par des forces quelconques P, Q, R &c.

Solution. En conservant les noms donnés dans *l'Art. XXV.*; soit de plus u la vitesse de chaque élément du fil, & ds le petit espace qu'il parcourt dans le tems dt; il est facile de voir que la formule du Principe général deviendra

dra $S\,dm\int u\,ds$. On fera donc, suivant notre méthode, l'équation $\delta\cdot S\,dm\int u\,ds = 0$, qui se réduira d'abord (à cause que dm est constant pendant que le fil varie de courbe) à $S\,dm\,\delta\int u\,ds = 0$, savoir à $S\,dm\int(u\,\delta\,ds + \delta\,u\,ds) = S\,dm\int u\,\delta\,ds + S\,dm\int u\,\delta\,u\,dt = 0$, en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$.

Maintenant, si on prend pour chaque élément du fil trois coordonnées rectangles x, y, z, comme dans les Prob. 1., on aura aussi $\delta\,ds = \frac{1}{ds}\,(dx\,d\delta\,x + dy\,d\delta\,y + dz\,d\delta\,z)$, & $\int u\,\delta\,ds = -\int(d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta\,x + d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta\,y + d\cdot\frac{dz}{dt}\times\delta\,z)$ en mettant dt pour $\frac{ds}{u}$; donc l'intégrale $S\,dm\int u\,\delta\,ds$ deviendra, en transposant les signes S, $\int$ (ce qui est évidemment permis) $-\int S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta\,x + d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta\,y + d\cdot\frac{dz}{dt}\times\delta\,z)$.

On changera aussi, par la même transposition des signes, la formule $S\,dm\int u\,\delta\,u\,dt$ en $\int S\,dm\,u\,\delta\,u\,dt$; & l'on aura l'équation

$$(K) \ldots \int S\,dm(u\,\delta\,u\,dt - d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta\,x - d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta\,y - d\cdot\frac{dz}{dt}\times\delta\,z) = 0.$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de $S\,dm\,u\,\delta\,u\,dt$. Or il n'est pas difficile de voir que l'équation (V) de l'*Art. VIII.* appliquée à la question présente donne $S\,dm\,u\,\delta\,u = -S\,dm(P\,\delta\,p + Q\,\delta\,q + R\,\delta\,r + \&c.)$. On aura donc, en multipliant par dt dont la valeur est la même pour tous les élémens du fil, $S\,dm\,u\,\delta\,u\,dt = -S\,dm(P\,\delta\,p + Q\,\delta\,q + R\,\delta\,r + \&c.)\,dt$; ou bien, en mettant,

 selon

felon les fuppofitions de *l'Art. I.*, $\Pi\delta x + \pi\delta y + \Psi\delta z$ au lieu de $P\delta p + Q\delta q + R\delta r +$ *&c.*,

$S dm u \delta u dt = - S dm (\Pi dt \delta x + \pi dt \delta y + \Psi dt \delta z) \ldots (X)$

Cette valeur fubftituée dans l'équation (K), il viendra

$(L) \ldots\ldots\ldots\ldots - \int S\, dm \left([d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt] \delta x \right.$

$\left. + [d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt] \delta y + [d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt] \delta z \right) = 0.$

Préfentement, comme chaque élément du fil, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, eft fuppofé inextenfible, on a, comme dans *l'Art. XXV.*, l'équation

$dx \left(\frac{d\,dx}{dt}\right) + dy \left(\frac{d\,dy}{dt}\right) + dz \left(\frac{d\,dz}{dt}\right) = 0.$ On a de plus, par la même raifon, $\delta \cdot \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = 0$, ce qui donne $dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz = 0$, favoir (en tranfpofant les deux caractériftiques δ, d) $dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z = 0$; d'où l'on tire $d\delta x = - \frac{dy d\delta y + dz d\delta z}{dx}$, &, en intégrant, $S d\delta x = \delta x = \delta' x - S \frac{dy d\delta y + dz d\delta z}{dx}$; $\delta' x$ dénote la valeur de δx lorfque l'intégrale marquée par S eft zéro, favoir la valeur du δx à la première extrémité du fil. La fubftitution de cette valeur de δx dans l'équation (L) changera l'expreffion intégrale $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta x$ en celle-ci $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta' x - S dm \left[\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) S \left(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z\right)\right]$. Or la différence $\delta' x$ étant conftante, peut être dégagée du figne d'intégration; donc fi $T dt$ exprime la valeur totale de l'intégrale $S dm \left(d \cdot \frac{dx}{dt}\right.$

+

$+ \Pi dt)$, l'expreſſion $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\,\delta\grave{x}$ ſe réduira à celle-ci plus ſimple $T\,dt\,\delta\grave{x}$. Il s'agit maintenant de faire diſparoître les différences de δy & δz dans l'autre expreſſion $[S\,dm(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\;S\,(\frac{dy}{dx}\,d\,\delta y + \frac{dz}{dx}\,d\,\delta z)]$; c'eſt de quoi on viendra aiſément à bout par la méthode de *l'Art. IX. du Mémoire préc.* Suivant cette méthode, on trouvera que, ſi $T\,dt$ repréſente, comme ci-devant, la valeur totale de l'intégrale $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)$, & qu'on faſſe, pour abréger, $T\,dt - S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt) = V\,dt$, on aura $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\;S\frac{dy}{dx}\,d\,\delta y = \frac{V\,dt\,dy}{dx}\,\delta y - S\,d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx} \times \delta y$, & de même $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)$ $S\,\frac{dz}{dx}\,d\,\delta z = \frac{V\,dt\,dz}{dx}\,\delta z - S\,d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx} \times \delta z$: où les termes qui ſe trouvent hors du ſigne d'intégration S doivent être pris avec les conditions énoncées à la fin de *l'Art. I. du Mém. préc.*; or la valeur de $V\,dt$ qui répond au dernier point du fil eſt nulle, parceque $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)$ devient alors $= T\,dt$, & pour le premier point cette valeur eſt $= T\,dt$, parceque $S\,dm\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt) = 0$; donc ſi on marque par $\grave{x}$, $\grave{y}$, $\grave{z}$ les coordonnées qui répondent à ce point, on aura $-\frac{T\,dt\,d\grave{y}}{d\grave{x}}\,\delta\grave{y}$ pour la valeur exacte du terme $\frac{V\,dt\,dy}{dx}\,\delta y$, & $-\frac{T\,dt\,d\grave{z}}{d\grave{x}}\,\delta\grave{z}$ pour celle de l'autre terme $\frac{V\,dt\,dz}{dx}\,\delta z$. Par ces ſubſtitutions on aura

donc

donc $S\,dm\,[(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt)\, S\,(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z)] =$ $-Tdt\,(\delta' x + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z) - S\,(d\cdot\frac{V dt\, dy}{dx} \times \delta y$ $+ d\cdot\frac{V dt\, dz}{dx} \times \delta z)$, & l'équation ($L$) se changera en celle-ci

$$(M) \ldots\ldots - \int(\delta' x + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z)\, Tdt$$
$$- \int S[(d\cdot\frac{Vdt\, dy}{dx} + dm\, d\cdot\frac{dy}{dt} + dm\,\pi dt)\,\delta y +$$
$$(d\cdot\frac{Vdt\, dz}{dx} + dm\, d\cdot\frac{dz}{dt} + dm\,\Psi dt)\,\delta z] = 0;$$

d'où l'on tire pour tous les points du fil en général

$$d\cdot\frac{Vdt\, dy}{dx} + dm\,(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt) = 0$$
$$d\cdot\frac{Vdt\, dz}{dx} + dm\,(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt) = 0,$$

& ces équations, avec celle qui a été trouvée précédemment

$$dx\,(\frac{ddx}{dt}) + dy\,(\frac{ddy}{dt}) + dz\,(\frac{ddz}{dt}) = 0,$$

serviront pour déterminer le mouvement du fil.

Si on fait dans ces équations $\Pi = -P$, $\pi = 0$, $\Psi = 0$, elles reviendront au même que celles de *l'Art. XXV.*, comme il est facile de s'en assurer par un calcul fort simple.

XXX.

Scholie 1. Maintenant, pour satisfaire au reste de l'équation (M) on fera encore $(\delta' x + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z)\, Tdt = 0$, équation qui appartient uniquement au premier point du fil.

Suppo-

Supposons d'abord ce point absolument fixe, il est clair qu'on aura $\delta'x = 0$, $\delta'y = 0$, $\delta'z = 0$, ce qui rendra nuls tous les termes de l'équation dont il s'agit; donc les équations trouvées à la fin de *l'Art. préc.* suffiront dans ce cas pour résoudre le Problême.

Mais si l'autre bout du fil est aussi fixe, il faudra faire alors quelques changemens à ces équations. Pour cela soit reprise l'équation $\delta x = \delta' x - S\left(\frac{dy}{dx} d\delta y + \frac{dz}{dx} d\delta z\right)$; on trouvera, en intégrant par parties avec l'addition des constantes nécessaires, $\delta x = \delta' x - \frac{dy}{dx}\delta y - \frac{dz}{dx}\delta z + \frac{d'y}{d'x}\delta' y + \frac{d'z}{d'x}\delta' z + S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right)$. Désignons par x', y', z' les valeurs de x, y, z qui répondent à l'extrémité du fil, & rapportons l'équation qu'on vient de trouver à ce point, on aura en transposant $\delta x' + \frac{dy'}{dx'}\delta y' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta' x - \frac{d'y}{d'x}\delta' y - \frac{d'z}{d'x}\delta' z - S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right) = 0$: l'intégrale $S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right)$ étant prise pour toute la longueur du fil. Cette équation étant vraie pour tous les instans du mouvement du fil, on peut la multiplier par dt, & en prendre l'intégrale rélativement au tems t; on aura donc en affectant tous les termes du signe $\int$

$$\int\left(\delta x' + \frac{dy'}{dx'} dy' + \frac{dz'}{dx'}\delta z' - \delta' x - \frac{d'y}{d'x}\delta' y - \frac{d'z}{d'x}\delta' z\right)dt - \int S\left(d\cdot\frac{dy}{dx} \times \delta y + d\cdot\frac{dz}{dx} \times \delta z\right)dt = 0 \;.\;.\;.\;.\;. (N)$$

Equation qui doit avoir lieu en même tems que l'équation générale (M) en faisant $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z = 0$

$= 0$ conformément à l'hipotéſe, ce qui la réduit à $-\int S(\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times\delta y+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\times\delta z)\,dt=0$; je multiplie donc cette équation par un coéficient indéterminé k, & je l'ajoute à l'équation (M); j'ai (à cauſe de $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z = 0$)

$$\int S[(\mathrm{d}\cdot\frac{V\,dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+dm\,d\cdot\frac{dy}{dt}+dm\,\pi\,dt+d\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times k\,dt)\delta y$$
$$+(\mathrm{d}\cdot\frac{V\,dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+dm\,d\cdot\frac{dz}{dt}+dm\,\psi\,dt+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\times k\,dt)\delta z]$$
$= 0$; d'où je tire pour le mouvement du fil

$$\mathrm{d}\cdot\frac{V\,dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+dm(d\cdot\frac{dy}{dt}+\pi\,dt)+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times k\,dt=0$$
$$\mathrm{d}\cdot\frac{V\,dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+dm(\mathrm{d}\cdot\frac{dz}{dt}+\psi\,dt)+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\times k\,dt=0.$$

Et la troiſiéme équation ſera la même que dans *l'Art. préc.*

XXXI.

SCHOLIE 2. L'équation (N) étant multipliée par un coéficient indéterminé k, & enſuite ajoutée à l'équation (M), on a en général

$$\int[(\mathrm{d}x'\delta x'+\mathrm{d}y'\delta y'+\mathrm{d}z'\delta z')\frac{k\,dt}{\mathrm{d}x'}-$$
$$(\mathrm{d}'x\,\delta' x+\mathrm{d}'y\,\delta' y+\mathrm{d}'z\,\delta' z)\frac{T+k}{\mathrm{d}'x}dt]$$
$$-\int S[(\mathrm{d}\cdot\frac{V\,dt\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times k\,dt+dm\,d\cdot\frac{dy}{dt}+dm\,\pi\,dt)\delta y$$
$$+(\mathrm{d}\cdot\frac{V\,dt\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\mathrm{d}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\times k\,dt+dm\,d\cdot\frac{dz}{dt}+d\,m\,\psi\,dt)\delta z]=0.$$

Les termes affectés du double ſigne $\int S$ fourniront d'abord pour le mouvement général du fil les mêmes équations que dans *l'Art. préc.*; enſuite les autres termes affectés ſimplement du ſigne $\int$ donneront l'équation

($\mathrm{d}x'\delta x'$

$$(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\,\frac{k\,dt}{dx'} -$$

$$(d\grave{x}\delta\grave{x} + d\grave{y}\delta\grave{y} + d\grave{z}\delta\grave{z}) \times \frac{T+k}{d\grave{x}}\,dt = 0.$$

d'où l'on tire les conclusions suivantes.

1.° Si le fil est fixement arrêté à ses deux extrémités, les différences $\delta\grave{x}$, $\delta\grave{y}$, $\delta\grave{z}$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ sont nulles par elles mêmes, & l'équation, dont il s'agit ne fournit aucune condition nouvelle; c'est le cas de *l'Art. préc.*

2.° S'il n'y a qu'une des extrémités du fil, qui soit fixe, alors on aura simplement $\delta\grave{x}$, $\delta\grave{y}$, $\delta\grave{z} = 0$, ou $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z' = 0$; dans le premier cas, il restera l'équation $(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\,\frac{k\,dt}{dx'} = 0$, à laquelle on ne peut satisfaire qu'en mettant $k = 0$; dans le second, l'équation restante sera $-\,(d\grave{x}\delta\grave{x} + d\grave{y}\delta\grave{y} + d\grave{z}\delta\grave{z})\,\frac{k+T}{d\grave{x}}\,dt = 0$, laquelle donnera nécessairement $k + T = 0$, savoir $T = -k$.

3.° Si le fil est attaché d'un côté à une verge fixe le long de laquelle il puisse couler par le moïen d'un anneau, & que l'équation de la verge soit en général $dz = m\,dx + n\,dy$; alors on supposera $\delta\grave{z} = \grave{m}\delta\grave{x} + \grave{n}\delta\grave{y}$, ou $\delta z' = m'\delta x' + n'\delta y'$, selon que ce sera le premier, ou le dernier point du fil, qui décrira la courbe donnée, & substituant dans l'équation ci-dessus la valeur de $\delta\grave{z}$ ou de $\delta z'$ on en tirera, pour le premier cas, les deux conditions $d\grave{x} + \grave{m}\,d\grave{z} = 0$, $d\grave{y} + \grave{n}\,d\grave{z} = 0$, & de plus $k = 0$, si l'autre bout du fil est libre, & pour le second cas on trouvera de même $dx' + m'\,dz' = 0$, $dy' + n'\,dz' = 0$, & de plus $T + k = 0$, si le premier point du fil est libre.

4.° Si les deux bouts du fil coulent le long de deux courbes représentées par les équations $d\grave{z} = \grave{m}\,d\grave{x} + \grave{n}\,d\grave{y}$, $dz' = m'\,dx' + n'\,dy'$, on mettra $\grave{m}\delta\grave{x} + \grave{n}\delta\grave{y}$ pour

 $\delta\grave{z}$,

$\delta 'z$, & $m'\delta x' + n'\delta y'$ pour $\delta z'$, & l'on fera en conséquence $d'x + 'm d'z = 0$, $d'y + 'n d'z = 0$, $dx' + m' dz' = 0$, $dy' + n' dz' = 0$.

5.° Si les deux bouts du fil sont attachés l'un à l'autre, ensorte qu'il en résulte une courbe rentrente en elle même on aura dans ce cas $x' = 'x$, $y' = 'y$, $z' = 'z$, & l'équation générale se réduira à $-(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z)\frac{T dt}{d'x} = 0$; d'où $T = 0$ comme dans le premier cas du n. 1.

Toutes ces équations, au reste, devront se vérifier au moien des constantes qui se trouveront dans les équations générales de *l'Art. préc.* après leur intégration.

XXXII.

Scholie 3. Imaginons que le fil soit emporté par un corps de masse finie M' attaché à son extrémité, & animé par des puissances quelconques P', Q', R' *&c.* Il est clair que dans ce cas la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum* ne sera plus simplement $S\, dm \int u\, ds$, mais $S\, dm \int u\, ds + M' \int u'\, ds'$ en nommant u' la vitesse du corps M', & ds' l'élément de la courbe qu'il décrit. Or cette derniére formule étant traitée comme celle du Prob. 1. donnera pour sa différentielle

$$-M'\int\left[\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right)\delta x' + \left(d\cdot\frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right)\delta y' + \left(d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right)\delta z'\right];$$

on ajoutera donc cette quantité au premier membre de l'équation générale de *l'Art. préc.*, & l'on aura celle-ci

$$-\int\left[\left(M' d\cdot\frac{dx'}{dt} + M'\Pi' dt - k dt\right)\delta x' + \right.$$

(*M' d*·

$$(M'd\cdot\frac{dy'}{dt}+M'\pi'dt-\frac{dy'}{dx'}k\,dt)\delta y'+$$

$$(M'd\cdot\frac{dz'}{dt}+M'\Psi dt-\frac{dz'}{dx'}k\,dt)\delta z'+$$

$$(d'x\,\delta'x+d'y\,\delta'y+d'z\,\delta'z)\times\frac{T+k}{d'x}dt\,]$$

$$-\int S[(d\cdot\frac{V\,dt\,dy}{dx}+d\cdot\frac{dy}{dx}\times k\,dt+dm\,d\cdot\frac{dy}{dt}+dm\,\pi\,dt)\delta y$$

$$-(d\cdot\frac{V\,dt\,dz}{dx}+d\cdot\frac{dz}{dx}\times k\,dt+dm\,d\cdot\frac{dz}{dt}+dm\,\Psi\,dt)\delta z]$$

$$=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(P)$$

Les termes affectés du double signe $\int S$ donneront pour le mouvement du fil en général les mêmes équations de l'*Art. XXX.*, qu'il est inutile de répéter. Les autres termes fourniront l'équation

$$(M'd\cdot\frac{dx'}{dt}+M'\Pi'dt-k\,dt)\delta x'+$$

$$(M'd\cdot\frac{dy'}{dt}+M'\pi'dt-\frac{dy'}{dx'}k\,dt)\delta y'+$$

$$(M'd\cdot\frac{dz'}{dt}+M'\Psi'dt-\frac{dz'}{dx'}k\,dt)\delta z'+$$

$$(d'x\,\delta'x+d'y\,\delta'y+d'z\,\delta'z)\times\frac{T+k}{d'x}dt=0.$$

Or si le corps M' est libre en sorte que les différences $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ demeurent indéterminées, on fera

$$M'(d\cdot\frac{dx'}{dt}+\Pi'dt)-k\,dt=0$$

$$M'(d\cdot\frac{dy'}{dt}+\pi'dt)-\frac{dy'}{dx'}k\,dt=0$$

$$M'(d\cdot\frac{dz'}{dt}+\Psi'dt)-\frac{dz'}{dx'}k\,dt=0.$$

Ce sont les équations qui serviront à déterminer le mouvement du corps M'.

 Si

Si ce corps étoit contraint de se mouvoir sur une surface donnée par l'équation $dz' = m'dx' + n'dy'$; on mettroit, comme à l'ordinaire, $m'\delta x' + n'\delta y'$ au lieu de $\delta z'$, & l'on en tireroit les équations

$$M'\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right) - k\,dt +$$
$$\left[M'\left(d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right) - \frac{dz'}{dx'}k\,dt\right]m' = 0$$
$$M'\left(d\cdot\frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right) - \frac{dy'}{dx'}k\,dt +$$
$$\left[M'\left(d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right) - \frac{dz'}{dx'}k\,dt\right]n' = 0.$$

A l'égard des termes $(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) \times \frac{T+k}{d'x}dt$ qui appartiennent au premier point du fil, ils fourniront les mêmes conditions que dans *l'Art. préc.*, selon les différentes circonstances du mouvement de ce point. Mais si l'on imaginoit de plus en ce point un autre corps $'M$, animé des puissances $'P$, $'Q$, $'R$ *&c.*, ensorte que le fil fût emporté par deux corps $'M$, M' fixement attachés à ses extrémités; alors on auroit, pour la formule du *maximum*, ou du *minimum*, $S\,dm\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + 'M\int u\,d's$; & l'on trouveroit, en faisant le calcul de la même maniére que ci-dessus, que le premier membre de l'équation (P) seroit augmenté des termes $-'M\int\left[\left(d\cdot\frac{d'x}{dt} + '\Pi dt\right)\delta'x\right.$ $\left(d\cdot\frac{d'y}{dt} + '\pi dt\right)\delta'y + \left.\left(d\cdot\frac{d'z}{dt} + '\Psi dt\right)\delta'z\right]$; ce qui ne changeroit rien aux formules trouvées pour le mouvement du fil, & de l'autre corps M'; mais on auroit de plus l'équation

$$\left['M d\cdot\frac{d'x}{dt} + 'M'\Pi\,dt + (T+k)\,dt\right]\delta'x +$$

$('M d\cdot$

$$['M d \cdot \frac{d'y}{dt} + 'M'\pi\, dt + \frac{d'y}{d'x} \times (T + k)\, dt\,]\,\delta y +$$

$$['M d \cdot \frac{d'z}{dt} + 'M'\Psi\, dt + \frac{d'z}{d'x} \times (T+k)\, dt\,\delta]\,\delta' z = 0;$$

d'où l'on tireroit pour le mouvement du corps $'M$ des formules analogues à celles qu'on a trouvées pour le corps M'.

XXXIII.

Probleme 7. Résoudre le Problême précédent, en supposant que le fil soit extensible & élastique.

Solution. Soit F le ressort, c'est-à-dire, la force de contraction de chaque élément du fil, on aura en général, par l'équation (V) de *l'Art. VIII.*, $S dm\, u\, \delta u = - S dm\, (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.) - S F \delta f$; ce qui donne, en multipliant par dt, & mettant $\Pi \delta x + \pi \delta y + \Psi \delta z$ au lieu de $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.$, & ds au lieu de f,

(Y) . . . . $S dm\, u\, \delta u\, dt = - S dm\, (\Pi dt\, \delta x + \pi\, dt\, \delta y + \Psi\, dt\, \delta z) - S F dt\, \delta\, ds.$

Or $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; donc

$$\delta ds = \frac{dx\, \delta dx + dy\, \delta dy + dz\, \delta dz}{ds}$$
$$= \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z}{ds};$$

donc, mettant cette valeur dans $S F dt\, \delta\, ds$, & intégrant par parties avec les constantes nécessaires, on aura

$$S F dt\, \delta\, ds = \frac{F' dt}{ds'}(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z') -$$
$$\frac{'F dt}{d's}(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z) -$$
$$S\,(d \cdot \frac{F dx}{ds} \times \delta x + d \cdot \frac{F dy}{ds} \times \delta y + d \cdot \frac{F dz}{ds} \times \delta z)\, dt.$$

Main-

Maintenant, pour résoudre le Problême, il n'y a plus qu'à mettre dans l'équation (K) de *l'Art. XXIX.* au lieu de $Sdmu\delta udt$ la valeur qu'on vient de trouver, & l'on aura, en ordonnant les termes

$$-\int[(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{F'dt}{ds'} -$$
$$(d'x\delta'x + d'x\delta'y + d'z\delta'z)\frac{'Fdt}{d's}] +$$
$$\int S[(d\cdot\frac{Fdx}{ds}\times dt - dm\Pi dt - dmd\cdot\frac{dx}{dt})\delta x +$$
$$(d\cdot\frac{Fdy}{ds}\times dt - dm\pi dt - dmd\cdot\frac{dy}{dt})\delta y +$$
$$(d\cdot\frac{Fdz}{ds}\times dt - dm\Psi dt - dmd\cdot\frac{dz}{dt})\delta z] = 0;$$

d'où l'on tire pour les équations générales du mouvement du fil

$$d\cdot\frac{Fdx}{ds}\times dt - dm(\Pi dt + d\cdot\frac{dx}{dt}) = 0$$
$$d\cdot\frac{Fdy}{ds}\times dt - dm(\pi dt + d\cdot\frac{dy}{dt}) = 0$$
$$d\cdot\frac{Fdz}{ds}\times dt - dm(\Psi dt + d\cdot\frac{dz}{dt}) = 0,$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé dans *l'Art. XXVII.* en mettant π, & $\Psi = 0$, & $-P$ au lieu de Π.

On aura de plus l'équation

$$(dx'\delta x' + dy'\delta y' + dz'\delta z')\frac{F'dt}{ds'} -$$
$$(d'x\delta'x + d'y\delta'y + d'z\delta'z)\frac{'Fdt}{d's} = 0$$

qu'on traitera qu'on a fait ci-devant l'équation (P), & qui donnera par conséquent des conclusions semblables sur le mouvement des deux extrémités du fil. J'en laisse le détail au Lecteur.

XXXIV.

PROBLEME 8. Trouver le mouvement d'un corps de figure quelconque, animé par des forces quelconques.

SOLUTION. Soit nommée dm chaque particule du corps, u sa viteſſe, & ds l'eſpace qu'elle parcourt dans le tems dt; on aura comme dans l'*Art. XXIX.* $Sdm\int uds$ pour la formule qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*.

En ſuivant la méthode expliquée dans cet *Article*, on parviendra de même à l'équation (L)

$$-\int Sdm[(d\cdot\frac{dx}{dt}+\Pi dt)\delta x+(d\cdot\frac{dy}{dt}+\pi dt)\delta y+$$
$$(d\cdot\frac{dz}{dt}+\psi dt)\delta z]=0,$$

& il n'y aura plus qu'à ſubſtituer dans cette équation les valeurs de dx, dy, dz, & δx, δy, δz convenables à chaque particule du corps donné.

Pour trouver ces valeurs je prens dans l'intérieur du corps un point quelconque fixe, que j'appelle le centre de rotation, & dont je ſuppoſe que la poſition ſoit repréſentée par les coordonnées rectangles X, Y, Z; je rapporte à ce centre chacun des autres points du corps par le moïen de trois nouvelles coordonnées p, q, r priſes dans les mêmes axes que les X, Y, Z; j'ai ainſi $x=X+p$, $y=Y+q$, $z=Z+r$; par conſéquent $dx=dX+dp$, $dy=dY+dq$, $dz=dZ+dr$, & de même $\delta x=\delta X+\delta p$, $\delta y=\delta X+\delta q$, $\delta z=\delta Z+\delta r$.

Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des différences de p, q, r pour chaque point du corps; pour cela il faut conſidérer le mouvement du corps autour de ſon centre, & déterminer les variations qui en réſultent dans chacune des lignes p, q, r. Or il eſt facile de voir que, quel que ſoit ce mouvement, il peut toujours être regardé comme formé de trois mouvemens de rotation autour de trois axes perpendiculaires entr'eux, & paſſant par le centre

centre dont nous parlons; donc si on prend pour les axes de rotation ceux des coordonnées p, q, r; on trouvera par un calcul très-simple que, tandis que le corps tourne autour de l'axe des r d'un mouvement angulaire dR, la ligne p croîtra de la quantité $q\,dR$, & la ligne q décroîtra de la quantité $p\,dR$; que de même, en nommant dQ l'angle de rotation autour de l'axe des q, les lignes p & r deviendront par ce mouvement $p + r\,dQ$, $r - p\,dQ$; & qu'enfin l'angle de rotation autour de l'axe des p, étant dP, il en résultera dans la ligne q un accroissement $= r\,dP$, & dans la ligne r un décroissement $= q\,dP$. Donc en ajoutant ensemble toutes ces différentes variations des lignes p, q, r, & exprimant les variations totales par dp, dq, dr, on aura en général

$$\left.\begin{aligned} dp &= r\,dQ + q\,dR \\ dq &= r\,dP - p\,dR \\ dr &= -q\,dP - p\,dQ \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (Q)$$

& par conséquent aussi, en changeant d en δ.

$$\begin{aligned} \delta p &= r\,\delta Q + q\,\delta R \\ \delta q &= r\,\delta P - p\,\delta R \\ \delta r &= -q\,\delta P - p\,\delta Q. \end{aligned}$$

On aura donc par-là

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta X + r\,\delta Q + q\,\delta R \\ \delta y &= \delta Y + r\,\delta P - p\,\delta R \\ \delta z &= \delta Z - q\,\delta P - p\,\delta Q; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dX}{dt} + r\frac{dQ}{dt} + q\frac{dR}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dY}{dt} + r\frac{dP}{dt} - p\frac{dR}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dZ}{dt} - q\frac{dP}{dt} - p\frac{dQ}{dt}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$d\cdot\frac{dx}{dt} = d\cdot\frac{dX}{dt} + r\,d\cdot\frac{dQ}{dt} + dr\frac{dQ}{dt} + q\,d\cdot\frac{dR}{dt} +$$

dq

$dq\frac{dR}{dt}$ savoir, en mettant pour dq, dr, leurs valeurs,

$$= d\cdot\frac{dX}{dt} + rd\cdot\frac{dQ}{dt} + qd\cdot\frac{dR}{dt} - q\frac{dPdQ}{dt} - p\frac{dQ^2}{dt} + r\frac{dPdR}{dt} - p\frac{dR^2}{dt};$$

on aura de la même maniére

$$d\cdot\frac{dy}{dt} = d\cdot\frac{dY}{dt} + rd\cdot\frac{dP}{dt} - pd\cdot\frac{dR}{dt} - q\frac{dP^2}{dt} - p\frac{dPdQ}{dt} - r\frac{dQdR}{dt} - q\frac{dR^2}{dt};$$

$$d\cdot\frac{dz}{dt} = d\cdot\frac{dZ}{dt} - qd\cdot\frac{dP}{dt} - pd\cdot\frac{dQ}{dt} - r\frac{dP^2}{dt} + p\frac{dPdR}{dt} - r\frac{dQ^2}{dt} - q\frac{dQdR}{dt}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L), & faisant sortir hors du signe S les quantités dX, dY, dZ, δX, δY, δZ, dP, dQ, dR, δP, δQ, δR, qui sont les mêmes pour chaque point du corps, enfin ordonnant les termes par rapport à δX, δY, δZ, δP, δQ, δR; on aura une équation de la forme suivante

$$\int([X]\delta X + [Y]\delta Y + [Z]\delta Z + [P]\delta P + [Q]\delta Q + [R]\delta R) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (S)$$

dans laquelle

$$[X] = Md\cdot\frac{dX}{dt} + Srdm \times \left(d\cdot\frac{dQ}{dt} + \frac{dPdR}{dt}\right) + Sqdm \times \left(d\cdot\frac{dR}{dt} - \frac{dPdQ}{dt}\right) - Spdm \times \frac{dQ^2 + dR^2}{dt} + S\Pi dm dt$$

$$[Y] = Md\cdot\frac{dY}{dt} + Srdm \times \left(d\cdot\frac{dP}{dt} - \frac{dQdR}{dt}\right) + Sqdm \times \frac{dP^2 + dR^2}{dt} - Spdm \times \left(d\cdot\frac{dR}{dt} + \frac{dPdQ}{dt}\right) + S\pi dm dt$$

[Z]

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} - Srdm \times \frac{dP^2 + dQ^2}{dt} - Sqdm \times \left(d \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{dPdR}{dt}\right) - Spdm \times \left(d \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{dPdR}{dt}\right) + S\Psi dmdt.$$

(M exprime la valeur de Sdm, ſavoir la maſſe entiére du corps).

$$[P] = Srdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sqdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times \frac{dQ^2 - dR^2}{dt} - Sprdm \times \frac{dPdQ}{dt} - Spqdm \times \frac{dPdR}{dt} + (Sq^2 dm - Sr^2 dm) \times \frac{dQdR}{dt} + S\pi rdmdt - S\Psi qdmdt$$

$$[Q] = Srdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + (Sr^2dm + Sp^2dm) \times d \cdot \frac{dQ}{dt} + Spqdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sprdm \times \frac{dP^2 - dR^2}{dt} - Sqrdm \times \frac{dPdQ}{dt} + Spqdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sr^2 dm - Sp^2 dm) \times \frac{dPdR}{dt} + S\Pi rdmdt - S\Psi pdmdt$$

$$[R] = Sqdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} + (Sp^2dm + Sq^2dm) \times d \cdot \frac{dR}{dt} + Sqrdm \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - Sprdm \times d \cdot \frac{dP}{dt} + Spqdm \times \frac{dP^2 - dQ^2}{dt} + Sqrdm \times \frac{dPdR}{dt} + Sprdm \times \frac{dQdR}{dt} + (Sp^2 dm - Sq^2 dm) \times \frac{dPdQ}{dt} + S\Pi qdmdt - S\pi pdmdt.$$

Cette

Cette équation donnera la solution du Problême en faisant, comme à l'ordinaire, les coéficiens des différences marquées par δ, chacun en particulier $= 0$; comme on va le voir dans les Corollaires suivans.

XXXV.

REMARQUE. On peut simplifier les expressions de $[X]$, $[Y]$, $[Z]$, $[P]$, $[Q]$, $[R]$, en faisant tomber le centre de rotation dans le centre de gravité du corps. Car alors les intégrales $Spdm$, $Sqdm$, $Srdm$, qui expriment la somme des momens de toutes les particules du corps par rapport à ses trois axes de rotation, deviendront nécessairement égales à zéro, par la proprieté connue de ce centre.

A l'égard des autres intégrales Sp^2dm, Sq^2dm &c., il faut observer que leur valeur dépend de la position instantanée du corps, & qu'elle varie, par conséquent, avec le tems t.

En effet $d\cdot Sp^2dm = Sd\cdot p^2dm = 2Spdpdm =$ (en mettant au lieu de dp sa valeur $rdQ + qdR$) $2Sprdm \times dQ + 2Spqdm \times dR$;
on trouvera de la même maniére

$d\cdot Sq^2dm = 2Sqrdm \times dP - 2Spqdm \times dR$,

$d\cdot Sr^2dm = -2Sqrdm \times dP - 2Sprdm \times dQ$;

$d\cdot Spqdm = Sprdm \times dP + Sqrdm \times dQ + (Sq^2dm - Sp^2dm)dR$

$d\cdot Sprdm = -Spqdm \times dP + (Sr^2dm - Sp^2dm)dQ + Sq^2dm \times dR$

$d\cdot Sqrdm = (Sr^2dm - Sq^2dm)dP - Spqdm \times dQ - Sprdm \times dR$.

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer les valeurs générales des quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqrdm$, qui entrent dans les expressions $[X]$, $[Y]$ &c. de l'équation (S); mais c'est de quoi il ne pa-

 roit

roit pas facile de venir à bout à cause de la difficulté d'intégrer ces sortes d'équations.

XXXVI.

Corollaire 1. Or si le corps est entiérement libre, en sorte que les différences δx, δy, δz, δP, δQ, δR n'aïent entr'elles aucun rapport déterminé, il faut, pour vérifier l'équation (S), faire les coeficiens de ces différences chacun en particulier $= 0$; ce qui donne les six équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$; par où l'on peut connoître le mouvement du corps à chaque instant. Si on fait dans ces équations $S p\, dm = 0$, $S q\, dm = 0$, $S r\, dm = 0$, selon l'hypotése de *l'art. préc.* les trois premiéres deviendront celles-ci

$$M d \cdot \frac{dX}{dt} + S\, \Pi\, dm\, dt = 0$$

$$M d \cdot \frac{dY}{dt} + S\, \varpi\, dm\, dt = 0$$

$$M d \cdot \frac{dZ}{dt} + S\, \Psi\, dm\, dt = 0$$

lesquelles montrent, que le centre de gravité du corps se meut de la même maniére que si toute la masse du corps étoit réunie dans ce centre.

Les trois autres équations ne contiendront que les variables dP, dQ, dR, d'où dépend le mouvement de rotation du corps autour de centre de gravité; ainsi ce mouvement sera tout à fait indépendant de celui du centre de gravité. — Imaginons que le corps ne tourne, qu'autour d'un seul axe, on supposera, dans les équations $[P] = 0$, $[Q] = 0$ $[R] = 0$, deux quelconques des trois variables dP, dQ, dR, égales à zéro. Soient d'abord dQ, dR, $= 0$ on aura

$$(S\, r^2 dm + S\, q^2 dm)\, d \cdot \frac{dP}{dt}$$

+

$$+ S \pi r\, d m\, d t - S \Psi q\, d m\, d t = 0$$

$$S p q\, d m \times d \cdot \frac{d P}{d t} + S p r\, d m \times \frac{d P^2}{d t}$$

$$+ S \Pi r\, d m\, d t - S \Psi p\, d m\, d t = 0$$

$$- S p r\, d m \times d \cdot \frac{d P}{d t} + S p q\, d m \times \frac{d P^2}{d t}$$

$$+ S \Pi q\, d m\, d t - S \pi p\, d m\, d t = 0$$

On trouvera de plus, par les formules données à la fin de *l' art. prec.*, $d \cdot S r^2 d m + d \cdot S q^2 d m = 0$; $d \cdot S p q d m = S p r d m \times d P$, $d \cdot S p r d m = - S p q d m \times d P$; d' où 1.° $S r^2 d m + S q^2 d m =$ const. (j' appellerai cette constante A) 2.° $\frac{d \cdot S p q d m}{S p r d m} = \frac{d \cdot S p r d m}{S p q d m}$, savoir $S p q d m \times d \cdot S p q d m = - S p r d m \times d . S p r d m$, ce qui donne, en intégrant & réduisant, $(S p q d m)^2 + (S p r d m)^2 =$ const.; soit cette constante $= B^2$, on aura $S p r d m = \sqrt{[B^2 - (S p q d m)^2]}$ donc $\frac{d \cdot S p q d m}{\sqrt{[B^2 - (S p q d m)^2]}} = d P$, d' où $S p q d m = B$ sin. $(\alpha + P)$; α étant un angle constant tel que B sin. $\alpha = S p q d m$, au commencement de la rotation du corps; par conséquent $S p r d m = B$ cos. $(\alpha + P)$; donc si on substitue ces valeurs dans les trois équations ci-dessus on aura.

$$A d \cdot \frac{d P}{d t} + S \pi r\, d m\, d t - S \Psi q\, d m\, d t = 0$$

$$B \text{ sin. } (\alpha + P)\, d \cdot \frac{d P}{d t} + B \text{ cos. } (\alpha + P) \frac{d P^2}{d}$$

$$+ S \Pi r\, d m\, d t - S \Psi p\, d m\, d t = 0$$

$$- B \text{ cos. } (\alpha + P)\, d \cdot \frac{d P}{d t} + B \text{ sin. } (\alpha + P) \frac{d P^2}{d t}$$

$$+ S \Pi q\, d m\, d - S \pi p\, d m\, d t = 0$$

La premiére de ces équations etant multipliée par $\frac{d P}{d t}$, & ensuite

ensuite intégrée donne $\frac{A\,dP^2}{2\,dt^2} + \int (S\pi r\,dm - S\Psi q\,dm)\,dP$ $= \frac{A c^2}{2}$, c étant la valeur de $\frac{dP}{dt}$ lorsque $P = 0$, c'est à dire la viteſſe primitive de rotation; donc ſubſtituant dans la ſeconde, & dans la troiſiéme équation, au lieu de $d \cdot \frac{dP}{dt}$ & de $\frac{dP^2}{dt}$, leurs valeurs, on aura, après avoir diviſé par dt

$$- \frac{B}{A} \text{ſin.} (\alpha + P) \times (S\pi r\,dm - S\Psi q\,dm)$$
$$- \frac{2B}{A} \text{coſ.} (\alpha + P) \times \int (S\pi r\,dm - \Psi q\,dm)\,dP$$
$$+ B c^2 \text{coſ.} (\alpha + P) + S\Pi r\,dm - S\Psi p\,dm = 0$$
$$\frac{B}{A} \text{coſ.} (\alpha + P) \times (S\pi r\,dm - S\Psi q\,dm)$$
$$- \frac{2B}{A} \text{ſin.} (\alpha + P) \times \int (S\pi r\,dm - S\Psi q\,dm)\,dP$$
$$+ B c^2 \text{ſin.} (\alpha + P) + S\Pi q\,dm - S\pi p\,dm = 0$$

& ces équations renfermeront les conditions néceſſaires pour que le corps tourne librement autour d'un axe immobile.

Si les forces Π, π, Ψ ſont nulles, ou conſtantes, ou bien, ſi elles ſont proportionelles à p, q, r, on a $S\pi r\,dm - S\Psi q\,dm = 0$, $S\Pi r\,dm - S\Psi p\,dm = 0$, $S\Pi q\,dm - S\pi p\,dm = 0$; par conſéquent $\frac{dP^2}{dt^2} = c^2$, c'eſt à dire que le mouvement de rotation eſt uniforme; & les équations précédentes ſe réduiſent à $B c^2$ coſ. $(\alpha + P) = 0$, $B c^2$ ſin. $(\alpha + P) = 0$, ce qui donne $B = 0$; on aura donc $\sqrt{[(S p q\,dm)^2 + (S p r\,dm)^2]} = 0$, ce qui ne peut arriver à moins que l'on n'ait $S p q\,dm = 0$, $S p r\,dm = 0$. Voila donc les conditions par leſquelles on déterminera la poſition de l'axe de rotation au dedans du corps. Il eſt clair que ces conditions ſont ſuffiſantes pour une telle détermination

tion; puiſque on ſait que la poſition d'une droite qui paſſe par un point donné ne dépend que de deux variables.

Soient maintenant $dP = 0$, $dR = 0$, ou $dP = 0$, $dQ = 0$, dans les équations $[P] = 0$, $[Q] = 0$, $[R] = 0$; on trouvera, par des procédés ſemblables à ceux que nous venons de pratiquer, les conditions de la rotation du corps autour de deux autres axes.

Dans la ſuppoſition de $S\,\pi\, r\, d\, m - S\,\psi\, q\, d\, m = 0$, $S\,\Pi\, r\, d\, m - S\,\psi\, q\, d\, m = 0$, $S\,\Pi\, q\, d\, m - S\,\pi\, p\, d\, m = 0$; les équations dont il s' agit ſeront

$$S\,p\,q\,d\,m \times d \cdot \frac{dQ}{dt} + S\,q\,r\,d\,m \times \frac{dQ^2}{dt} = 0$$

$$(S\,r^2\,d\,m + S\,p^2\,d\,m)\,d \cdot \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$S\,q\,r\,d\,m \times d \cdot \frac{dQ}{dt} - S\,p\,q\,d\,m \times \frac{dQ^2}{dt} = 0$$

pour le cas où $dP = 0$, $dR = 0$, &

$$-S\,p\,r\,d\,m \times d \cdot \frac{dR}{dt} - S\,q\,r\,d\,m \times \frac{dR^2}{dt} = 0$$

$$S\,q\,r\,d\,m \times d \cdot \frac{dR}{dt} - S\,p\,r\,d\,m \times \frac{dR^2}{dt} = 0$$

$$(S\,p^2\,d\,m + S\,q^2\,d\,m)\,d \cdot \frac{dR}{dt} = 0$$

pour le cas où $dP = 0$, $dQ = 0$.

Dans le premier cas on aura donc $d . \frac{dQ}{dt} = 0$ c'eſt à dire que la rotation ſera uniforme, & de plus $S\,q\,r\,d\,m = 0$, $S\,p\,q\,d\,m = 0$ pour la détermination de l' axe de rotation.

Le ſecond cas donnera pareillement $d \cdot \frac{dR}{dt} = 0$, ſavoir la rotation uniforme, & $S\,p\,r\,d\,m = 0$, $S\,q\,r\,d\,m = 0$ pour la détermination de ſon axe.

On trouvera donc trois axes fixes, autour de chacun deſquels le corps *M* pourra tourner librement & uniformement, en

en cherchant dans ce corps la poſition de trois droites, qui paſſent par ſon centre de gravité, & qui ſoient telles, que $Spqdm = o$, $Sprdm = o$, $Sqrdm = o$, $Spqdm = o$, $Sqrdm$, $Sprdm = o$, ſavoir $Spqdm = o$, $Sprdm = o$ $Sqrdm = o$; p, q, r, étant les coordonnées rectangles qui déterminent la poſition de chaque particule du corps par rapport à chacune de ces droites; d'où il eſt aiſé de conclure que les trois axes de rotation dont il s'agit ſont néceſſairement perpendiculaires entr'eux.

Au reſte, quelque ſoit le mouvement du corps autour de ſon centre de gravité, il y aura toujours un axe inſtantané de rotation, qui paſſera pour ce centre, & qui ſera facile à déterminer dès qu'on connoîtra les mouvemens angulaires dP, dQ, dR; ſoient p', q', r' les coordonnées qui répondent à chacun des point placés dans l'axe dont nous parlons; il eſt clair que, ces points devant être immobiles pour un inſtant, on doit avoir $dp' = r'dQ + q'dR = o$, $dq' = r'dP - p'dR = o$, $dr' = -q'dP - p'dQ = o$; équations dont la troiſiéme eſt, comme on le voit, une ſuite néceſſaire des deux prémiéres; c'eſt pourquoi on fera ſimplement $r'dQ + q'dR = o$, $r'dP - p'dR = o$: ce qui, en regardant p', q', r' comme variables, & dP, dQ, dR comme conſtantes, donne une droite, dont la poſition eſt aiſée à déterminer par rapport aux axes des coordonnées p', q', r'.

Dans le premier inſtant du mouvement on a, en faiſant $dP = o$, $dQ = o$, $dR = o$ dans les équations $[P] = o$, $[Q] = o$, $[R] = o$,

$$(Sr^2 dm + Sq^2 dm)\, d\cdot\frac{dP}{dt} + Spqdm \times d\cdot\frac{dQ}{dt}$$

$$- Sprdm \times d\cdot\frac{dR}{dt} + S\pi r dm dt - S\psi q dm dt = o$$

$$(Sr^2 dm + Sp^2 dm)\, d\cdot\frac{dQ}{dt} + Spqdm \times d\cdot\frac{dP}{dt}$$

+

$$+ S q r d m \times d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi r d m d t - S \Psi p d m d t = 0$$

$$(S p^2 d m + S q^2 d m)\, d \cdot \frac{dR}{dt} + S q r d m \times d \cdot \frac{dQ}{dt}$$

$$- S p r d m \times d \cdot \frac{dP}{dt} + S \Pi q d m d t - S \pi p d m d t = 0$$

de plus les équations $r' dQ + q' dR = 0$, $r' dP - p' dR = 0$ étant divisées par dt, & ensuite différentiées donnent (à cause de $dP = 0$, $dQ = 0$, $dR = 0$)

$$r' d \cdot \frac{dQ}{dt} + q' d \cdot \frac{dR}{dt} = 0;\; r' d \cdot \frac{dP}{dt} - p' d \cdot \frac{dR}{dt} = 0;$$

d' où l' on tire

$$d \cdot \frac{dQ}{dt} = - \frac{q'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt};\; d \cdot \frac{dP}{dt} = \frac{p'}{r'} \times d \cdot \frac{dR}{dt};$$

ces valeurs substituées dans les équations ci-devant, on a

$$\left[(S r^2 dm + S q^2 dm) \frac{p'}{r'} - S p q\, dm \times \frac{q'}{r'} - S p r\, dm \right]$$

$$\times\, d \cdot \frac{dR}{dt} + S \pi r d m d t - S \Psi q d m d t = 0,$$

$$\left[-(S r^2 dm + S p^2 dm) \frac{q'}{r'} + S p q dm \times \frac{p'}{r'} + S q r d m \right]$$

$$\times\, d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi r d m d t - S \Psi p d m d t = 0,$$

$$\left[S p^2 dm + S q^2 dm - S q r d m \times \frac{q'}{r'} - S p r d m \times \frac{p'}{r'} \right]$$

$$\times\, d \cdot \frac{dR}{dt} + S \Pi q d m d t - S \pi p d m d t = 0,$$

& en éliminant $d \cdot \frac{dR}{dt}$,

$$\frac{(S r^2 dm + S q^2 dm)\, p' - S p q d m \times q' - S p r d m \times r'}{S p q d m \times p' - (S r^2 dm + S p^2 dm)\, q' + S q r d m \times r'}$$

$$= \frac{S \Psi q d m - S \pi r d m}{S \Psi p d m - S \Pi r d m}.$$

$$\frac{(Sr^2dm + Sq^2dm)p' - Spqdm \times q' - Sprdm \times r'}{- Sprdm \times p' - Sqrdm \times q' + (Sp^2dm + Sq^2dm)r'} = \frac{S\Psi qdm - S\pi rdm}{S\pi pdm - S\Pi qdm};$$

Equations qui donnent le rapport des coordonnées p', q', r' entr'elles, & par conséquent la position de l'axe de rotation au commencement du mouvement.

XXXVII.

Corollaire 2. Si le corps n'est pas absolument libre, mais qu'un de ses points quelconque soit obligé de se mouvoir sur une surface donnée ; alors, prenant ce point pour le centre de rotation, & supposant la surface exprimée par l'équation $dZ = m\,dX + n\,dY$, on ne fera que mettre, dans l'équation (S), $m\delta X + n\delta Y$ pour δZ, & l'on aura, au lieu des trois équations $[X] = 0$, $[Y] = 0$, $[Z] = 0$, ces deux-ci $[X] + m[Z] = 0$, $[Y] + n[Z] = 0$; les trois autres ne recevant aucun changement. Mais si pour simplifier les expressions de $[X]$, $[Y]$ *&c.*, on veut que le centre de rotation soit le centre de même de gravité du corps suivant la Remarque de *l'Art. XXXV.*; alors on ne doit plus prendre X, Y, Z pour les coordonnées de la surface proposée, mais $X + p'$, $Y + q'$, $Z + r'$: p', q', r' étant les coordonnées qui déterminent la position du point qui se meut sur cette surface par rapport au centre de gravité; on aura donc $dZ + dr' = m(dX + dp') + n(dY + dq')$; & mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs $r'dQ + q'dR$, $r'dP - p'dR$, $-q'dP - p'dQ$, & ordonnant les termes, $dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP + (p' + mr')\,dQ + (mr' - np')\,dR$; On trouvera par un raisonnement semblable

$$\delta Z = m\delta X + n\delta Y + (q' + nr')\delta P + (p' + mr')\delta Q + (mq' - np')\delta R.$$

donc

donc substituant cette valeur de δZ dans l'équation (S), & faisant les coéficiens de différences restantes chacun $= 0$, on aura les cinq équations

$$[X] + m[Z] = 0;\ [Y] + n[Z] = 0;\ [P] + (q' + nr') \times [Z] = 0;\ [Q] + (p' + mr') \times [Z] = 0;\ [R] + (mr' - np') \times [Z] = 0,$$

& pour la sixiéme équation on prendra celle qu'on a trouvé ci-dessus, savoir $dZ = m\,dX + n\,dY + (q' + nr')\,dP + \&c.$

Mais si on supposoit que le point qui répond aux coordonnées p', q', r', fût fixement attaché, alors on feroit $dX + dp' = 0$; $dY + dq' = 0$, $dZ + dr' = 0$; ce qui donneroit, en mettant au lieu de dp', dq', dr' leurs valeurs, $dX = -r'dQ - q'dR$, $dY = -r'dP + p'dR$, $dZ = q'dP + p'dQ$; on auroit par la même raison $\delta X = -r'\delta Q - q'\delta R$, $\delta Y = -r'\delta P + p'\delta R$, $\delta Z = q'\delta P + p'\delta Q$; & ces valeurs substituées dans l'équation (S), on trouveroit, en faisant les coéficiens de δP, δQ, δR chacun $= 0$, les trois équations

$$-r'[Y] + q'[Z] + [P] = 0$$
$$-r'[X] + q'[Z] + [Q] = 0$$
$$-q'[X] + p'[Y] + [R] = 0.$$

XXXVIII.

Corollaire 3. Imaginons que le corps soit posé sur un plan, ou sur une surface quelconque, le long de laquelle il puisse glisser librement, en tournant sur lui même d'une maniére quelconque; soient p', q', r' les coordonnées de la superficie du corps, & $dr' = M dp' + N dq'$ son équation différentielle, il est clair; 1.° Que tandis que le corps à ses divers mouvemens dX, dY, dZ, dP, dQ, dR, chaque point de sa surface parcoura les espaces $dX + r'dQ + q'dR$, $dY + r'dP - p'dR$, $dZ - q'dP - p'dQ$; dans la direction des coordonnées X, Y, Z; 2.° Que

le point d'attouchement étant mobile sur cette surface ; parcoura de plus dans les mêmes directions les espaces dp', dq', dr', savoir dp', dq', $Mdp' + Ndq'$; d'où il s'ensuit que les espaces entiers parcourus par le point touchant seront $dX + r'dQ + q'dR + dp'$, $dY + r'dP - p'dR + dq'$, $dZ - q'dP - p'dQ + Mdp' + Ndq'$. Or ce point devant aussi se mouvoir sur une surface représentée par l'équation $dZ = mdX + ndY$, ou bien $dz = mdx + ndy$ (en appellant x, y, z les coordonnées de cette surface pour les distinguer des X, Y, Z qui appartiennent au centre de gravité du corps), il faudra mettre dans cette équation au lieu de dx, dy, dz les quantités qu'on vient de trouver ; ce qui donnera après les réductions

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR + (m - M)dp' + (n - N)dq'.$$

Cette équation appartiendroit en général à tous les points, dans lesquels la superficie du corps pourroit rencontrer la surface proposée ; mais dans notre cas, où l'on veut que les deux surfaces se touchent, il faudra de plus supposer qu'elles aïent les mêmes tangeantes dans leurs points de rencontre, c'est-à-dire que $m = M$, $n = N$; donc l'équation trouvée se réduira à

$$dZ = mdX + ndY + (q' + nr')dP + (p' + mr')dQ + (mq' - np')dR.$$

Par les mêmes raisonnemens on trouvera, en considérant les différences marquées par δ,

$$\delta Z = m\delta X + n\delta Y + (q' + nr')\delta P + (p' + mr')\delta Q + (mq' - np')\delta R.$$

Il n'y aura donc plus qu'à substituer cette valeur de δZ dans l'équation (S), & à égaler ensuite à zéro chacun des coéficiens des différences δX, δY, δP, δQ, δR ; ce qui donnera les cinq équations

$[X] + m[Z] = 0$, $[Y] + n[Z] = 0$; $[P] +$ $(q'$

$(q' + nr') \times [Z] = 0$; $[Q] + (p' + mr') \times [Z] = 0$; $[R] + (mq' - np') \times [Z] = 0$, lesquelles étant jointes avec l'équation ci-dessus $dZ = m dX + n dY + (q' + nr') dP +$ &c. serviront à déterminer le mouvement du corps.

Si on vouloit que le corps n'eut à chaque instant qu'un mouvement autour du point touchant, c'est-à-dire, qu'il n'eut aucun mouvement pour glisser le long de la surface sur laquelle il se meut; alors il est clair que les espaces parcourus par le point d'attouchement sur la surface dont nous parlons, & sur celle du corps devroient être exactement les mêmes; il faudroit donc que $dX + r' dQ + q' dR + dp' = dp'$; $dY + r' dP - p' dR + dq' = dq'$; $dZ - q' dP - p' dR + dr' = dr'$; savoir $dX + r' dQ + q' dR = 0$, $dY + r' dP - p' dR = 0$, $dZ - q' dP - p' dR$, & pareillement $\delta X + r' \delta Q + q' \delta R, = 0$, $\delta Y + r' \delta P - p' \delta R = 0$, $\delta Z - q' \delta P - p' \delta R = 0$; d'où l'on auroit pour δX, δY, δZ les mêmes valeurs que dans le second cas de *l'Art. XXXVII.*, & ces valeurs substituées dans l'équation (S) donneroient par conséquent aussi les mêmes équations pour le mouvement du corps; mais, avec cette différence, que les coordonnées p', q', r' répondroient ici non plus à un point fixe, mais à un point mobile, qui change continuellement de place tant sur la surface du corps, que sur celle le long de laquelle le corps se meut.

XXXIX.

SCHOLIE. Les expressions $[X]$, $[Y]$ &c. sont en général

$$[X] = Md \cdot \frac{dX}{dt} + S(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt) dm$$

$$[X] = Md \cdot \frac{dY}{dt} + S(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt) dm$$

$[Z] =$

$$[Z] = Md \cdot \frac{dZ}{dt} + S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right)dm$$

$$[P] = Srdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} - Sqdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} +$$
$$S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right)rdm - S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right)qdm$$

$$[Q] = Srdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} +$$
$$S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right)rdm - S\left(d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt\right)pdm$$

$$[R] = Sqdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} - Spdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$
$$S\left(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt\right)qdm - S\left(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt\right)pdm.$$

Dans les formules de *l'Art. XXXIV.* nous avons mis à la place de p, q, r leurs valeurs tirée de l'équation (Q), & cette ſubſtitution a introduit les quantités Sp^2dm, Sq^2dm, Sr^2dm, $Spqdm$, $Sprdm$, $Sqrdm$ qui ne peuvent être déterminées que par l' intégration des équations données dans *l'Art. XXXV.* Or, pour éviter cet embarras, il n'y aura qu'à exprimer les coordonnées p, q, r par d'autres variables, dont les unes dépandent uniquement de la ſituation du corps, & ſoient par conſéquent mêmes pour chacun de ſes points, & les autres au contraire ſoient différentes pour tous les points du corps, & demeurent toujours les mêmes pendant qu'il change de ſituation. Pour cela, aïant imaginé deux axes perpendiculaires l' un à l' autre, qui paſſent par le centre de rotation, & qui demeurent toujours fixes au dedans du corps. On remarquera, 1.° Que la poſition de ces deux axes rélativement à un plan fixe quelconque ne dépend que de trois variables qu'on peut nommer P, Q, R; 2.° Que la poſition de chaque point du corps, rélativement à ces axes, dépend encore de trois autres variables que j' appellerai ξ, φ, ζ; d' où il s'enſuit que la poſition de chaque

chaque point du corps par rapport à un plan fixe quelconque dépendra en tout de six variables P, Q, R, ξ, φ, ζ, & qu'ainsi les quantités p, q, r ne seront que des fonctions de ces mêmes variables; fonctions toujours faciles à déterminer par les élémens de Géométrie. Aïant donc trouvé les valeurs de p, q, r en P, Q, R, ξ, φ, ζ, on en tirera aisément celles de $d \cdot \frac{dp}{dt}$, $d \cdot \frac{dq}{dt}$, $d \cdot \frac{dr}{dt}$, en faisant varier P, Q, R; on substituera ensuite toutes ces valeurs dans les expressions ci-dessus, & l'on intégrera les termes affectés du signe S, en regardant ξ, φ, ζ comme variables, après quoi il ne restera plus de variables que les P, Q, R qui représentent la position du corps à chaque instant.

Au reste les expressions de p, q, r dont nous venons de parler, peuvent servir aussi à trouver les valeurs des différences δp, δq, δr. Soient en général
$dp = AdP + BdQ + CdR$, $dq = DdP + EdQ + FdR$,
$dr = GdP + HdQ + IdR$; on aura également
$\delta p = A\delta P + B\delta Q + C\delta R$, $\delta q = D\delta P + E\delta Q + F\delta R$
$\delta r = G\delta P + H\delta Q + I\delta R$; & par conséquent

$$\delta x = \delta X + \delta p = \delta X + A\delta P + B\delta Q + C\delta R,$$
$$\delta y = \delta Y + \delta q = \delta Y + D\delta P + E\delta Q + F\delta R,$$
$$\delta z = \delta Z + \delta r = \delta Z + G\delta P + H\delta q + I\delta R.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (L) on aura une équation de la même forme que la (S), dans laquelle les quantités $[X]$, $[Y]$, $[Z]$ seront exprimées comme ci-dessus, & les $[P]$, $[Q]$, $[R]$ auront les valeurs suivantes

$$[P] = SAdm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + SDdm \times d \cdot \frac{dY}{dt} +$$
$$SGdm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S[(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt)A +$$
$$(d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt)D + (d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt)G]dm$$

$$[Q] = S B dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + S E dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} + S H dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S[(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt) B + (d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt) E + (d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt) H] dm$$

$$[R] = S C dm \times d \cdot \frac{dX}{dt} + S F dm \times d \cdot \frac{dY}{dt} + S I dm \times d \cdot \frac{dZ}{dt} + S[(d \cdot \frac{dp}{dt} + \Pi dt) C + (d \cdot \frac{dq}{dt} + \pi dt) F + (d \cdot \frac{dr}{dt} + \Psi dt) I] dm:$$

Je laiſſe au Lecteur le détail de l'application de cette Equation, qui n'aura aucune difficulté, après ce que nous avons dit dans les Corollaires précédens.

X L.

PROBLEME 9. Trouver les loix du mouvement des fluides non élaſtiques.

SOLUTION. Il eſt viſible que l'équation (L), qui a ſervi pour réſoudre le Problême précédent, a encore lieu ici; cette équation étant générale pour une ſiſtème quelconque de corpuſcules dm, agités par des forces quelconque P, Q, R &c.

Soit D la denſité de chaque particule du fluide dm; on aura $dm = D dx dy dz$, & l'équation dont il s'agit ſera

$$(a) \ldots\ldots \int S^3 dx dy dz\, D [(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt)\delta x + (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt)\delta y + (d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt)\delta z] = 0;$$

je met l'expoſant 3 au ſigne S, pour exprimer les trois intégrations que ce ſigne renferme, rélativement aux trois variables

variables x, y, z intégrations que nous aurons souvent occasion dans la suite de considérer chacune en particulier.

Maintenant, comme le fluide est supposé incompressible, il faut que le volume de chaque particule dm, lequel est exprimé par $dx\,dy\,dz$, reste toujours le même; on aura donc $dy\,dz\,ddx + dx\,dz\,ddy + dx\,dy\,ddz = 0$, savoir $\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} + \frac{ddz}{dz} = 0$, ou en mettant $d\,d$ au lieu de dd

$$\frac{d\,dx}{dx} + \frac{d\,dy}{dy} + \frac{d\,dz}{dz} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b).$$

On aura par la même raison $dy\,dz\,\delta dx + dx\,dz\,\delta dy + dx\,dy\,\delta dz = 0$, ou bien $dy\,dz\,d\delta x + dx\,dz\,d\delta y + dx\,dy\,d\delta z = 0$, ce qui donne $d\delta x = -dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})$ & par conséquent

$$(c) \quad . \; . \quad Sd\delta x = \delta x = \delta' x - S\,dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz});$$

$\delta' x$ est la valeur de δx, quand l'intégrale $S\,dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})$ est nulle; or, comme cette intégrale doit être prise en variant seulement x, il s'ensuit que la quantité $\delta' x$ sera constante par rapport à x, mais variable par rapport à y, & z, c'est à dire que cette quantité sera une fonction de y, & z.

Donc mettant dans l'équation (*a*) à la place de δx la valeur qui on vient de trouver, l'expression intégrale $S'\,dx\,dy\,dz\,D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\,\delta x$ se changera en celle-ci.

$$S'\,dx\,dy\,dz\,D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\,\delta' x -$$

$$S'\,dx\,dy\,dz\,[D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt)\,S\,dx\,(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})].$$

J'écris

J' écris d' abord le premier membre transformée ainsi: $S^2 dy\, dz\, S dx\, D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta' x$, expression qu' on voit bien être équivalente à la proposée. Or soit la valeur totale de $S dx\, D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$ exprimée par $T dt$, il est clair qu'on aura, à cause que $\delta' x$ est constant par rapport à x, $S dx\, D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta' x = \delta' x\, S dx\, D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) = \delta' x\, T dt$; donc

$$S^3 dx\, dy\, dz\, D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) \delta' x = S^2 dy\, dz\, T dt\, \delta' x.$$

Je mets de même le second nombre sous la forme suivante: $S^2 dy\, dz\, S dx \left[D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + dt\right) S dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)\right]$; j' opére sur l'intégrale $S dx \left[D\left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right) S dx \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)\right]$ suivant la méthode de *l' Art. IX. Mem. préced.* j' aurai en supposant, pour abréger, $V dt = T dt - S dx\, D \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$ la transformée $S dx\, V dt \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)$, où il n' y à plus qu' un seul signe d' intégration; la formule proposée deviendra donc $S^2 dy\, dz\, S dx\, V dt \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)$, ou ce qui est la même chose $S^3 dx\, dy\, dz\, V dt \left(\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)$, dans laquelle il ne s' agit plus que de faire disparoître les différences de δy & δz.

Pour cela il est nécessaire de distinguer d' abord les integrations rélatives à la variabilité de y, & de z, en mettant cette intégrale sous la forme suivante

$$S^2 dx\, dz\, S dy \frac{V dt\, d\delta y}{dy} +$$

S²

$$S^2 dx dy \; S dz \frac{V dt d\delta z}{dz}.$$

Or par la méthode ordinaire des intégrations par parties, on trouve $S dy \frac{V dt d\delta y}{dy} = V dt \delta y - S dy \frac{d V dt}{dy} \delta y$.

(J'écris $S dy \frac{d V dt}{dy} \delta y$, au lieu de $S d V dt \delta y$ qui lui est égal, pour dénoter que cette intégrale, de même que la différentielle $d V dt$, doit être prise, en ne considérant que la variabilité de y seul). Soit maintenant $'y$ la valeur de y lorsque l'intégrale $S dy (\frac{d V dt}{dy}) \delta y$ commence, & y' sa valeur, lorsque cette intégrale finit; & soit exprimé par $'V$ ce qui devient V, en y mettant $'y$ à la place de y, & par V' ce que la même quantité devient en fatigant $y = y'$; on trouvera, par la Rémarque faite à la fin de *l'Art. I. Mem. prec.*, que la valeur complette du terme $V dt \delta y$ sera $V' dt \delta y' - 'V dt \delta 'y$.

Mais pour peu qu'on réflechisse sur la nature de nos formules, il est aisé de voir que quand, $V = 'V$, l'intégrale $S dx D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi \delta t)$ est nulle, & que quand $V = V'$, cette intégrale est précisement $= T$; c'est pourquoi l'on aura $'V = T$, & $V' = 0$; donc enfin

$$S dy \frac{V dt d\delta y}{dy} = - T \delta 'y - S dy \frac{d V dt}{dy} \delta y.$$

On trouvera par des opérations & des raisonnements sembables

$$S dz \frac{-V dt d\delta y}{dy} = - T \delta 'z - S dz \frac{d \cdot V dt}{dy} \delta z;$$

Donc $S^3 dx dy dz V dt (\frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz})$ se changera en

$$- S^2 dx dz T dt \delta 'y - S^2 dx dz S dy \frac{d V dt}{dy} \delta y$$

—

$- S^2 dx\, dy\, T dt\, \delta' z - S^2 dx\, dy\, S dz\, \frac{dV dt}{dz} \delta z$

$=$ (en réduisant) $- S^2 dx\, dz\, T dt\, \delta' y - S^2 dx\, dz\, T dt\, \delta' z$

$- S^2 dx\, dy\, dz\, (\frac{dV dt}{dy} \delta y + \frac{dV dt}{dz} \delta z)$, donc

$S^2 dx\, dy\, dz\, D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) \delta x = S^2 dy\, dz\, T dt\, \delta' x$

$- S^2 dx\, dz\, T dt\, \delta' y - S^2 dx\, dy\, T dt\, \delta' z + S^2 dx\, dy\, dz$

$(\frac{dV dt}{dy} \delta y + \frac{dV dt}{dz} \delta z)$, donc l'équation ($a$) deviendra

(d) . . . . $\int (S^2 dy\, dz\, T dt\, \delta' x$

$+ S^2 dx\, dz\, T dt\, \delta' y + S^2 dx\, dy\, T dt\, \delta' z) +$

$\int S^2 dx\, dy\, dz\, ([\frac{dV dt}{dy} + D (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt)] \delta y$

$+ [\frac{dV dt}{dz} + D (d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt)] \delta z) = 0$;

d'où l'on tire pour le mouvement de chaque particule du fluide en général

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV dt}{dy} + D (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) = 0 \\ \frac{dV dt}{dz} + D (d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt) = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots (e)$$

Ensuite pour satisfaire au reste de l'équation, on fera

(f) . . . . $S^2 dy\, dz\, T dt\, \delta' x$

$+ S^2 dx\, dz\, T dt\, \delta' y + S^2 dx\, dy\, T dt\, \delta' z = 0$.

X L I.

Corollaire 1. La valeur de $V dt$ est $T dt - S dx\, D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt)$, l'intégrale étant prise en variant seulement x; on substituera donc cette valeur dans les équations (e); mais, pour pouvoir faire disparoître le signe S, on prendra les différentielles de ces deux équations, en suppo-

ſuppoſant x ſeul variable; ce qui donnera, en mettant pour $\frac{\mathrm{d} V dt}{\mathrm{d} x}$ ſa valeur $- D\ (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi\, dt)$,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}\,[D(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi\, dt)]}{\mathrm{d} y} = \frac{\mathrm{d}\,[D\,(d \cdot \frac{dx}{dt} + \pi\, dt)]}{\mathrm{d} x} \\ \frac{\mathrm{d}\,[D(d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi\, dt)]}{\mathrm{d} z} = \frac{\mathrm{d}\,[D\,(d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi\, dt)]}{\mathrm{d} x} \end{array}\right\} (g)$$

Deux équations qui jointes à l'équation (b) trouvée ci-deſſus feront connoître les valeurs de x, y, z pour un tems quelconque.

XLII.

Corollaire 2. Telles ſont les équations, par leſquelles on peut déterminer en général le mouvement d'un fluide non élaſtique ſollicité par des forces quelconques P, Q, R &c. qui agiſſent ſuivant des directions quelconques, ou bien par des forces Π, π, Ψ dirigées ſuivant les lignes x, y, z; comme il eſt aiſé le voir en examinant les valeurs de ces quantités Π, π, Ψ (*Art. I.*).

Pour mieux connoître les équations dont il s'agit, exprimons par α, β, γ les viteſſes de chaque particule du fluide parallélement aux coordonnées x, y, z, c'eſt-à-dire les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on aura en diviſant par dt,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}(D\frac{d\alpha}{dt})}{\mathrm{d} y} + \frac{\mathrm{d}(D\,\Pi)}{\mathrm{d} y} = \frac{\mathrm{d}(D\frac{d\beta}{dt})}{\mathrm{d} x} + \frac{\mathrm{d}(D\,\pi)}{\mathrm{d} x} \\ \frac{\mathrm{d}(D\frac{d\alpha}{dt})}{\mathrm{d} y} + \frac{\mathrm{d}(D\Pi)}{\mathrm{d} z} + \frac{\mathrm{d}(D\frac{d\gamma}{dt})}{\mathrm{d} x} + \frac{\mathrm{d}(D\Psi)}{\mathrm{d} x} \end{array}\right\} . (h)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \quad \ldots \quad (i)$$

On, voit par ces équations, que les quantités α, β, γ sont nécessairement des fonctions, des variables x, y, z qui déterminent la position des particules à chaque instant, & du tems t écoulé depuis le commencement du mouvement; or dans l'instant dt, il est clair que les variables x, y, z deviennent $x + \alpha dt$, $y + \beta dt$, $z + \gamma dt$; donc les variations des quantités α, β, γ dans cet instant ne seront pas seulement $\frac{d\alpha}{dt}dt$, $\frac{d\beta}{dt}dt$, $\frac{d\gamma}{dt}dt$, mais

$$\frac{d\alpha}{dt}dt + \frac{d\alpha}{dx}\alpha dt + \frac{d\alpha}{dy}\beta dt + \frac{d\alpha}{dz}\gamma dt,$$

$$\frac{d\beta}{dt}dt + \frac{d\beta}{dx}\alpha dt + \frac{d\beta}{dy}\beta dt + \frac{d\beta}{dz}\gamma dt,$$

$$\frac{d\gamma}{dt}dt + \frac{d\gamma}{dx}\alpha dt + \frac{d\gamma}{dy}\beta dt + \frac{d\gamma}{dz}\gamma dt,$$

& telles seront les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$; donc si on substitue ces valeurs dans les équations (h), & qu'on suppose, pour plus de simplicité, les forces Π, π, Ψ nulles, ou telles que $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, & de plus la densité D constante, on aura, en divisant par D, & marquant toutes les différences par d (ce qui est absolument indifférent ici),

$$\frac{d^2\alpha}{dtdy} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dxdy} + \beta\frac{d^2\alpha}{dy^2} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dydz} + \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} = \frac{d^2\beta}{dtdx} + \alpha\frac{d^2\beta}{dx^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dxdy} + \gamma\frac{d^2\beta}{dxdz} + \frac{d\beta}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx}.$$

$$\frac{d^2\alpha}{dtdz} + \alpha\frac{d^2\alpha}{dxdz} + \beta\frac{d^2\alpha}{dydz} + \gamma\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz}$$

$$\times \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dz} = \frac{d^2\gamma}{dt\,dx} + \alpha \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \beta \frac{d^2\gamma}{dx\,dy} + \gamma \frac{d^2\gamma}{dx\,dz}$$
$$+ \frac{d\gamma}{dx} \times \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx}.$$

Ces équations peuvent s' abréger en supposant $\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = \mu$; $\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \nu$; ce qui les réduira à

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mu}{dt} + \alpha \frac{d\mu}{dx} + \beta \frac{d\mu}{dy} + \gamma \frac{d\mu}{dz} + \\ &\mu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx} = 0, \\ &\frac{d\nu}{dt} + \alpha \frac{d\nu}{dx} + \beta \frac{d\nu}{dy} + \gamma \frac{d\nu}{dz} + \\ &\nu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} \cdot (k)$$

On peut satisfaire à ces deux équations, en faisant $\mu = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} = 0$, $\nu = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0$, $\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} = 0$, comme il est facile de s' en assurer; or la troisiéme de ces conditions est évidemment une suite nécessarire des deux premiéres; donc on n' aura réellement que deux conditions à remplir, lesquelles pourront s' emprimer plus simplement en disant, que $\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$ doit être une différentielle complette; & ces conditions jointes avec celle que donne l' équation (i), savoir, en changeant d en d, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$ serviront à déterminer les mouvement du fluide dans plusieurs cas particuliers.

Ces cas se réduisent à ceux, où l' on suppose que particules du fluide décrivent des courbes invariables; ce qui arrive quand les rapports des vitesses α, β, γ sont indépendants du tems t, c'est-à-dire quand les quantités α, β, γ sont simplement des fonctions de x, y, z, multipliées par une même fonction de t. Car soit mis dans les équations

gêné-

générales (h), $\theta\alpha$, $\theta\beta$, $\theta\gamma$, à la place de α, β, γ (θ étant une fonction quelconque de t, & α, β, γ étant maintenant regardées comme des fonctions indéterminées de x, y, z sans t) on trouvera après avoir divisé par θ^2,

$$\mu \frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha \frac{d\mu}{dx} + \beta \frac{d\mu}{dy} + \gamma \frac{d\mu}{dz} +$$
$$\mu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dz} \times \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \times \frac{d\gamma}{dx} = 0$$
$$\frac{d\theta}{\theta^2 dt} + \alpha \frac{d\nu}{dx} + \beta \frac{d\nu}{dy} + \gamma \frac{d\nu}{dz} +$$
$$\nu \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \frac{d\alpha}{dy} \times \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \times \frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Or, comme les termes $\mu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ sont les seuls qui renferment t, il faut nécessairement qu'ils soient $= 0$ séparément de tous les autres, pour que les équations puissent être identiques; on aura donc $\mu = 0$, $\nu = 0$; ce qui satisfait encore au reste de l'une & de l'autre équation, comme on l'a vû plus haut.

Il y a pourtant un cas, où les équations précédentes peuvent être vérifiées sans supposer $\mu = 0$ & $\nu = 0$; c'est celui où l'on aura $\frac{d\theta}{\theta^2 dt} = const.$; c'est-à-dire, où $\frac{1}{\theta} = a - bt$, & $\theta = \frac{1}{a - bt}$, a & b étant deux constantes quelconques; car alors les termes $\mu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$, $\nu \frac{d\theta}{\theta^2 dt}$ se trouveront entiérement indépendants du tems t, ainsi que tous les autres.

Au reste en combinant les équations $\mu = 0$, $\nu = 0$ avec l'équation (i), on peut séparer les indéterminées α, β, γ, & l'on aura

$\frac{d^2\alpha}{dx^2}$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2} = 0$$
$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0$$
$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d^2\gamma}{dz^2} = 0.$$

XLIII.

Remarque. Quand on aura trouvé par le moïen des équations de *l'Art. préc.* les valeurs générales de α, β, γ, il faudra de plus déterminer ces valeurs, en ſorte que les particules contigues aux parois du vaſe, dans lequel le fluide ſe meut, puiſſent couler le long de ce parois; ſoient x', y', z' leurs coordonnées, & $dz' = p\,dx' + q\,dy'$ l'équation qui repréſente la figure du vaſe donné, en mettant, au lieu de dx', dy', dz' leurs valeurs $\alpha' dt$, $\beta' dt$, $\gamma' dt$, (α', β', γ' dénotent les valeurs de α, β, γ, lorſque x, y, z deviennent x', y', z') on aura l'équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$, qui devra être vraie indépendanment de t.

Dans le cas, où le tems t n'entre point dans le rapport des viteſſes α, β, γ, il eſt clair qu'il n' entrera pas non plus dans l' équation $\gamma' = p\alpha' + q\beta'$; mais alors les valeurs de α, β, γ étant beaucoup moins générales, il pourra arriver que cette équation ne ſe vérifiera qu'en ſuppoſant que les quantités p, q aïent certaines conditions, c'eſt-à-dire, que le vaſe ait une certaine figure; c' eſt ce que M. d'Alembert a déja remarqué dans un excellent Mémoire *ſur les Loix du mouvement des fluides*, imprimé dans le premier Volume de ſes Opuſcules Mathématiques. Mais ce ſavant Géomètre prétend de plus que, lorſque le vaſe aura une autre figure quelconque, le mouvement du fluide ne pourra plus être ſoumis au calcul; c' eſt de quoi je ne ſaurois tomber d' accord avec lui; car il me ſemble que tout ce qu'il faudroit conclure alors, c'eſt que la ſup-

position particuliere de $\mu = o$, & $\nu = o$ cesseroit d'être exacte, & que par conséquent les valeurs de α, β, γ dependroient de la résolution générale des équations (k)

Il est vrai que M. d'Alembert prétend que les équations $\mu = o$, $\nu = o$ sont les seules vraiment exactes, pour déterminer les loix du mouvement des fluides; il se fonde sur ce que le rapport des vitesses α, β, γ doit être indépendant du tems t dans les particules, qui coulent le long des parois du vase; d'ou il infére qu'il doit l'être aussi en général dans toutes les particules du fluide; mais cette conséquence, si j'ose le dire, ne me paroit point assez juste. En effet on peut très bien imaginer, ce me semble, des fonctions de x, y, z, telles que la variable t ne disparoisse de l'expression de leur rapport, que lorsque x, y, z deviennent x', y', z', & sont liées par l'équation $dz' = p\,dx' + q\,dy'$.

En général il me paroit certain qu'en résolvant les équations (h), (i), par des méthodes analogues à celles que j'ai expliquées dans les *Récher. sur le Son* imprimées ci-devant, on aura une solution applicable à tous les cas possibles, & par laquelle on pourra déterminer le mouvement des fluides qui se meuvent dans des vases de figure quelconque, & qui ont reçu, au commencement, des impulsions quelconques.

Il ne pourra y avoir de difficulté que dans les seuls cas, où le fluide se divisera en se mouvant, & cessera de former une masse continue; mais alors, ayant trouvé par le calcul (ce qui est toujours possible) les endroits, où le fluide doit se diviser en plusieurs portions, on considérera ensuite chaque portion à part, & on en déterminera le mouvement en la regardant comme une masse isolée.

Nous avons observée dans *l'Art. préc.* qu'il y a un cas, où les équations $\mu = o$, $\nu = o$ ne sont pas indispensables dans l'hypotese, que les rapports des vitesses α, β, γ

soient

ſoient indépandants du tems t. M. d' Alembert a fait auſſi cette remarque dans l'*Art. X. de ſon Mémoire* cité ci-deſſus; mais il trouve, par ſes formules, que le cas, dont il s'agit eſt celui, où $\theta = a c^t$, au lieu que ſuivant les nôtres, ce cas eſt celui, où $\theta = \frac{1}{a - b t}$. Or cette différence vient d' une légère mépriſe qui s' eſt gliſſée dans les calculs de M. d' Alembert, mais qui n'influe d'ailleurs en rien ſur le reſte de ſes ingénieuſes Recherches.

Pour faire ſentir la vérité de ce que nous avançons ici, examinons les équations que M. d' Alembert donne dans l'*Art. I. du Mém. cité* pour les fluides péſants, qui ſe meuvent dans un plan. Ces équations ſont 1.° $\frac{dp}{dz} = - \frac{dq}{dx}$, 2.° $\frac{d(g - B\theta p - A\theta q - qT)}{dz} = \frac{d(-\theta q A' - \theta p B' - pT)}{dx}$, g eſt la gravité, θ eſt une fonction quelconque de t comme ci-deſſus, θq, θp expriment les viteſſes que nous avons nommées α & γ, & les quantités A, B, A', B', T ſont telles que $d(\theta q) = q T dt + \theta A dx + \theta B dz$; $d(\theta p)$ $p T dt + \theta A' dx + \theta B' dz$.

La premiére de ces équations réſulte de l' incompreſſibilité des particules du fluide, & revient par conſéquent au même que l' équation (i) ci-deſſus on y faiſant $\beta = 0$. A l' égard de la ſeconde, l' Auteur la tire de cette conſidération, que les forces verticales, & orizontales perdues à chaque inſtant par les particules du fluide, doivent ſe faire équilibre; ces forces ſont, ſelon lui, $g - B\theta p - A\theta q - qT$, $- \theta q A' - \theta p B' - pT$; ce qui donne par le loix générales de l' équilibre des fluides, l' équation dont nous parlons. Or je dis, que ſuivant les hypotéſes de M. d'Alembert, il faut écrire θ^2 au lieu de θ dans les expreſſions des forces en queſtion. Car il eſt facile de voir que ces forces

font en général $g - \frac{d\alpha}{dt}$, $-\frac{d\gamma}{dt}$ favoir $g - \frac{d(\theta q)}{dt}$, $-\frac{d(\theta p)}{dt}$, c' eft à dire $g - qT - \frac{\theta A dx}{dt} - \frac{\theta B dz}{dt}$, $-pT - \theta A' dx - \theta B' dz$; mais $dx = \alpha dt = \theta q\, dt$, $dz = \gamma dt = \theta p dt$ donc ces quantités deviendront

$g - qT - \theta^2 Aq - \theta^2 Bp$, $-pT - \theta^2 A' q - \theta^2 B' p$.

Ainfi l'on aura à la rigueur l'équation

$$\frac{d(g - B\theta^2 p - A\theta^2 q - qt)}{dz} = \frac{d(-\theta^2 qA' - \theta^2 pB' - pT)}{dx}$$

de laquelle le tems t ne difparoit, que quand θ^2 eft proportionel à T, c' eft à dire, $\frac{Tdt}{\theta^2} = \frac{d\theta}{\theta^2} = const.$; d' où l'on tire, comme ci-deffus, $\theta = \frac{1}{a - bt}$; au lieu que felon l' équation de M. d'Alembert, cela doit arriver lorfque $\frac{T}{\theta} = const.$ ce qui donne, en intégrant, $\theta = ac$, comme cette Auteur l' a trouvé.

XLIV.

Corollaire 3. Si au lieu de confidérer les viteffes α, β, γ on veut confidérer les variables x, y, z elles-mêmes, on rémarquera que ces variables ne peuvent être que des fonctions du tems t & des valeurs que elles avoient au commencement du mouvement quand $t = 0$, valeurs qui doivent être entiérement arbitraires, pour que la folution du problême ait toute la généralité poffibile.

Dénotons ces valeurs par X, Y, Z, c' eft à dire fuppofons que les variables x, y, z qui repréfentent la pofition de chaque particule du fluide, après un tems quelconque t, foient, au commencement du mouvement, X, Y, Z; les dif-

differences de x, y, z s'exprimeront en géneral de la maniere suivante

$$dif.\ x = L\,dX + M\,dY + N\,dZ + \alpha\,dt$$
$$dif.\ y = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ + \beta\,dt$$
$$dif.\ z = S\,dX + T\,dY + V\,dZ + \gamma\,dt$$

de sorte que $dx = \alpha\,dt$, $dy = \beta\,dt$, $dz = \gamma\,dt$ & $dx = L\,dX + M\,dY + N\,dZ$, $dy = P\,dX + Q\,dY + R\,dZ$ $dz = S\,dX + T\,dY + V\,dZ$.

Substituant dans les équations (h), (i), α, β, γ au lieu $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, & supposant d' ailleurs, pour simplifier le calcul, D constant, & $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$; on trouvera, aprés avoir divisé les deux premiéres par $D\,dt$, & la troisiéme par dt

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{dy} = \dfrac{d\cdot\frac{d\beta}{dt}}{dx} \\[2ex] \dfrac{d\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{dz} = \dfrac{d\cdot\frac{d\gamma}{dt}}{dx} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (l)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ (m)$$

Or $\dfrac{d\cdot\frac{d\alpha}{dt}}{dy}$ exprime, comme on sait, le coéficient qu' auroit y dans la différentiation de $\frac{d\alpha}{dt}$, supposé que α fût exprimée par une fonction de x, y, z, t; & ainsi des autres expressions semblables. Donc, puisque les quantités α, β, γ sont ($hip.$) des fonctions de X, Y, Z, il faudra substituer dans α, β, γ, à la place des variables, X, Y, Z, leurs valeurs en x, y, z, & différentier ensuite, en prenant x, y, z

pour

pour variables; ou bien ce, qui revient au même, différentier d'abord les quantités α, β, γ en faisant varier X, Y, Z, & substituer ensuite, au lieu de dX, dY, dZ, leurs valeurs en dx, dy, dz.

Des expressions de dx, dy, dz donneés ci-dessus on tire par les régles communes de l'algébre.

$$dX = \frac{(QV-RT)dx + (NT-MV)dy + (MR-NQ)dz}{K}$$

$$dY = \frac{(RS-PV)dx + (LV-NS)dy + (NP-LR)dz}{K}$$

$$dZ = \frac{(PT-QS)dx + (MS-LT)dy + (LQ-MP)dz}{K}$$

K étant mis, pour abréger, au lieu de $LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT$

Or $d\alpha$ est la différence de α, qui nait des différences dx, dy, dz, ou bien des différences dX, dY, dZ; donc on aura en général $d\alpha = \frac{d\alpha}{dX}dX + \frac{d\alpha}{dY}dY + \frac{d\alpha}{dZ}dZ$; on aura de plus à cause que *dif.* x, est une différentielle complette, $\frac{d\alpha}{dX} = \frac{dL}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dY} = \frac{dM}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dZ} = \frac{dN}{dt}$; donc

$$d\alpha = \frac{dL}{dt}dX + \frac{dM}{dt}dY + \frac{dN}{dt}dZ;$$

on trouvera de même

$$d\beta = \frac{dP}{dt}dX + \frac{dQ}{dt}dY + \frac{dR}{dt}dZ$$

$$d\gamma = \frac{dS}{dt}dX + \frac{dT}{dt}dY + \frac{dV}{dt}dZ.$$

substituant, au lieu de dX, dY, dZ, les valeurs trouvées ci-devant, il viendra

$$d\alpha = \frac{(QV-RT)\frac{dL}{dt} + (RS-PV)\frac{dM}{dt} + (PT-QS)\frac{dN}{dt}}{K}dx$$

(N

$$+\frac{(NT-MV)\frac{dL}{dt}+(LV-NS)\frac{dM}{dt}+(MS-LT)\frac{dN}{dt}}{K}dy$$

$$+\frac{(MR-NQ)\frac{dL}{dt}+(NP-LR)\frac{dM}{dt}+(LQ-MP)\frac{dN}{dt}}{K}dz$$

$$d\beta=\frac{(QV-RT)\frac{dP}{dt}+(RS-PV)\frac{dQ}{dt}+(PT-QS)\frac{dR}{dt}}{K}dx$$

$$+\frac{(NT-MV)\frac{dP}{dt}+(LV-NS)\frac{dQ}{dt}+(MS-LT)\frac{dR}{dt}}{K}dy$$

$$+\frac{(MR-NQ)\frac{dP}{dt}+(NP-NL)\frac{dQ}{dt}+(LQ-MP)\frac{dR}{dt}}{K}dz$$

$$d\gamma=\frac{(QV-RT)\frac{dS}{dt}+(RS-PV)\frac{dT}{dt}+(PT-QS)\frac{dV}{dt}}{K}dx$$

$$+\frac{(NT-MV)\frac{dS}{dt}+(LV-NS)\frac{dT}{dt}+(MS-LT)\frac{dV}{dy}}{K}dy$$

$$+\frac{(MR-NQ)\frac{dS}{dt}+(NP-LR)\frac{dT}{dt}+(LQ-MP)\frac{dV}{dt}}{K}dz$$

Donc prenant, dans l'expreſſion de $d\alpha$, le coéficient de dx, dans celle de $d\beta$ le coéficient de dy, & dans celle de $d\gamma$ le coéficient de dz, on aura les valeurs de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\beta}{dy}$, $\frac{d\gamma}{dz}$ & l'équation (m) deviendra

$$(QV-RT)\frac{dL}{dt}+(RS-PV)\frac{dM}{dt}+(PT-QS)\frac{dN}{dt}+$$
$$(NT-MV)\frac{dP}{dt}+(LV-NS)\frac{dQ}{dt}+(MS-LT)\frac{dR}{dt}+$$
$$(MR-NQ)\frac{dS}{dt}+(NP-LR)\frac{dT}{dt}+(LQ-NP)\frac{dV}{dt}=0;$$

ou

ou, (ce qui eſt la même choſe) $\frac{dK}{dt} = 0$, d'où l'on tirera $K = const.$, ſavoir

$$LQV - MPV + MRS - NQS + NPT - LRT = H,$$

H étant une fonction de X, Y, Z, ſans t, ſavoir la valeur de K, lorſque $t = 0$.

A l'égard des deux équations (l), on remarquera que $d \cdot \frac{d\alpha}{dt}$ eſt la même choſe que $\frac{d \cdot d\alpha}{dt}$; c'eſt pourquoi il n'y aura qu'à différentier la valeur de $d\alpha$ trouvée ci-deſſus, en ne faiſant varier que t, & l'on aura

$$d \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2 L}{dt^2} dX + \frac{d^2 M}{dt^2} dY + \frac{d^2 N}{dt^2} dZ$$

de la même maniére on trouvera

$$d \cdot \frac{d\beta}{dt} = \frac{d^2 P}{dt^2} dX + \frac{d^2 Q}{dt^2} dY + \frac{d^2 R}{dt^2} dZ,$$

$$d \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} dX + \frac{d^2 T}{dt^2} dY + \frac{d^2 V}{dt^2} dZ.$$

On ſubſtituera donc dans ces expreſſions, comme on a fait ci-deſſus dans celles de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, les valeurs de dX, dY, dZ en dx, dy, dz, & prenant les coéficiens de dy & dz dans la différentielle $d\frac{d\alpha}{dt}$, & ceux de dx dans les deux différentielles $d\frac{d\beta}{dt}$, $d\frac{d\gamma}{dt}$, on aura les valeurs de $\frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dy}$, $\frac{d \cdot \frac{d\alpha}{dt}}{dz}$, $\frac{d \cdot \frac{d\beta}{dt}}{dx}$, $\frac{d \cdot \frac{d\gamma}{dt}}{dx}$, leſquelles étant miſes à la place de ces quantités dans les équations (l), il nous viendra, en ôtant le dénominateur commun K les deux équations

(NT

$$(NT - MV)\frac{d^2 L}{dt^2} + (LV - NS)\frac{d^2 M}{dt^2} + (MS - LT)\frac{d^2 N}{dt^2} =$$
$$(QV - RT)\frac{d^2 P}{dt^2} + (RS - PV)\frac{d^2 Q}{dt^2} + (PT - QS)\frac{d^2 R}{dt^2};$$
$$(MR - NQ)\frac{d^2 L}{dt^2} + (NP - LR)\frac{d^2 M}{dt^2} + (LQ - MP)\frac{d^2 N}{dt^2} =$$
$$(QV - RT)\frac{d^2 S}{dt^2} + (RS - PV)\frac{d^2 T}{dt^2} + (PT - QS)\frac{d^2 V}{dt^2}.$$

Si on met dans ces deux équations aussi bien que dans celle qui a été trouvé précédemment, pour L, M, N, P, Q, R, S, T, V, leurs valeurs $\frac{dx}{dX}$, $\frac{dx}{dY}$, $\frac{dx}{dZ}$, $\frac{dy}{dX}$, $\frac{dy}{dY}$, $\frac{dy}{dZ}$, $\frac{dz}{dX}$, $\frac{dz}{dY}$, $\frac{dz}{dZ}$, on aura trois équations générales qui ne renfermeront que les changeantes x, y, z avec leurs différences rélatives à X, Y, Z, t, & par lesquelles on pourra déterminer la position de chaque particule du fluide à chaque instant de son mouvement.

X L V.

Scholie. Les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, que nous avons supposées dans *l'Art. XLII.* pour simplifier les formules (h), ont lieu quand toutes les forces Π, π, Ψ font telles que leurs actions sur les particules du fluide se détruisent mutuellement, c'est-à-dire, que les particules du fluide animées par ces forces se font équilibre. En effet si le fluide est en répos les vitesses α, β, γ sont nulles, & les équations (h) se réduisent à celles que nous venons de rapporter.

Au reste pour pouvoir faire usage des équations dont il s'agit, il n'est pas nécessaire que les quantités D, Π,

 π,

ϖ, Ψ soient uniquement des fonctions de x, y, z comme il semble qu'on pourroit le conclure de la forme même de ces équations.

Supposons par exemple que les quantités D, Π, ϖ, Ψ renferment, outre les variables x, y, z, encore une quatriéme variable s représentée par une ligne quelconque ; il est clair que quelle que soit la nature & la position de cette ligne, on pourra toujours exprimer sa différentielle ds de cette maniére $A\,dx + B\,dy + C\,dz$; par conséquent la valeur complette de l'expression $\frac{d(D\Pi)}{dy}$, qui n'est autre chose que le coéficient de dy dans la différentiation de $D\Pi$, sera $\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds}$; on trouvera de même $\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds}$, $\frac{d(D\varpi)}{dx} + A\frac{d(D\varpi)}{ds}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds}$, pour les valeurs complettes des expressions $\frac{d(D\Pi)}{dz}$, $\frac{d(D\varpi)}{dx}$, $\frac{d(D\Psi)}{dx}$; substituant ces valeurs dans les équations ci-dessus elles deviendront

$$\frac{d(D\Pi)}{dy} + B\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\varpi)}{dx} + A\frac{d(D\varpi)}{ds}$$

$$\frac{d(D\Pi)}{dz} + C\frac{d(D\Pi)}{ds} = \frac{d(D\Psi)}{dx} + A\frac{d(D\Psi)}{ds}.$$

Equations, dans lesquelles les différentielles qui dépendent de chacune des variables x, y, z, s se trouvent séparées.

Je fais cette remarque rélativement à un endroit de l'excellent Traité de *la Résistance des fluides* (*Art.* 164.)

Si la densité D est constante, les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\varpi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$ deviennent, en di-

visant

visant par D, $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\pi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$, lesquelles renferment les conditions de l'équilibre des fluides homogénes.

Supposons que le fluide soit composé de différentes couches, dont chacune soit d'une densité uniforme, & qu'on en cherche l'équation; soient x, y, z les coordonnées de chacune de ces couches, on aura (*hypoth.*) $\frac{dD}{dx}dx + \frac{dD}{dy}dy + \frac{dD}{dz}dz = 0$. Or les équations $\frac{d(D\Pi)}{dy} = \frac{d(D\pi)}{dx}$, $\frac{d(D\Pi)}{dz} = \frac{d(D\Psi)}{dx}$, donnent

$$\Pi\frac{dD}{dy} + D\frac{d\Pi}{dy} = \pi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\pi}{dx},$$

$$\Pi\frac{dD}{dz} + D\frac{d\Pi}{dz} = \Psi\frac{dD}{dx} + D\frac{d\Psi}{dx},$$

substituant dans l'équation ci-dessus les valeurs de $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$ tirées de celles-ci, & ordonnant les termes il viendra $\frac{dD}{dx}\left(dx + \frac{\pi}{\Pi}dy + \frac{\Psi}{\Pi}dz\right) + \frac{D}{\Pi}\left[\left(\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}\right)dz\right] = 0$, savoir en multipliant par $\frac{\Pi}{D}$,

$\frac{dD}{Ddx}(\Pi dx + \pi dy + \Psi dz) + \left(\frac{d\pi}{dx} - \frac{d\Pi}{dy}\right)dy + \left(\frac{d\Psi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}\right)dz = 0$.

Equation qui exprimera la figure de chaque couche où la densité est uniforme.

Si

Si l' on a $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\varpi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$ c' eſt-à-dire ſi les forces Π, ϖ, Ψ ſont par leur nature telles, qu'elles puiſſent tenir en équilibre une maſſe fluide homogéne, alors l' équation précédente ſe réduit à $\frac{dD}{Ddx}(\Pi dx + \varpi dy + \Psi dz) = 0$ ce qui donne

$$\Pi\, d\, x + \varpi\, d\, y + \Psi\, d\, z = 0$$

Equation générale des couches de niveau, comme il eſt aiſé de le voir, d' où il s' enſuit que dans ce cas chaque couche de niveau ſera néceſſairement d' une denſité uniforme dans toute ſon étendue.

Tel devroit donc être l' arrangement de différentes parties de la terre ſi elle avoit été primitivement fluide; car il eſt aiſé de prouver par le calcul, & M. Clairant l'a démontré à *l'Art. LIV.* de ſa Théorie *de la figure de la Terre*, que les forces Π, ϖ, Ψ réſultantes de toutes les attractions que les particules exercent les unes ſur les autres ont d'elles mêmes les conditions $\frac{d\Pi}{dy} = \frac{d\varpi}{dx}$, $\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Psi}{dx}$.

Cependant un grand Géométre a crû que il n' étoit pas toujours néceſſaire que les ſurfaces des différentes couches fuſſent de niveau, & il a donné un autre Principe pour connoître la figure de ces ſurfaces. Voyés l'Appendice qui eſt à la fin de l' *Eſſai ſur la réſiſtence des fluides* cité ci-deſſus, & la III. Partie des *Recherches ſur le ſiſteme du Monde pag.* 226. & ſuiv. Mais les équations, que ſon Principe fournit ne ſont elles mêmes dans le fond, que celles des couches de niveau. Pour le démontrer d' une maniére générale, ſoit un ſphéroïde compoſé de couches de différentes denſités, & dont le rayon ſoit exprimé généralement par $r + \alpha Z$, r étant une quantité conſtante dans la même couche, Z étant une fonction quelconque de r, & d' un angle z variable pour tous les points de chaque couche, & α marquant une

petite

petite quantité conſtante. Qu'on réduiſe l'attraction totale que ce ſphéroïde exerce ſur chaque particule d'une couche quelconque, à deux forces, l'une verticale, c'eſt à dire perpendiculaire à la couche, & qui pourra ſans erreur ſenſible être ſuppoſée égale à la péſanteur qui tend au centre du ſphéroïde; l'autre horizontale, ſavoir dans la direction même de la couche, laquelle eſt à peu près perpendiculaire au rayon; & ſoit nommée la premiere Π, & la ſeconde ϖ. Par le Principe de l'illuſtre Auteur dont nous venons de parler, il faudra multiplier la force horizontale ϖ par $\Delta\, r\, d\, z$ (Δ marque la denſité du fluide qu'on ſuppoſe être une fonction de r ſeulement) enſuite la différentier en ne faiſant varier que r; de même il faudra multiplier la force verticale Π par $\Delta(dr + \alpha \frac{dZ}{dr}\, dr,)$ & différentier enſuite en ne faiſant varier que z; après quoi on égalera les deux différentielles, ce qui donnera l'équation

$$\frac{d(\Delta r \varpi)}{dr}\, dr\, dz = \frac{d(\Delta\Pi + \Delta\Pi\frac{dZ}{dr})}{dz}\, dz\, dr, \text{ ſavoir}$$

$$\frac{d\Delta}{dr} \times r\varpi + \frac{d(r\varpi)}{dr} \times \Delta = \frac{d(\Pi + \Pi\frac{dZ}{dr})}{dz} \times \Delta.$$

Or, en faiſant le calcul, on trouvera toujours que les quantités Π, ϖ, Z ſeront telles que $\frac{d(\Pi + \Pi\frac{dZ}{dr})}{dz} = \frac{d(r\varpi)}{dr}$; donc il ne reſtera que l'équation $\frac{d\Delta}{dr} \times r\varpi = 0$, qui donne $\varpi = 0$, ſavoir la force horizontale nulle, & par conſéquent chaque couche de niveau.

XLVI.

Corollaire 4. Je viens mainténant à l' équation (f). Par la nature des expressions dont cette équation est composée, il est manifeste qu' elle appartient uniquement à la surface postérieure du fluide. Or si l'on suppose qu'il n' y ait point de parois qui soutiennent le fluide, les valeurs de $\delta 'x$, $\delta 'y$, $\delta 'z$ demeureront absolument arbitraires, & l' équation (f) ne pourra se vérifier qu' en faisant généralement $T = 0$, savoir la valeur totale de l' intégrale $S\, d\, x\, D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt)$ nulle.

Soient rapportées les équations (e) à la surface posterieure du fluide en y mettant $'x$, $'y$, $'z$ au lieu de x, y, z, & supposant l'intégrale $S\, d\, x\, D (d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt) = 0$, ce qui rend $V = T$, on aura $\frac{d\,T\,dt}{d\,'y} = 'D(d \cdot \frac{d'y}{dt} + '\Pi\, dt)$, $\frac{d\,T\,dt}{d'z} = 'D\, (d\, \frac{d'z}{dt} + '\Psi\, dt)$; donc

$$d\,T = \frac{d\,T}{d'x}\, d\,'x + \frac{d\,T}{d'y}\, d'y + \frac{d\,T}{d'z}\, d'z =$$

$$D[(d \cdot \frac{d'x}{dt} + '\Pi\, dt)\, d'x + (d \cdot \frac{d'y}{dt} + '\pi\, dt)\, d'y +$$

$(d \cdot \frac{d'z}{dt} + '\Psi\, dt)\, d'z)$. C'est la valeur de la différentielle de T prise dans la surface dont nous parlons; donc puisque la quantité T y doit être généralement $= 0$, sa différentielle le sera aussi, & l' on aura par conséquent l'équation

$$(d \cdot \frac{d'x}{dt} + '\Pi\, dt)\, d\,'x + (d \cdot \frac{d'y}{dt} + '\pi\, dt)\, d\,'y$$
$$+ (d \cdot \frac{d'y}{dt} + '\Psi\, dt)\, d'z = 0,$$

qui sera celle que la surface postérieure du fluide doit avoir.

On

On trouvera une équation ſemblable pour la ſurface antérieure du fluide ; car nommant x', y', z' les coordonnées pour cette ſurface, & V' ce que devient V quand x, y, z, deviennent x', y', z', on aura en général, comme on l'a déja remarqué (*Art. XL.*) $V' = 0$; donc auſſi dV' ou $\frac{dV'}{dx'}dx' + \frac{dV'}{dy'}dy' + \frac{dV'}{dz'}dz' = 0$. Or $\frac{dVdt}{dx}dx = -Ddx\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)$, & $\frac{dVdt}{dy} = -D\left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt\right)$, $\frac{dVdt}{dz} = -D\left(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt\right)$; donc $dV' = -\frac{D'}{dt}\left[\left(d\cdot\frac{dx'}{dt} + \Pi' dt\right)dx' + \left(d\cdot\frac{dy'}{dt} + \pi' dt\right)dy' + \left(d\cdot\frac{dz'}{dt} + \Psi' dt\right)dz'\right] = 0$. Donc en général, quand le fluide eſt libre de tous cotés ſa ſurface extérieure doit être déterminée par l'équation

$$\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi dt\right)dx + \left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi dt\right)dy + \left(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi dt\right)dz = 0.$$

Suppoſons maintenant que le fluide ſoit ſoutenu par des parois fixes de figure quelconque, & dont l'équation ſoit $dz = m\,dx + n\,dy$. Si l'on conſidére les trois expreſſions intégrales de l'équation (*f*) on voit qu'elles renferment chacune deux intégrations, qui ſe rapportent à y & z dans la premiére, à x & z dans la ſeconde, à x & y dans la troiſiéme. Or puiſque la rélation des trois variables x, y, z eſt donnée par l'équation $dz = m\,dx + n\,dy$ ces différentes intégrales pourront être ramenées toutes à la même forme, c'eſt-à-dire être rapportées à deux ſeules changeantes x, & y ; il n'y aura pour cela qu'à mettre dans la premiere au lieu de dz ſa valeur en x, $m\,dx$,

&

& dans la seconde, sa valeur en y, $n\,\mathrm{d}y$; par-là l'équation (f) deviendra celle-ci

$$S^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(m\,\delta x + n\,\delta y + \delta z)\; T.dt = 0 .$$

Mais puisque $\mathrm{d}z = m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y$, on doit avoir aussi $\delta z = m\,\delta x + n\,\delta y$; donc l'équation sera identique, & ne fournira aucune condition; ainsi tout se reduira à faire ensorte que les équations génerales (b), (e), satisfassent, après leur intégration, à l'équation donnée $\mathrm{d}z = m\,\mathrm{d}x + n\,\mathrm{d}y$.

XLVIII.

Rémarque. Je ne m'étends pas d'avantage sur cette matiere pour ne point passer les bornes que je me suis prescites dans le présent Mémoire. Au reste par les formules méthodes données dans ce Problême, & dans les précédents, on pourroit encore trouver la solution de plusieurs questions qui concernent les fluides: comme le mouvement d'un fluide enfermé dans un vase mobile, les oscillations d'un corps qui flotte sur un fluide, la résistance qu'un fluide fait à un corps qui s'y meut; & d'autres Problêmes de cette espece.

XLIX.

Probleme 10. Trouver les lois du mouvement des fluides élastiques.

Solution. Par nôtre Principe général il faut que la quantité $S^3\, d\, m\!\int u\, d\, s$ soit un *maximum*, ou un *minimum*; donc en faisant les mêmes raisonnemens que dans le Prob. 6., on trouvera l'équation

$$\int S^3 d\,m\,(u\,\delta u\,d\,t - d\cdot\frac{dx}{dt}\times\delta x - d\cdot\frac{dy}{dt}\times\delta y - d\cdot\frac{dz}{dt}\times\delta z) = 0,$$

Or

Or si aucune force n'agissoit entre les corpuscules dm, on auroit, conformement à la formule (X) du même Prob. $S^1 dm\,u\,\delta u\,dt = S^1 dm\,(\Pi\,dt\,\delta x + \pi\,dt\,\delta y + \Psi\,dt\,\delta z)$; mais le fluide étant supposé élastique, on doit regarder chaque particule comme un ressort qui agit de tous côtés sur les particules contigues. Nommant F la force du ressort, & f l'espace par lequel il tend à se dilater, on trouvera en applicant ici la formule (V) de l'*Art. VIII.*
$S^1 dm\,u\,\delta u = - S^1 dm\,(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.) - S^1 F\,\delta f$, ou (en mettant $\Pi\,\delta x + \pi\,\delta y + \Psi\,\delta z$ au lieu de $P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \&c.$, & prenant F négativement, à cause que cette force tend ici à éloigner les particules) $S^1 dm\,u\,\delta u = - S^1 dm\,(\Pi\,\delta x + \pi\,\delta y + \Psi\,\delta z) + S^1 F\,\delta f$.

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, & mettant au lieu de dm sa valeur $D\,dx\,dy\,dz$, on aura donc

$$-\int S^1 dx\,dy\,dz\,D\left[\left(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\,dt\right)\delta x + \left(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\,dt\right)\delta y + \left(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi\,dt\right)\delta z\right] + \int S^1 F\,\delta f\,dt = 0 \quad . \quad . \quad (n)$$

Or comme l'action du ressort F consiste à augmenter le volume de chaque particule $d\,m$, il est clair il faudra prendre ce volume même pour la valeur de l'espace f, donc $f = dx\,dy\,dz$, par conséquent $\delta f = dy\,dz\,\delta\,dx + dx\,dz\,\delta\,dy + dx\,dy\,\delta\,dz$, $=$ (en transposant les signes δ, d) $dy\,dz\,d\delta x + dx\,dz\,d\delta y + dx\,dy\,d\delta z$; donc $S^1 F\delta f = S^1 (F\,dy\,dz\,d\delta x + F\,dx\,dz\,d\delta y + F\,dx\,dy\,d\delta z) = S^1 dx\,dy\,dz\,\left(\frac{F}{dx}\,d\delta x + \frac{F}{dy}\,d\delta y + \frac{F}{dz}\,d\delta z\right)$; formule, qu'on peut mettre sous cette forme

$$S^2 dy\,dz\,S\,dx\,\frac{F}{dx}\,d\delta x + S^2 dx\,dz\,S\,dy\,\frac{F}{dy}\,d\delta y + S^2 dx\,dy\,S\,dz\,\frac{F}{dz}\,d\delta z.$$

Or $S\,dx\,\frac{F}{dx}\,d\delta x$ se réduit, en intégrant par parties, à $F\delta x - S\,dx\,\frac{dF}{dx}\,\delta x$ (j'écris $dx\,\frac{dF}{dx}$ au lieu de dF pour dénoter que cette différentielle doit être prise en ne variant que x), & complettant l'intégrale, suivant la remarque que nous avons faite à la fin de *l'Art. I. du Mém. préced.* $F'\delta x' - 'F\delta 'x - S\,dx\,\frac{dF}{dx}\,\delta x$; on changera de même $S\,dy\,\frac{F}{dy}\,d\delta y$, en $F'\delta y' - 'F\delta 'y - S\,dy\,\frac{dF}{dy}\,\delta y$; & $S\,dz\,\frac{F}{dz}\,d\delta z$, en $F'\delta z' - 'F\delta 'z - S\,dz\,\frac{dF}{dz}\,\delta z$; donc

$$S^3 F\delta f = S^2\,dy\,dz\,(F'\delta x' - 'F\delta 'x) + S^2\,dx\,dz\,(F'\delta y' - 'F\delta 'y) + S^2\,dx\,dy\,(F'\delta z' - 'F\delta 'z)$$
$$- S^2\,dy\,dz\,S\,dx\,\frac{dF}{dx}\,\delta x - S^2\,dx\,dz\,S\,dy\,\frac{dF}{dy}\,\delta y - S^2\,dx\,dy\,S\,dz\,\frac{dF}{dz}\,\delta z$$
$$= S^2\,dy\,dz\,F'\delta x' + S^2\,dx\,dz\,F'\delta y' + S^2\,dx\,dy\,F'\delta y' - S^2\,dy\,dz\,'F\delta 'x - S^2\,dx\,dz\,'F\delta 'y - S^2\,dx\,dy\,'F\delta 'z$$
$$+ S^3\,dx\,dy\,dz\,\left(\frac{dF}{dx}\,\delta x + \frac{dF}{dy}\,\delta y + \frac{dF}{dz}\,\delta z\right);$$

donc substituant dans l'équation (n), au lieu de $S^3 F\delta f$, l'expression qu'on vient de trouver on aura enfin

$$\int(S^2\,dy\,dz\,F'\delta x' + S^2\,dx\,dz\,F'\delta y' + S^2\,dx\,dy\,F'\delta z' - S^2\,dy\,dz\,'F\delta 'x - S^2\,dx\,dz\,'F\delta 'y - S^2\,dx\,dy\,'F\delta 'z)$$
$$-\int S^3\,dx\,dy\,dz\,\Big[\left(D\,d\cdot\frac{dx}{dt} + D\,\Pi\,dt + \frac{dF}{dx}\,dt\right)\delta x + \left(D\,d\cdot\frac{dy}{dt} + D\,\pi\,dt + \frac{dF}{dy}\,dt\right)\delta y + \left(D\,d\cdot\frac{dz}{dt} + D\,\Psi\,dt + \frac{dF}{dz}\,dt\right)\delta z\Big] = 0$$

équa-

Equation réduite à l'état qu'exige notre Méthode ; supposant donc les coéficiens des différences δx, δy, δz chacun $= 0$; on aura

$$\left.\begin{array}{l} D\,(d\cdot\frac{dx}{dt} + \Pi\, dt) + \frac{dF}{dx}\, dt = 0 \\ D\,(d\cdot\frac{dy}{dt} + \pi\, dt) + \frac{dF}{dy}\, dt = 0 \\ D\,(d\cdot\frac{dz}{dt} + \Psi\, dt) + \frac{dF}{dz}\, dt = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (p)$$

& le reste de l'équation donnera

$$S^2 dy\, dz\, F'\delta x' + S^2 dx\, dz\, F'\delta y' + S^2 dx\, dy\, F'\delta z' - S^2 dy\, dz\, {}'F\delta{}'x + S^2 dx\, dz\, {}'F\delta{}'y + S^2 dx\, dy\, {}'F\delta{}'z = 0 \;.\; (q)$$

L.

Corollaire 1. Les trois équations (p) renferment les loix générales du mouvement des fluides élastiques. Pour faire usage de ces équations on supposera comme dans l'*Art. XLII.*, $\frac{dx}{dt} = \alpha$, $\frac{dy}{dt} = \beta$, $\frac{dz}{dt} = \gamma$, on mettra au lieu de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ leurs valeurs trouvées dans le même *Article*, & marquant, pour plus de simplicité, toutes les différences par d, on trouvera, après avoir divisé par $D\,dt$, les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} + \alpha\frac{d\alpha}{dx} + \beta\frac{d\alpha}{dy} + \gamma\frac{d\alpha}{dz} + \Pi = -\frac{dF}{D\,dx} \\ \frac{d\beta}{dt} + \alpha\frac{d\beta}{dx} + \beta\frac{d\beta}{dy} + \gamma\frac{d\beta}{dz} + \pi = -\frac{dF}{D\,dy} \\ \frac{d\gamma}{dt} + \alpha\frac{d\gamma}{dx} + \beta\frac{d\gamma}{dy} + \gamma\frac{d\gamma}{dz} + \Psi = -\frac{dF}{D\,dz} \end{array}\right\} (r)$$

dans lesquelles il ne faudra plus que substituer au lieu de F, & de D leurs valeurs en x, y, z, t.

Voici comment on trouvera ces valeurs ; F exprime la force du ressort de chaque particule du fluide, laquelle est

 ordi-

ordinairement proportionelle à la densité; supposons donc, pour plus de généralité, que cette force soit comme une fonction quelconque donnée de la densité, ensorte que $dF = E\,dD$; on aura $\frac{dF}{dx} = E\frac{dD}{dx}$, $\frac{dF}{dy} = E\frac{dD}{dy}$, $\frac{dF}{dz} = E\frac{dD}{dz}$. Ensuite pour trouver D, on observera que la masse dm de chaque particule du fluide est $D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, & que cette masse reste toujours la même quelque mouvement que le fluide reçoive; dont sa différentielle en faisant varier t, doit être nulle; ce qui donne $\frac{d(D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)}{dt} = 0$, savoir $\frac{dD}{dt}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}x}{dt} D\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}y}{dt} D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \frac{d\,\mathrm{d}z}{dt} D\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$, ou

$$\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}}{\mathrm{d}x} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}}{\mathrm{d}y} + \frac{\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}}{\mathrm{d}z} = 0 \ldots\ldots\ldots (s)$$

Or $\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt} = \mathrm{d}\cdot\frac{dx}{dt} = \mathrm{d}\alpha$; donc $\frac{\frac{d\,\mathrm{d}x}{dt}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$; on trouve de même $\frac{\frac{d\,\mathrm{d}y}{dt}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}y}$, & $\frac{\frac{d\,\mathrm{d}z}{dt}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}$; de plus $\frac{dD}{dt}dt$ exprime la variation de D dans l'instant dt; donc si on suppose que D soit représenté par une fonction quelconque de x, y, z, t, on trouvera que la valeur complette de $\frac{dD}{dt}dt$ sera $\frac{dD}{dt}dt + \frac{dD}{dx}\alpha\,dt + \frac{dD}{dy}\beta\,dt + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}\gamma\,dt$; on mettra ces valeurs dans l'équation ci-dessus, & changeant les lettres d en d, & multipliant le tout par

D

D on aura

$$\frac{dD}{dt} + \alpha\frac{dD}{dx} + \beta\frac{dD}{dy} + \gamma\frac{dD}{dz} +$$
$$D\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) = 0, \text{ ou}$$
$$\frac{dD}{dt} + \frac{d(D\alpha)}{dx} + \frac{d(D\beta)}{dy} + \frac{d(D\gamma)}{dz} = 0.$$

Equation par laquelle on connoîtra D, & par conféquent F.

L I.

Corollaire 2. Soit, fuivant l'hypotéfe ordinaire, $F = D$, par conféquent $E = 1$; & qu'on mette les équations (r) fous cette forme $L = -\frac{dF}{Ddx}$, $M = -\frac{dF}{Ddy}$, $N = -\frac{dF}{Ddz}$, on aura

$$L = -\frac{dD}{Ddx},\ M = -\frac{dD}{Ddy},\ N = -\frac{dD}{Ddz}.$$

Suppofons encore, $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = V$, on aura (*Artic. précédent*) l'équation $\frac{dD}{dt} + \alpha\frac{dD}{dx} + \beta\frac{dD}{dy} + \gamma\frac{dD}{dz} + DV = 0$; donc, chaffant les quantités $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, par le moïen des équations préc.; divifant par D, & tranfpofant, on aura $\frac{\frac{dD}{dt}}{D}$, ou $\frac{d \cdot lD}{dt} = \alpha L + \beta M + \gamma N - V$, ou, pour abréger, $\frac{d \cdot lD}{dt} = T$. Or les équations ci-deffus fe réduifent à $L = -\frac{d \cdot lD}{dx}$; $M = -$

$d \cdot lD$

$\frac{d \cdot l D}{dy}$, $N = - \frac{d \cdot l D}{dz}$, donc comparant ces équations avec celle qu'on vient de trouver on aura $\frac{dL}{dt} = - \frac{dT}{dx}$; $\frac{dM}{dt} = - \frac{dT}{dy}$; $\frac{dN}{dt} = - \frac{dT}{dz}$; équations, où la lettre D ne se trouve plus. On trouvera encore en combinant ensemble les équations ci-devant $\frac{dL}{dy} = \frac{dM}{dx}$, $\frac{dL}{dz} = \frac{dN}{dx}$, deux équations qui reviennent au même que les équations (k) de *l'Art. XLII.* L'on aura donc cinq équations toutes délivrées de la lettre D, dont trois prises à volonté suffiseront pour résoudre le Problême.

Si on suppose que le mouvement du fluide soit parvenu à un état permanant; alors on aura $\frac{dD}{dt} = 0$, & par conséquent $T = 0$.

L I I.

Corollaire 3. On peut encore représenter le mouvement du fluide par les variables X, Y, Z, t, comme dans *l'Art. XLIV.* Pour cela on cherchera d'abord la valeur de D au moïen de l'équation (s), laquelle en introduisant les lettres α, β, γ, devient celle-ci, $\frac{\frac{dD}{dt}}{D} + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}$. Or, par les formules de *l'Art. cité*, on trouve $\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\frac{dK}{dt}}{K}$, par conséquent $\frac{\frac{dD}{dt}}{D}$

dK

$+ \frac{\frac{dK}{dt}}{K} = 0$, d'où l'on tire $lD + lK = const.$, savoir $DK = h$, & $D = \frac{h}{K}$. Pour déterminer la constante h, on remarquera, qu'au commencement du mouvement, $dx = dX$, $dy = dY$, $dz = dZ$; donc $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$, $V = 1$; ce qui donne $K = 1$; d'où il s'ensuit que h doit être égale à la densité D que le fluide a au premier instant de son mouvement.

Aiant trouvé l'expression de D il n'y aura plus qu'à la substituer dans les équations (p); or D étant une fonction de X, Y, Z, t; sa différentielle, en prenant t constant, sera représentée par $EdX + FdY + GdZ$; ainsi pour avoir les valeurs de $\frac{dD}{dx}$, $\frac{dD}{dy}$, $\frac{dD}{dz}$, il faudra encore substituer au lieu de dX, dY, dZ leurs expressions en dx, dy, dz trouvées dans *l'Art. XLIV.*, ce qui donnera, en supposant

$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A$
$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B$
$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C$,

$dD = \frac{A dx + B dy + C dz}{K}$, d'où l'on tire $\frac{dD}{dx} = \frac{A}{K}$, $\frac{dD}{dy} = \frac{B}{K}$, $\frac{dD}{dz} = \frac{C}{K}$; & par conséquent suivant l'hyp. de *l'Art. L.* $\frac{dF}{dx} = \frac{EA}{K}$, $\frac{dF}{dy} = \frac{EB}{K}$, $\frac{dF}{dz} = \frac{EC}{K}$.

On substituera donc ces valeurs dans les équations (p), & l'on aura, en divisant par D qui est $= \frac{h}{K}$,

$$d \cdot \frac{dx}{dt} + \Pi dt + \frac{EA}{h} dt = 0$$

$d \cdot dy$

$$d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt + \frac{EB}{b} dt = 0$$
$$d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt + \frac{EC}{b} dt = 0.$$

Si on suppose dans ces équations $\Pi = 0$, $\pi = 0$, $\Psi = 0$, $\frac{E}{b} = 2g$, elles reviennent au même que celles que M. Euler a trouvé par une voie différente, *pag. 6. ci-dessus*.

LIII.

Scholie. A l'égard de l'équation (q) qui reste encore à examiner, on prouvera par un raisonnement semblale à celui de *l'Art. XLVI.* que, si le fluide appuie contre des parois fixes, les trois termes $S^2 \, dy \, dz \, {}'F \delta {}'x + S^2 \, dx \, dz \, {}'F \delta {}'y + S^2 \, dx \, dy \, {}'F \delta {}'z$ sont toujours $= 0$ aussi bien que les trois autres $S^2 dy \, dz \, F' \delta x' + S^2 dx \, dz \, F' \delta y' + S^2 dx \, dy \, F' \delta z'$. Mais si on suppose le fluide libre de toutes parts, ou seulement de quelque côté; alors la quantité F devra être nulle à la surface extérieure du fluide dans les endroits, où il est libre; on aura donc, pour cette surface, l'équation $dF = 0$, savoir $\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0$; ou, en mettant, au lieu de $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ leurs valeurs, tirées des équations (p) $(d \cdot \frac{dx}{dx} + \Pi dt) dx + (d \cdot \frac{dy}{dt} + \pi dt) dy + (d \cdot \frac{dz}{dt} + \Psi dt) dz = 0$, précisément comme on a trouvé dans *l'Art. cité* pour les fluides non élastiques.

Fautes

Pag. 196., *lign.* 5. qui a pour titre: *Methodus maximorum &c.*, *lisez* qui a pour titre: *Methodus inveniendi lineas curvas &c.*

Cet Ouvrage est le même que celui que nous avons déja cité dans le Mémoire précédent.

Pag. 201. *ligne antépénultiéme* les mêmes substitutions, *lisez* les mêmes suppositions.

Pag. 203. *lign.* 4. multipliant par $\frac{\delta\varphi}{V}$, *changez* le δ en d.

Pag. 204. *lign.* 17. un raport tel que $Pdp\delta$, *mettez* $\delta P dp$.

lign. 24. $A\delta p + B\delta q + R\delta r$, *lisez* $A\delta p + B\delta q + C\delta r$.

Pag. 209. *lign.* 9. & 10. de *l'Art. X.*, *changez* P', P'' en P; Q', Q'' en Q; R', R'' en R.

Pag. 215. *lig. pénultiéme* $\delta ds = o$, *lisez* $\delta ds'' = o$.

Pag. 216. *lign. premiére* $(Mu\delta u + M'\delta u' + M''\delta u'' + \&c.)\,dt$ *lisez* $(Mu\delta u + M'u'\delta u' + M''u''\delta u'' + \&c.)\,dt$.

Pag. 217. *lig.* 18. $M'\int\delta ds'$; *lisez* $M'\int u'\delta ds'$.

Pag. 223. *lign. seconde*, *mettez le signe* $-$ *avant le premier membre de l'équation* (*H*).

Pag. 225. *lign. derniére*, & $\delta\varphi$ pour $\delta\varphi$, *lisez* & $\delta\varphi$ pour $\delta\varphi'$.

Pag. 231. *lign.* 4. $\frac{d\cdot\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$, *lisez* $\frac{d\cdot\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{dt}$.

lign. 14., $Psdt$, étant la longueur &c., *lisez* $Psdt$, s étant la longueur &c.

Pag. 240. *lign.* 6. *au lieu de* $+ d\cdot\frac{dy}{dx}\times kdt$, *lisez* $+ d\cdot\frac{dy}{dx}\times kdt$.

P p   *Pag.*

Pag. 249. *lign.* 9. dans l'équation (*L*), *lisez pour plus de clarté* dans l'équation (*L*) ci-dessus.

Pag. 261. *lign. dernière*, *changez* [*X*] *en* [*Y*].

Pag. 263. *lign.* 15. Soient en général, *lisez pour plus de clarté* Soient en général pour chaque point du corps; c'est-à-dire, en regardant ξ, φ, ζ comme constantes.

lign. 22. $H\delta q$, *lisez* $H\delta Q$.

Pag. 266. *lign.* 9. Je mets de même le second nombre; *lisez* Je mets de même le second membre.

Pag. 267. *lign.* 11. devient en fatigant, *lisez* devient en faisant.

lign. 19. est précisément $= T$, *lisez* $= T dt$.

Pag. 270. *dans les trois formules des lignes* 10. 11. 12. *changez par-tout la lettre* d *en* d.

Pag. 272. *lign.* 11. pour que les équations puissent être identiques, *lisez* pour que les équations soient possibles.

Pag. 276. *lign.* 2. *au lieu de* $-pT - \theta A' dx - \theta B' dz$, *lisez* $-pT - \frac{\theta A' dx}{dt} - \frac{\theta B' dz}{dt}$.

lign. 7. *Dans le premier membre de l'équation de cette ligne*, *lisez* qT *au lieu de* qt.

lign. 12., en intégrant $\theta = ac$, *lisez* en intégrant $\theta = ac'$.

Pag. 277. *lign.* 2. dans les équations (*h*), (*i*), *lisez* dans les équations (*g*), (*b*).

dans la ligne qui suit l'équation (*m*) *a* comme on fait; *effacez* *a*.

Pag. 285. *Dans les équations des lign.* 17., 18., 20. *au lieu de* $\Pi \frac{dZ}{dr}$, *lisez* $a\Pi \frac{dZ}{dr}$.

Pag. 290. *lig.* 19. *ajoutez* dt *à la fin de la ligne*.

Pag. 291. *dans la ligne* (*q*) *changez les deux signes* + *en* −.

SUR

SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MECHANIQUE.

PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

Un très-grand Géomètre qui s'est appliqué avec un égal succès à reculer les bornes de la Méchanique & à en éclaircir les principes, les a réduit à la Force d'inertie, la Composition des forces, & l'Equilibre: je vais tâcher dans cet Ecrit de démontrer ces Principes d'une maniére exacte & rigoureuse, & de satisfaire ainsi à la question si souvent agitée parmi les Géomètres & les Philosophes, *si les loix de la Méchanique sont de vérité nécessaire ou contingente.*

L'homme Célébre dont je viens de parler remarque à ce sujet, dans l'excellent discours préliminaire qu'il a mis à la tête de son Traité de Dynamique, que la question dont il s'agit se réduit à savoir si les loix de l'équilibre, & du mouvement qu'on observe dans la nature sont différentes de celles que la matiére abandonnée à elle même auroit suivie: qu'on me permette cependant ici quelques réflexions qui pourront peut-être servir à répandre un plus grand jour sur cette matiére. Il paroit d'abord que l'action du Créateur sur les corps ne rend en aucune façon hipotétique l'exécution des loix de la Méchanique dans l'univers, comme M. d'Alembert semble le supposer dans cet endroit; puisqu'il nous sera toujours permis de considérer cette action de Dieu comme une nouvelle force qui agit sur les corps: quels que soient alors les mouvemens qui en résultent, ils ne feront

jamais contraires aux principes de la Méchanique qui doivent être immuables par eux mêmes.

En effet les objets des différentes parties des Mathématiques pures, sont également abstraits, & par conséquent susceptibles d'un même dégré d'évidence: car pendant qu'on ne considére les corps dans l'algébre que comme capables de former des nombres, & que la Géométrie ne s'occupe que de leur étendue: on ne leur conserve dans la méchanique que la seule impénétrabilité: & quoique cette science emprunte de l'algébre la réplicabilité de ces points impénétrables, & qu'elle ait recours à la Géométrie pour en apprecier les mouvemens; il est toujours visible que ces notions étant également simples & abstraites, les conclusions qu'on peut en déduire devront toujours être marquées au sceau de la certitude & de l'évidence.

Si nous parvenons donc à fonder les loix de la Méchanique sur ces seules considérations purement abstraites & intellectuelles, non seulement elles seront d'une vérité aussi nécessaire que les propositions de la Géométrie; mais il séra encore certain que ces loix seront observées dans la nature: car, comme il est indubitable qu'un cercle aura toujours les propriétés que la Géométrie lui assigne, si réellement il est tel qu'on l'a supposé; de même quand deux ou plusieurs corps agiront les uns sur les autres d'une maniére quelconque, il en résultera nécessairement l'effet qui appartient à cette maniére d'agir, & que la méchanique nous enseigne. Il est vrai qu'il est toujours assés difficile de s'assurer dans la pratique, de la maniére dont les corps agissent les uns sur les autres; ou pour me servir du langage des Méchaniciens, il est moralement impossible de connoître exactement toutes les forces qui agissent sur les corps qui nous environnent; mais la Méchanique, proprement dite, n'en est pas moins certaine, & même moins utile; & c'est encore ici comme dans la Géométrie,

ou

ou l'on transporte avec succès les théorèmes qu'on démontre sur les figures exactes, à celles qui ne font qu'en approcher sensiblement. Enfin l'Etre Suprème peut sans doute alterer à son gré la configuration des corps, comme leur mouvement; mais les loix qu'ils suivront dans leurs nouveaux mouvemens, & les propriétés de leurs nouvelles figures, pourront toujours se déduire de la quantité de ces changemens, conformément aux principes immuables de la Méchanique & de la Géométrie.

En voilà assès pour faire connoître à mes Lecteurs le point de vue, sous lequel j'ai cru devoir considérer cette Science, & la route que j'ai tâché de suivre pour en établir les principes d'une maniére qui ne souffrit aucune difficulté. Les trois principes que j'ai indiqué plus haut m'ont fournit la division naturelle de ces Recherches: j'y ai joint une démonstration du principe de l'équilibre du lévier absolument indépendante des précédens; ce que j'ai fait d'autant plus volontiers, qu'il paroit assés difficile de décider, si l'on doit plus tôt faire dépendre l'équilibre du lévier de la composition des forces, que déduire au contraire ce dernier principe de celui de l'équilibre du lévier. La démonstration toute analytique que j'en ai trouvé m'a d'ailleurs paru par sa singularité digne de trouver place ici.

I.

De la Force ou Loi d'inertie.

SI l'on réfléchit sur la maniére dont les hommes se forment les idées de l'extension & du mouvement, & sur la méthode qu'ils suivent pour leur donner plus de précision: on verra bien-tot que comme nous sommes obligés de rapeller toutes les espéces d'extension à la seule ex-

extension linéaire & rectiligne, si nous voulons en évaluer les raports; de même quand il s'agit de fixer les rélations, qui se trouvent entre les différents mouvements, que nous observons dans la nature, il est d'abord nécessaire de les raporter à une unité commune & déterminée. Déja accoutumés en Géométrie à considérer la ligne droite comme la plus simple des extensions linéaires, nous nous sommes déterminés pour le mouvent rectiligne & nous avons préféré le mouvement uniforme à cause de l'égalité des espaces décrits en tems égaux, qui nous l'a fait regarder comme toujours semblable à lui même.

Après avoir choisi le mouvement uniforme pour la mesure commune de tous les autres, il a fallu pour en faciliter la comparaison raporter a des causes vraies, ou imaginaires, les changemens continuels qui arrivent dans l'uniformité du mouvement des corps: si à présent on fait abstraction de ces causes quelles qu'elles soient, le mouvement sera uniforme, & rectiligne par la definition même, & c'est si je ne me trompe dans cette seule abstraction purement mathématique que consiste la loi d'inertie, dont l'énoncé se reduira à dire, que tous les corps, soit qu'ils soient en repos, ou en mouvement, doivent être considérés comme persévérant dans l'état où ils sont, si l'on fait abstraction de tous les changemens qui pourroient arriver dans leurs vitesses & dans leurs directions.

Il est visible qu'un pareil principe n'a pas besoin de démonstration, puisque ce n'est qu'une proposition identique; & pour peu qu'on y réfléchisse, on s'appercevra aisément qu'il est suffisant pour la méchanique, & que cette science n'exige pas qu'on lui donne plus d'extension, & de réalité. En effet quand même les corps seroient capables d'accélérer, ou de retarder d'eux mêmes leurs mouvemens, il est évident que cela ne pourroit se faire que selon quelque loi déterminée, à laquelle il seroit toujours facile d'avoir

égard

égard, dès que l'experience nous l'auroit apprise, de la même façon qu'on calcule les effets de l'attraction, & de la résistance des fluides. En un mot c'est une chose fort indifférente pour la Méchanique, que le mouvement des corps soit altéré par la nature même de ces corps, ou par quelques causes étrangères; sur tout si ces causes nous sont inconnues, comme on sait qu'il en est plusieurs, qui le sont encore pour nous, & le seront peut-être toujours.

Il est donc inutile de donner plus d'étendue à la loi d'inertie, & il paroit même qu'elle n'en est pas susceptible. Plusieurs Philosophes ont prétendu à la vérité que c'est une propriété essentielle à la matiere de conserver son état, c'est à dire de continuer à se mouvoir avec la même vitesse, & dans la même direction; mais sans examiner ici si c'est mieux conserver son état de se mouvoir uniformément & en ligne droite, que suivant une autre loi & dans une courbe: il me suffira de remarquer que, dans l'entiére ignorance où nous sommes sur la nature des corps, le seul moïen qui nous reste pour établir une pareille assertion, seroit de faire voir que cette propriété est une conséquence de l'étendue & de l'impénétrabilité; or je ne pense pas que cela nous soit jamais possible.

En vain dira-t-on qu'on n'aperçoit rien dans l'idée que nous avons de la matiére qui puisse lui donner du mouvement, ou le ralentir si elle en a déja: il suffit que cette propriété n'ait rien de contradictoire pour nous autoriser à penser qu'elle peut en être doüée; or je ne vois pas en quoi il seroit plus absurde d'assurer qu'un corps a, ou peut avoir en lui même de quoi retarder son mouvement, que de dire que cet effet est produit par la seule présence d'un autre corps, quoique fort éloigné, comme le pense une secte de Philosophes fort acréditée aujourd'hui.

Je suis au reste très persuadé que la force d'inertie telle qu'on la conçoit communement, a réellement lieu dans la

nature

nature; la régularité du mouvement des Planettes, & une infinité d'autres faits semblent ne pas permettre d'en douter; mais c'est là une vérité d'experience, une des premiéres sans doute de celles qui doivent servir de fondement aux sciences physico-mathématiques, mais inutile à la Méchanique, & d'un genre différent de celles qu'il est permis d'admettre dans cette science, à moins qu'on ne veuille, avec quelques Philosophes, la ranger dans la classe des sciences expérimentales.

M. d'Alembert semble se rapprocher de ce sentiment au mot *Force* dans l'Encyclopédie. *La force d'inertie* (dit cet illustre Ecrivain) *n'a lieu, comme l'experience le prouve, que dans la matière brute, c'est-a-dire dans la matière qui n'est pas unie à une principe intelligent*: or après un pareil aveu, nôtre Auteur n'a sans doute pas prétendu que cette loi fût démontrée même pour les corps abstraits qui sont l'objet de la Méchanique; puisqu'alors la matiére y seroit astreinte sans réstriction. La démonstration qu'il donne au commencement du Traité de Dynamique tend donc uniquement à établir qu'on ne trouve dans l'idée du mouvement d'un corps aucune raison de variabilité, ce que j'accorderai sans peine, quoique plusieurs Philosophes croient avoir de bonnes raisons pour être d'un sentiment contraire; mais il me semble que l'idée d'une vitesse constante n'y est pas plus comprise que celle d'une vitesse retardée. Je le répéte encore: la ligne droite, & le mouvement uniforme ne sont pas plus simples en eux mêmes, que toute autre ligne, & toute autre loi de mouvement: ainsi quand même il seroit certain que les corps ne sont pas capables de se donner le mouvement à eux mêmes, il ne s'en suivroit pas encore qu'ils fussent incapables de retarder celui, qu'ils auroient déja, comme un grand Géomètre l'a crû; puisque cette conclusion suppose que le mouvement uniforme est celui que les corps suivent d'eux mêmes, & que, s'il est variable, il en faut chercher la cause dans une force active.

II.

I. I.

De la composition des forces.

DE quelle nature que soient les causes du mouvement des corps, qu'on comprend sous le nom général de *forces*: il est au moins certain qu'elles n'ont par rapport à nous aucune réalité, que par leurs effets, & que les mouvemens qu'elles produisent, étant les seuls moyens que nous aions pour nous assurer de leur existence, c'est dans ces mouvemens seuls que nous devons chercher la mesure de leurs rapports. Les forces sont donc à nôtre égard toujours proportionelles à leurs effets, puisque nous entendons par cette expression bien moins la cause du mouvement que le mouvement même. Mais comment doit-on estimer le rapport des mouvemens de plusieurs corps différens? On voit d'abord qu'on ne peut considérer dans un mouvement quelconque, que le corps en mouvement, & la vitesse, avec laquelle il se meut: tout se réduit donc à savoir si l'on doit dire qu'une force est double d'une autre, quand agissant toutes les deux sur une même masse, celle-ci lui donne une vitesse double; ou bien si pour cela elle doit imprimer une vitesse égale à une masse double. Il est évident qu'on peut indifféremment choisir celle qu'on voudra de ces deux definitions, & j'espére de faire voir dans l'article suivant qu'elles ont lieu toutes les deux en même tems; je me contenterai, en attendant, d'observer ici que ce que j'ai à dire dans cet article sur la composition de forces, sera également vrai dans l'un & dans l'autre cas.

LEMME. Si deux forces égales dont la quantité, & les directions sont exprimées par les lignes CA, CB agissent (*fig.* 1. *plan.* 4.) sur un corps quelconque C, il est évident

 que

que le corps ne pourra pas obeir à ces deux forces en même tems : car il ne peut pas se mouvoir en même tems selon CA, & selon CB; il prendra donc une direction CM différente de CA & de CB, & la ligne CM doit nécessairement diviser l' angle ABC en deux également, puisque les forces CA, CB étant égales par la supposition, tout ce qui tend à raprocher CM de CA tend également à la raprocher de CB. Cela posé, il est encore évident qu'on peut imaginer une troisiéme force CM, qui fasse seule sur le corps C le même effet, que CA, CB conjointement. D' autre part la quantité de la force CM ne peut dépendre que de la quantité de CA ou CB, & de la valeur de l' angle ACB, & par conséquent si l' on fait $CA = CB = a$, $CM = z$, $ACB = \varphi$, on aura $z = fonct. (a, \varphi)$.

Or la force CM étant de même nature, que la CA, il faut qu' elles contienent un même nombre de dimensions; ce qui donne $z = CM = fonct. (a, \varphi) = a\, fonct. \varphi$, parceque la dimension de φ est nulle. *

Au reste si quelqu'un n' étoit pas content de ces sortes de raisonnemens, on pourroit d' abord poser comme un principe incontestable & évident par lui même, que pour le même angle φ, la force z est toujours proportionelle à a, ensuite faisant $\frac{dz}{da} = y$, on trouveroit y constant, & par conséquent $z = ay$ ou bien $z = a\, fonct.\, \varphi$.

Probléme *Trouver la valeur de* y *ou de* fonct. φ.

Soient menées les lignes (*fig.* 2. *plan.* 4.) Cm, Cm, Ca, Ca', Cb', Cb, telles que $ACB = \varphi$, $mCM = ACa = aCa' = BCb = bCb' = \frac{d\varphi}{2}$ on aura $mCm = ACa' = BCb' = d\varphi$, $aCb = \varphi + d\varphi$, $a'Cb' = \varphi + 2d\varphi$, & la

* Il suit de là que, l'angle φ demeurant constant, z est toujours proportionel à a; on pourroit de même démontrer par cette méthode d' une maniére directe & fort naturelle plusieurs théorêmes sur la proportionalité des côtés des figures, & un grand nombre d' autres propositions de Géomètrie, & de Méchanique.

valeur de y qui appartient à l'angle ACB, deviendra $y + dy = y'$ pour l'angle aCb, & $y + 2dy + d^2y = y''$ pour l'angle $a'Cb'$. Soit $dy = u\,d\varphi$, & $u = V$ lorsque $\varphi = 0$, on aura pour l'angle mCm, $y = 2 + V\,d\varphi$; car l'on sait que quand l'angle mCm s'évanoüit tout à fait, z devient $= 2a$, ce qui donne $y = 2$.

Tout ceci posé, & bien entendu, imaginons que les quatre forces Ca', CA, Cb', CB, dont chacune est $= a$, agissent en même tems sur le point C: il est clair (*lemme*) que la force composée de ces quatre forces sera suivant CM, & $= a(y + y'')$. Or les deux forces CA, Ca' sont équivalentes à une troisiéme Ca, qui doit être égale à celle qui résulte suivant CM de l'action simultanée des Cm, Cm, cette force sera donc $= a(2 + V\,d\varphi)$: on reduira de même les forces CB, Cb' à un troisiéme selon Cb, & $= a(2 + V\,d\varphi)$. On pourra donc substituer aux quatre forces Ca', CA, Cb', CB deux autres forces chacune $= a(2 + V\,d\varphi)$, & agissant dans les directions Ca, Cb; or si ces forces étoient $= a$ elles auroient pour force composée une troisiéme force dans la direction CM & $= ay'$, donc (*lemme*) cette force composée sera $= ay'(2 + V\,d\varphi)$. d'autre part cette force devra, comme nous l'avons vû plus haut, être $= a(y + y'')$. De là résulte l'équation $y'(2 + V\,d\varphi) = y + y''$, & substituant les valeurs de y' & de y'', $(y + dy)\times(2 + V\,d\varphi) = 2y + 2dy + d^2y$, & ôtant ce qui se détruit $y\,V\,d\varphi + V\,dy\,d\varphi = d^2y$, ou bien $y\,V\,d\varphi = d^2y$. On voit de là que puisque y doit être une quantité finie, il faut que V soit infiniment petite & du même ordre que $d\varphi$.

Supposons donc $V = H\,d\varphi$, on aura $d^2y = y\,H\,d\varphi^2$, dont l'intégrale est généralement $y = Ae^{\varphi\sqrt{H}} + Be^{-\varphi\sqrt{H}}$; si dans cette équation, & dans sa différentielle, qui est $dy = \sqrt{H}\cdot d\varphi\,(Ae^{\varphi\sqrt{H}} - Be^{-\varphi\sqrt{H}})$, on fait $\varphi = 0$, cette supposition, qui rend $y = 2$, nous donnera premiérement

$A + B = 2$ ensuite $dy = \sqrt{H}\, d\varphi\, (A - B)$: Or quand $\varphi = 0$ on a $dy = V d\varphi = H d\varphi^2$, donc $H d\varphi = A - B$, ou $A - B = 0$, & par conséquent $A = B = 1$; donc $y = e^{\varphi \sqrt{H}} + e^{-\varphi \sqrt{H}} = 2\, cos.\, \varphi \sqrt{-H}$. Maintenant lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire quand l'angle φ est égal à la demi-circonférence, on a $y = 0$ donc $cos.\, \frac{\pi}{2} \sqrt{-H} = 0$ & par conséquent $\frac{\pi}{2} \sqrt{-H} = \frac{\pi}{4} (2\mu + 1)$; ($\mu$ étant un nombre entier quelconque positif ou négatif). On tire de cette équation $\sqrt{-H} = \frac{2\mu + 1}{2}$ & enfin $y = 2$ cof. $\frac{(2\mu + 1)}{2}\varphi$.

Or il est visible que tant que l'angle φ est moindre que deux droits, la force z, & par conséquent la valeur de y doit toujours être positive: condition qui ne sauroit avoir lieu à moins que μ ne soit $= 0$, on aura donc enfin y ou *fonct.* $\varphi = 2\, cos.\, \frac{\varphi}{2}$. C. Q. F. T.

Corollaire. De là il est aisé de déduire cette conclusion générale, sçavoir que la force composée de deux forces quelconques égales entre elles & inclinées comme que ce soit, est toujours déterminée quant à sa quantité, & à sa direction par la diagonale du rhombe qu'on peut faire sur les lignes qui exprimeroient la quantité & les directions de ces forces.

Probléme 2. *Trouver la quantité, & la direction de la force CG qu'on suppose équivalente à deux autres forces CD, CB qui forment entre elles un angle droit.*

Soit tirée par le point C la ligne droite (*fig.* 3. *plan.* 4.) EFC, en sorte que $GCB = BCE$, on aura encore $DCG = DCF$: qu'on imagine à présent la force CB divisée

visée en deux forces égales selon CG & selon CE, & la force CD en deux autres dans les directions CF, CG: les deux premiéres seront (*prop. précéd.*) $= \frac{CB}{2\,cof.BCG}$, & les deux secondes $= \frac{CD}{2\,cof.DCG}$; nous aurons donc, au lieu de CD, & CB, quatre autres forces: sçavoir deux dans les directions CE, CF, & deux conspirantes dans la direction CG; or par la supposition toute l'action doit se faire dans la ligne CG, donc les deux forces selon CE, & CF, qui sont directement opposées doivent être égales, ce qui donne $\frac{CB}{2\,cof.BCG} = \frac{CD}{2\,cof.DCG}$: & celles qui sont selon CG devant être égales à CG, on a, $CG = \frac{CB}{2\,cof.BCG} + \frac{CD}{2\,cof.DCG}$. Si à présent on substitue dans la seconde équation la valeur de $CB = \frac{CD \times cof.BCG}{cof.DCG}$ prise dans la primiére, elle deviendra $CG = \frac{CD}{cof.DCG}$: on aura donc les analogies suivantes $cof.\,BCG : cof.\,DCG = CB : CD$, $CG\ CD = 1 : cof.\,DCG$; & à cause de l'angle DCB qui est droit, $cof.\,DCG = fin.\,DCG = CD : CB$; $CD : CG = fin.\,BCG : 1$. La premiére de ces analogies détermine la direction de la force CG & la seconde la quantité. C. Q. F. T.

PROBLÉME 3. *Trouver la quantité & la direction de la force CM composée de deux autres forces CE, CD, qui forment entre elles un angle quelconque.*

Après avoir tirée la ligne FCG perpendiculaire à CM, qu'on divise CD en deux autres CG, CB, on aura (*prop. prec.*) $CB = CD \times cof.\,DCB$, $CG = CD \times fin.\,DCB$ (*fig.* 4. *plan.* IV.) & en divisant de même CE on trouvera $CQ = CE \times cof.\,ECB$; $CF = CE \times fin.\,ECB$; l'opposition des forces CF, CG, nous donnera l'équation

C

$CD \times \mathit{fin}.\, BCD = EC \times \mathit{fin}.\, ECB$, qui détermine la direction : les deux autres forces CQ, CB, qui agissent dans la direction CM donneront $CM = CD \times \mathit{cof}.\, DCB + CE \times \mathit{cof}.\, ECB$, valeur de la force composée.

Si dans cette équation on substitue au lieu de CD sa valeur $\frac{CE \times \mathit{fin}.\, ECB}{\mathit{fin}\, DCB}$, tirée de la premiére, on a.

$$CM = CE \frac{(\mathit{cof}.\, BCD \times \mathit{fin}.\, ECB + \mathit{cof}.\, ECB \times \mathit{fin}\, BCD)}{\mathit{fin}.\, BCD}$$

$$= \frac{CE \times \mathit{fin}.\, ECD}{\mathit{fin}.\, DCB},$$ à cause de $ECB + BCD = ECD$,

Donc $CE : CD : CM$ sont entre elles comme $\mathit{fin}.\, BCD : \mathit{fin}.\, ECB : \mathit{fin}.\, ECD$, ou comme le sinus des angles opposées. C. Q. F. T.

Corollaire. Les équations qui determinent CM, sont comme on voit les mêmes que celles, qui expriment le rapport de la Diagonale d'un paralellogramme quelconque à ses côtés ; nous avons donc démontré généralement que la force composée de deux forces quelconques, est toujours exprimée quant à sa quantité, & à sa direction par la diagonale du paralellogramme qu'on peut faire sur les lignes qui représentent la direction, & la quantité des forces composantes.

Scholie I. La démonstration du Prob. 1., dont les deux autres ne sont que des Corollaires assez simples, est comme on voit directe, & fort courte : je n'ai pas fait difficulté d'y faire usage dès le commencement, des calculs differentiel, & intégral ; parceque l'expression de la force composée de deux forces données, & qui forment entre elles un angle quelconque, contient toujours implicitement ces principes, puisque le rapport de cette force aux composantes peut-être incommensurable. Il est vrai que l'application de

de ces calculs à la fonction indéterminée qui exprime ce raport, suppose qu'elle est assujettie à la loi de continuité; mais il est visible qu'on ne sauroit raisonablement en douter, & que puisque les accroissemens de cette force dépendent de celle de l'angle, ces accroissemens ne se font pas par sauts. Cependant, comme je veux prévenir jusqu' aux difficultés les moins fondées, voici un autre démonstration de la même proposition, entiérement délivrée de ces calculs, & qui ne dépend en aucune façon de cette supposition d' ailleurs si légitime.

Soit (*fig.* 2. *plan.* *IV*) $m C M$ un angle, qui soit à l' angle droit comme $1 : \nu$, ν étant un nombre entier quelconque, & soit $A C M = B C M$ un angle multiple de $m C M$, & $= n \times m C M$; & après avoir tiré les lignes $C a$, $C a'$, $C b$, $C b'$, telles que $A C a = a C a' = B C b = b C b' = m C M$, qu' on suppose que la force composée de deux forces $= a$, soit $= k a$ pour l' angle $m C m$; $= p a$ ou $p^n a$ pour l'angle $A C B$; $= p^{n+1} a$ pour l' angle $a C b$, & enfin que la force composée pour l'angle $a' C b'$ soit $= p^{n+2} a$. (on voit que dans ces expressions les nombres n, $n + 1$, $2 + 2$, n' expriment pas des puissances de p; mais servent seulement à dénoter que les forces $p^n a$, p^{n+1} &c. répondent aux angles $2 n \times m C M$, $= A C B$, $2 (n + 1) \times m C M = a C b$, $2 (n + 2) \times m C M = a' C b'$.

Puisque $a' C A = b' C B = m C m$, les deux forces $a' C$, $A C$ seront équivalentes (*hyp.*) à une seule $= k a$ selon $a C$ & par la même raison deux autres forces égales $B c$, $b' c$ équivaudront à une troisiéme suivant $b C$ & $= k a$: or deux forces $= a$ suivant $a C$, $b C$ donnent pour force composée $p^{n+1} a$, donc les deux $= k a$ donneront $k p^{n+1} a$ dans la direction $M C$. D' un autre côté (*hip.*) les deux forces $A C$, $B C$ donnent $p^n a$ selon $B C$, & les deux autres $a' C$, $b' C$ agissent comme $p^{n+2} a$ dans la même direction: on aura donc $(p^n + p^{n+2}) a$, $= k p^{n+1} a$, sçavoir, $p^{n+2} - k p^{n+1}$

$+$

$+ p^n = 0$; d'où l'on voit que les quantités p forment une suite recurrente, dont l'echelle de relation est $k - 1$; donc on aura généralement $p^n = D x^n + E y^n$, D & E étant des constantes, n étant ici exposant de x & y à la maniére ordinaire, & x & y étant les racines de l'équation $u^2 - k u + 1 = 0$, ce qui donne $u = \frac{k}{2} \pm \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, & par conséquent $x = \frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{2} - 1)}$, $y = \frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$ on aura donc en substituant ces valeurs,

$$p^n = D[\frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^n + E[\frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^n.$$

Or soit $k = 2 \cos. \alpha$, on sait que $[\cos. \alpha + \sqrt{(\cos. \alpha^2 - 1)}]^n = \cos. n\alpha + \sqrt{-1} \times \sin. n\alpha$ & $[\cos. \alpha - \sqrt{(\cos. \alpha^2 - 1)}]^n = \cos. n\alpha - \sqrt{-1} \sin. n\alpha$; donc $p^n = (E + E) \cos. n\alpha + \sqrt{-1} \times (D - E) \times \sin. n\alpha$ &, changeant les constantes, $p^n = F \cos. n\alpha + G \sin. n\alpha$.

Or si $n = 0$, on a $p^n = 2$, puisqu'alors l'angle $n \times mCM$ devient $= 0$; donc on a $2 = F$; si $n = 1$, p^n devient par l'hipotése $= k = 2 \cos. \alpha$, donc $2 \cos. \alpha = 2 \cos. \alpha + D \sin. \alpha$, & $D = 0$; donc nôtre formule devient généralement $p^n = 2 \cos. n\alpha$; de plus si $n = \nu$ c'est-à-dire si l'angle $n \times mCM$, auquel répond la force composée p^n est égal à deux droits, on doit avoir $p^\nu = 0$, & par consequent $2 \cos. \nu\alpha = 0$, ce qui fait voir que $\nu\alpha = \frac{\pi}{4}$, & donne finalement $\alpha = \frac{\pi}{4\nu}$ donc $p^n = \cos. \frac{n\pi}{4\nu} = 2 \cos. \frac{ACB}{2}$

Voila donc nôtre proposition démontrée à la rigueur pour tous les angles commensurables avec la demicirconférence, & en faisant voir, ce qui est très-facile qu'on peut toujours prendre l'angle mCm tel que, n & ν restant des nombres entiers, l'angle $\frac{n\pi}{4\nu}$ ne differe que d'une quantité aussi petite

te qu'on voudra d'un angle donné, on pourra prouver sans restriction & avec la derniere exactitude la vérité de cette proposition, par une méthode trop familiére aux Géomêtres & surtout dans les Ecrits des Anciens, pour que je m'arrête à la dévéloper ici.

REMARQUE. Le Savant M. Daniel Bernoulli à le premier démontré ce principe en 1726. dans les Mémoires de l'Académie de Petersbourg, d'une maniére exacte, & fort ingénieuse: mais la longue suite de raisonnemens, & de théorêmes géométriques, & algébriques, par lesquels il est obligé de passer semble ne pas assès répondre à la simplicité si désirable dans la démonstration d'un principe aussi important. C'est sans doute ce qui a engagé M. d'Alembert à traiter de nouveau cette matiére dans une dissertation particuliére qu'on trouve parmi ses Opuscules imprimés derniérement. Sa démonstration déja un peu plus courte & plus simple que celle de M. Bernoulli, exige cependant encore sept, ou huit théorêmes assès compliqués: & si, comme je n'en doute pas, la méthode syntetique que ces habiles Géomêtres y ont emploié, n'est pas susceptible d'une plus grande simplification; il faudra convenir que l'analyse dont je me suis servi contient seule le double avantage d'abréger & de faciliter la solution de ce Problême, & de nous y conduire en même tems d'une maniére toujours directe, & lumineuse.

SCHOLIE 2. J'ai averti au commencement de cet Article que la démonstration que j'allois donner de la composition des forces étoit également concluante, & rigoureuse, soit qu'on estimât les forces proportionelles aux masses aux quelles elles impriment des vitesses égales, ou qu'on voulût les estimer par les vitesses qu'elles feroient capables d'imprimer à une même masse: il suffira pour s'en convaincre de re-

lire cette démonstration, en substituant au mot *Force* ceux de *Masse*, ou de *Vitesse*.

En effet si on a deux masses $= a$, animées de vitesses égales (*fig.* 1. *plan.* IV.) dans les directions CA, CB, & qu'on cherche la quantité & la direction de la masse qui animée de la même vitesse leur feroit équilibre, on trouvera (comme dans le *lemme*) que cette direction sera MC, & que la quantité de la masse sera exprimée par a *fonct.* φ. On verra ensuite que le raisonnement du Prob. 1. n'est apuié, que sur ces deux principes, savoir que $y = 2$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$: or ces deux propositions sont évidentes pour le cas dont il s'agit, puisque la premiére ne signifie autre chose, si non que deux masses $= a$ animées d'une vitesse quelconque sont équilibre à deux autres masses aussi $= a$, & animées de la même vitesse dans une direction opposée: & la seconde que deux corps égaux animés de vitesses égales en sens contraire n'ont besoin de l'action d'aucun autre corps pour se faire équilibre.

On verra de même (*lemme*) que si un corps quelconque C est sollicité en même tems par deux vitesses $= a$, dans les directions CA, CB, il restera en repos si on lui suppose en même tems une autre vitesse $= a$ *fonct.* φ dans la direction MC, & qu'enfin on a posé avec raison dans le prob. 1, $y = 2$ quand $\varphi = 0$, & $y = 0$ quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$; puisqu'il est évident que le corps restera en repos, s'il est animé de vitesses égales en sens contraire, savoir des vitesses $2a$ dans le premier cas, & des vitesses a dans le second.

Si l'on fait les mêmes réflexions sur le raisonnement géométrique du prob. 2., on verra qu'il prouve aussi en toute rigueur; (*fig.* 3. *planche* IV.);

1.° Que si, l'angle DCB étant droit, on fait $DCG = \theta$, &

qu'on-

qu'on imagine une maſſe $= m \times cof.\ \theta$ animée d'une viteſſe quelconque dans la direction *DC*,& une autre maſſe $= m\ fin.\ \theta$ animée de la même viteſſe ſelon *B C*, & finalement une maſſe $= m$, qui ait encor cette même viteſſe dans la direction *C G*, ces trois maſſes ſe feront équilibre.

2° Qu' un corps quelconque *C* reſtera en repos, s' il eſt en même tems ſollicité par trois viteſſes différentes u, $u \times cof.\ \theta$, $u \times fin.\ \theta$ dans les directions *C G*, *D C*, *B C*.

I I I.

Du principe de l' équilibre.

Soit qu' on conſidére les forces comme les cauſes du mouvement des corps, ou ſimplement comme l' expreſſion abrégée de ces mouvemens mêmes: il eſt toujours viſible que nous ne ſaurions les exprimer que par une fonction du corps mû, & de la viteſſe avec laquelle il ſe meut; la force, ou le mouvement d' une maſſe m animée d' une viteſſe u ſera donc *fonct.* (m, u); il s' agit dans cet article de trouver la valeur de cette fonction, ou ce qui revient au même, étant donnée une maſſe m animée de la viteſſe u, il faut trouver la viteſſe dont une autre maſſe M devroit être animée en ſens contraire pour qu' il y eut équilibre.

Lemme. Si un corps *C* (*fig.* 5.) eſt animé en même tems de la viteſſe V dans la direction *A C*, & d'une autre viteſſe $= u$ ſelon *B C* perpendiculaire à *A C*, & que deux autres corps *D* & *E* lui réſiſtent en même tems, ſavoir *D* ſelon *D C* avec la viteſſe $= d$, & *E* dans la direction *E C* avec une viteſſe $= e$, je dis que le corps *C* agit ſur *D* avec toute ſa viteſſe u, & fait ſur lui le même effet que s' il étoit animé de la ſeule viteſſe u, & que *E* n' exiſta pas; c'eſt

à dire que si ces trois corps étoient en équilibre, cet équilibre subsistoit encor entre D & C, si on anéantisoit le corps E, & la vitesse V de C. En effet la vitesse V du corps C étant dans la direction $A\ C$ perpendiculaire à $D\ B$, elle ne sollicite pas plus le corps C dans la direction $C\ B$ que selon $C D$, & est par conséquent incapable d' augmenter ni d'altérer son action sur D. On en dira de même du corps E qui tend aussi à donner à C une vitesse perpendiculairement à $D Q$

PROBLÉME. *Trouver le rapport des vitesses de deux masses qui se font équilibre.*

Soient deux corps P, Q (*fig.6.*) chacun de masse $= m$, & animés de la vitesse $= u$ dans les directions contraire $P C$, $Q C$. il est évident que ces corps se feront équilibre en C. Qu'on fasse à présent l' angle $A C P = \theta$, & $A C B$ droit: on pourra substituer (*Art. II. Sch.* 2. *n.* 1) au lieu du corps P deux autres corps, savoir A de masse $= m \times cos.\ \theta$, agissant avec la vitesse u dans la direction $A C$, & B dont la masse $= m \times sin.\ \theta$ soit animée selon $B\ C$ d' une vitesse $= u$. On pourra de même imaginer (*Art. II. schol.* 2. *n.* 2.) que le corps Q au lieu de la vitesse u selon $C Q$ soit sollicité par une vitesse $= u \times cos.\ \theta$ selon $E C$, & par une autre vitesse $= u \times sin\ \theta$ dans la direction $D C$, sans que l' équilibre soit dérangé par l' une, ni par l' autre de ces suppositions; or (*lemme précédent.*) le corps C agit sur le corps A avec sa seule vitesse $u \times cos.\ \theta$, & l' équilibre subsistera entre m & $m \times cos.\ \theta$, si on suppose $m \times sin.\ \theta$ & $u \times sin.\ \theta$ annéantis; donc une masse $= m$ animée de la vitesse $u \times cos.\ \theta$ fait équilibre à une masse $m \times cos.\ \theta$ animée d'une vitesse $= u$ dans une direction contraire, & par conséquent, puisque $cos.\ \theta$ peut représenter une fraction quelconque, il il y aura toujours équilibre entre deux corps s'ils sont animés de vitesses réciproques à leurs masses. C. Q. F. T.

Co-

Corollaire. Il ſuit de là qu'une maſſe A animée de la viteſſe a fait équilibre aux maſſes B, C, D, &c. animées en ſens contraire des viteſſes b, c, d, &c., ſi $Aa = Bb + Cc. + Dd +$ &c. Car ſi on diviſe A dans les parties x, y, z, &c. proportionelles à Bb, Cc, Dd, &c. on trouvera $ax = Bb$; &c. On voit encore que pourvû que le produit MV de la maſſe d' un corps quelconque par ſa viteſſe demeure conſtant, ſon action, ou ſa force reſtera la même quelles que ſoient M & V, & que par conſéquent cette force que nous avons dit être une fonction de M & V ſera néceſſairement une fonction de MV. Donc pour le cas préſent la force de A ſera $\Psi\, Aa = \Psi(Bb + Cc + Dd +$ &c.$)$ comme nous l'avons fait voir: or l' action des corps B, C, D, &c. doit encore s' exprimer par $\Psi\, Bb + \Psi\, Cc + \Psi\, Dd +$ &c. on aura donc l'équation $\Psi\, (Bb + Cc + Dd) = \Psi\, Bb + \Psi\, Cc + \Psi\, Dd +$ &c. qui ne ſauroit ſe vérifier en général à moins que la fonction Ψ ne ſoit telle que $\Psi\, MV = MV$. D' où l' on tire que la force d' un corps en mouvement eſt toujours comme le produit de ſa maſſe par la viteſſe: conclusion que le dévélopement de la formule générale $\Psi\, (m, u\ cos.\ \theta) = \Psi\, (u,\ m\ cos.\ \theta)$ tirée du Problême précédent nous auroit également fourni.

Scholie I. La démonſtration que je viens de donner du principe de l' équilibre, pourroit paroître indirecte, & défecteuſe, parceque je la déduis d' une propoſition en apparence plus compoſée; mais peut-être en jugera-t-on autrement; ſi l' on réfléchit qu' une vérité ne ſauroit être ſimple à nôtre égard, qu' autant que nous la concevons moins confuſement, & avec plus de facilité, & que ce n' eſt que dans le cas ſeul, où un corps eſt animé de deux viteſſes dans des directions perpendiculaires entr' elles, qu' on voit clairement (*lemme*) qu'elles ne ſont pas modifiées l' une par l' autre. On rencontre d' ailleurs trés-fréquemment en géométrie

métrie des exemples de passages semblables, & (pour citer ici quelque chose d'analogue à mon sujet) de très-grands hommes n'ont pas fait difficulté de tirer l'équilibre du levier droit de celui du levier courbe. Quoiqu'il en soit au reste de la méthode que j'ai suivie, il est au moins certain qu'elle est à l'abri de toutes les difficultés qu'on pouvoit former contre les preuves, sur les quelles cette proposition étoit apuiée jusqu'à présent; preuves qui ont paru si peu convaincantes, que plusieurs habiles Géomètres leur on préféré celles qu'on tire de l'expérience; & que quelques Philosophes ont osé avancer avec confiance que la méthode des Géomètres étoit absolument insuffisante pour fournir une démonstration de ce principe. *

Scholie 2. Il est visible que, puisque deux masses animées de vitesses en raison réciproque se font équilibre, si une masse A animée de la vitesse a soutient un effort quelconque, comme par exemple celui d'un ressort, la masse B avec la vitesse $\frac{Aa}{B}$ fera équilibre à la même force: & que par conséquent l'effet d'une force p sur deux corp A & B sera de leur donner des vitesses réciproques à leurs masses. C'est sur cette proposition qu'est fondée la formule générale $p\,dt = m\,du$; car quoiqu'il soit très permis de ne considérer, avec M. d'Alembert, la quantité p que comme un simple coéficient de dt, ce n'est cependant que d'après le principe que nous venons d'établir qu'on peut s'assûrer que ce coéficient doit être le même à chaque instant, quand une même force agit sur deux masses différentes.

Corollaire général. On peut conclure de tout ce que nous venons de démontrer, que les propositions qui font l'objet de la Méchanique ne sont pas moins certaines, &

moins

* *Recherches sur les élémens de la matière par M. Formey, &c.*

moins évidentes que celles que la Géométrie, où l'Algébre nous enseignent : Car cette science n'a aucun Problême, auquel on ne puisse appliquer avec succès le principe général qu'on trouve à la tête de la seconde partie du Traité de Dynamique de M. d'Alembert ; or il est visible que ce théoréme ne suppose absolument que les principes que nous avons établi ci-dessus d'une maniére exacte, & entiérement rigoureuse.

I V.

Du Levier.

LA composition des forces suffit comme l'on sait pour démontrer l'équilibre du levier, & réciproquement cette derniére proposition une fois prouvée, on peut facilement en déduire la composition des forces. Elle nous fournit d'ailleurs une démonstration fort-simple du principe des vitesses virtuelles, qu'on peut avec raison considérer comme le plus fécond & le plus universel de la Méchanique : tous les autres en effet s'y reduisent sans peine, le principe de la conservation des forces vives, & généralement, tous ceux que quelques Géomètres ont imaginés pour faciliter la solution de plusieurs Problêmes, n'en sont qu'une conséquence purement géométrique, ou plus tost ne sont que ce même principe réduit en formule. La démonstration de l'équilibre du levier que je vais donner ici, sera donc une nouvelle preuve des principes que j'ai démontré directement dans les Articles précédens.

Lemme. Si (*fig.*7.) deux forces égales $= p$, (comme par exemple deux poids égaux) agissent dans des directions paralelles sur le levier *A B* aux points *A* & *B* également éloignés du point fixe *C*. Il est d'abord évident que le

le-

levier fera en équilibre autour du point C, puifque toutes chofes font égales de part, & d'autre: je dis de plus que le point C foutiendra le même effort, que fi les forces $p + p$ étoient immédiatement appliquée en C; car cet effort, ou la force qui leur feroit équilibre fi elle agiffoit en C dans une direction contraire, ne peut dépendre que de la quantité p, & fi l'on veut de la diftance CA que j'appelle x; cette force fera donc exprimée par *fonct.* (p, x), qu'on démontrera $= p$ *fonct.* x., comme dans le lemme de l'*Art. I.*

Qu'on faffe à préfent $CA = AE = BD$, & qu'on imagine quatre forces $= p$ appliquées en E, D, C, C, l'action de deux premiéres fur le point C fera $= p$ *fonct.* $2x$ par l'hipotéfe, & l'action des deux derniéres fera évidemment $= 2p$; or (*hip.*) les forces E & C font équivalentes à une force p *fonct.* x appliquée en A; & C, D font la même chofe que p *fonct.* x agiffant en B, & par conféquent les forces A, B font fur C l'effort $= p$ (*fonct.* $x)^2$: on a donc l'équation p (*fonct.* $x)^2 = 2p + p$ *fonct.* $2x$, qui ne fauroit fe vérifier en général à moins que *fonct.* x ne foit conftante, comme il eft aifé de s'en convaincre par le calcul, & puifque quand $x = 0$ on doit avoir *fonct.* $x = 2$, on aura généralement *fonct.* $x =$ *fonct.* $2x =$ *conft.* $= 2$; il fuit de là qu'une force $2p$ fait fur une verge quelconque le même effet que deux forces p appliquées fur la même verge à quelles diftances que ce foit du point où elle agit pourvu que ces diftances foient égales.

Probleme. *Trouver l'action d'une force quelconque* p *appliquée en* A *pour mouvoir le levier* E C, *autour de* C (*fig.* 8. *planche* IV.).

Cette action ne peut être exprimée que par une fonction de p & de la diftance $AC = x$, j'appelle cette fonction $\xi(p, x)$ & on verra comme ci-devant qu'elle fera $= p\,\xi\,x$: qu'on

qu'on faſſe à préſent $AD = AE = z$, il eſt viſible (*lemme*) que deux forces $= \frac{p}{2}$ appliquées en E & D font ſur la verge le même effet que p appliquée en A: or (*hip.*) l'action de la premiére ſur C, ſera $\frac{p}{2}\xi(x+z)$, & l'action de la ſeconde $\frac{p}{2}\xi(x-z)$: on aura donc l'équation

$$p\xi x = \frac{p}{2}\xi(x+z) + \frac{p}{2}\xi(x-z), \text{ ou}$$

$2\xi x = \xi(x+z) + \xi(x-z)$ qui doit être vraie quelle que ſoit z: ſi l'on fait donc z infiniment petit, & qu'on dévélope la fonction ξ par les méthodes connues, on trouvera ($\xi' x$, $\xi'' x$, $\xi''' x$ *&c.* dénotant ſelon l'uſage ordinaire les différences ſucceſſives de ξx diviſées par dx)

$$\xi(x+z) = \xi x + \frac{z\xi' x}{2} + \frac{z^2\xi'' x}{2\cdot 3} + \frac{z^3\xi''' x}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$$

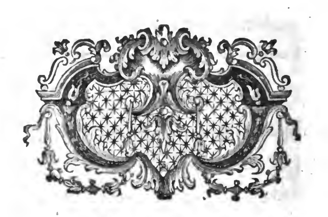
$$\xi(x-z) = \xi x - \frac{z\xi' x}{2} + \frac{z^2\xi'' x}{2\cdot 3} - \frac{z^3\xi''' x}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$$

& par conſéquent $2\xi x = \xi(x+z) + \xi(x-z)$

$$= 2\xi x + \frac{z^2\xi'' x}{3} + \frac{z^4\xi^{\text{IV}} x}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{z^6\xi^{\text{VI}} x}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \&c.$$

& réduiſant, $\frac{z^2\xi'' x}{3} + \frac{z^4\xi^{\text{IV}} x}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{z^6\xi^{\text{VI}} x}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \&c. = 0$; diviſant cette équation par $\frac{z^2}{3}$, on trouvera ſéparément $\xi'' x = 0$, $\frac{z^2\xi^{\text{IV}} x}{4\cdot 5} = 0$, &c.: la premiére donne en multipliant par dx, & intégrant $\xi' x = H$, & multipliant, & intégrant de nouveau $\xi x = Hx + K$: or comme la force p n'agit point ſur le levier pour le mouvoir quand elle eſt appliquées en C, ξx doit être $= 0$ quand $x = 0$: on

a donc généralement $K = 0$, & $\xi x = Hx$, & par conséquent si deux forces p & P sont appliquées aux deux extrémités du levier AB, sçavoir p en A à la distance $CA = x$ du point d'apui, C & P à la distance $CB = y$ du même point, leurs actions pour mouvoir le levier en sens contraire, que nous avons exprimées par $p \xi x$, & $P \xi y$, seront HPx, & Hpy, & il y aura par conséquent équilibre, quand $Hpx = HPy$, ou $px = Py$, ou bien $p : P = y : x$. C. Q. F. D.



ADDI-

ADDITION

A LA PREMIERE PARTIE DES

RECHERCHES SUR LA NATURE ET LA PROPAGATION DU SON

Imprimées dans le Volume précédent.

PAR M. DE LA GRANGE.

M. D' Alembert aïant fait l' honneur à ma ſolution du Problême des *Cordes vibrantes*, de l' attaquer ſur quelques points, par un Ecrit particulier imprimé dans le premier Tome de ſes *Opuſcules Mathématiques*; je vais ajouter ici de nouveaux éclairciſſemens ſur l'analiſe de cette ſolution, qui ſerviront en même tems de réponſe aux objections de cet illuſtre Géomètre, & de confirmation à ma Théorie.

I.

La ſolution en queſtion n' eſt qu'une application de la formule trouvée dans le Chap. III., pour le mouvement d' un fil chargé d' un nombre quelconque $m - 1$ de poids, au cas ou l' on ſuppoſe ce nombre infini; c' eſt cette application qui a paru à M. d' Alembert ſuſceptible de pluſieurs difficultés.

1.° La formule, dont je viens de parler, étant compoſée d' une ſuite de termes qui renferment ſucceſſivement les *ſinus* de tous les arcs $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ *&c.* juſqu' à $\frac{(m-1)\pi}{4m}$; j'ai pris dans le cas de $m = \infty$ ces arcs mêmes pour les valeurs de leurs *ſinus*. M. d'Alembert m' objecte que cela n' eſt permis que pour tout angle

 $r\pi$,

$\frac{r\pi}{4m}$, r étant un nombre fini, & nullement pour les angles $\frac{(m-1)\pi}{4m}$, $\frac{(m-2)\pi}{4m}$ &c. Cette objection prise en elle-même est solide & sans réplique ; mais elle perd toute sa force si on la considére par rapport à la formule dont il s'agit ; car je vais prouver directement & invinciblement que les expressions sin. $\frac{\pi}{4m}$, sin. $\frac{2\pi}{4m}$ &c. sin. $\frac{(m-1)\pi}{4m}$ doivent être changées en $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, &c. $\frac{(m-1)\pi}{4m}$ dans le cas de $m = \infty$.

En remontant à l'analise du Chap. cité, il est aisé de trouver que toutes ces expressions viennent de l'expression générale $\pm 2\sqrt{e} \times$ sin. $\frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$ (*Art. XXI.*), qui est celle du coéficient R (*Art. XIX.*), ν étant un nombre quelconque entier depuis o jusqu'à m. Tout se réduit donc à prouver que, quand $m = \infty$, $R = \pm 2\sqrt{e} \times \frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$.

Pour y parvenir je remarque d'abord que $R^2 = e(k-2)$, (*Art. XIX.*) ; je vois de plus que la valeur de k dépend de cette condition que $M^\mu = \frac{a^\mu - b^\mu}{a-b}$ soit $= 0$, lorsque $\mu = m$, a étant $= \frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, & $b = \frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}$, (*Art. cité*) ; c'est-à-dire de l'équation

$$\frac{[\frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m - [\frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m}{2\sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}} = 0$$

ou

ou ſimplement

$$[\frac{k}{2} + \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m - [\frac{k}{2} - \sqrt{(\frac{k^2}{4} - 1)}]^m = 0.$$

Or $\sqrt{e} = m \times \frac{H}{T}$, (*Art. XXXV.*), $\frac{H}{T}$ étant une quantité finie ; donc $k = 2 + \frac{R^2}{e} = 2 + \frac{R^2 T^2}{m^2 H^2}$; mais R doit étre auſſi une quantité finie, comme il eſt aiſé de le voir par la nature même du calcul, donc $\frac{R^2 T^2}{m^2 H^2}$ ſera une quantité infiniment petite du ſecond ordre dans le cas où $m = \infty$.

Qu'on ſuppoſe $\frac{RT}{H} = f\sqrt{-1}$, enforte que $k = 2 - \frac{f^2}{m^2}$, & qu'on mette cette valeur de k dans l'équation ci-deſſus, il viendra

$$[1 - \frac{f^2}{m^2} + \sqrt{(- \frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4})}]^m -$$
$$- \frac{f^2}{m^2} - \sqrt{(- \frac{f^2}{m^2} + \frac{f^4}{4m^4})}]^m = 0;$$

équation, qui, en négligeant ce qui ſe doit négliger à cauſe de $m = \infty$, ſe réduit à celle-ci

$$(1 + \frac{f}{m}\sqrt{-1}) - (1 - \frac{f}{m}\sqrt{-1})^m = 0.$$

Or on ſait qu'une expreſſion telle que

$$\frac{(1 + \frac{f}{m}\sqrt{-1})^m - (1 - \frac{f}{m}\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}$$ devient, dans le cas de $m = \infty$, égale à ſin. f; donc l'équation qu'on vient de trouver eſt équivalente à $2\sqrt{-1} \times$ ſin. $f = 0$, ſavoir à ſin. $f = 0$; ce qui donne $f = \frac{\nu\pi}{2}$, ν étant un

nombre

nombre quelconque entier; donc $\frac{RT}{H} = \frac{\nu\pi}{2} \times \sqrt{-1}$,

donc $R = \frac{H}{T} \times \frac{\nu\pi}{2} \times \sqrt{-1} = 2\sqrt{e} \times \frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$.

2.° M. d'Alembert prétend que j'ai tort de regarder en général l'expression fin. $\frac{\pi}{2} (\frac{mx}{a} \pm \frac{mHt}{T})$ comme égale à zéro, lorsque $m = \infty$ (*Voïés Art. XXXVIII.*).

Je conviens que je ne me suis pas exprimé assès exactement, en disant que $m (\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T})$ est toujours égal à un nombre entier, parceque $m = \infty$; mais ma proposition n'en est pas moins vraie pour cela. Car on voit par *l'Art. XXXVI.* que $\frac{mx}{a}$ est mis au lieu de μ qui est de lui même un nombre entier; & à l'égard de $\frac{mHt}{T}$, il sera aussi un nombre entier, en regardant $\frac{Ht}{T}$ comme commensurable avec $\frac{x}{a}$; c'est-à-dire en supposant $\frac{Hdt}{T} = \frac{dx}{a}$; supposition qui est évidemment permise, & qui n'apportera pas la moindre limitation à ma solution.

3.° M. d'Alembert attaque aussi les calculs que j'ai fait dans le Chap. VI. pour trouver d'une maniére directe & générale la somme d'une suite infinie, telle que fin. ϕ $\times$ fin. θ + fin. $2\phi \times$ fin. 2θ + &c.

La méthode que j'ai emploïée dans cette recherche est très-simple; après avoir transformé la suite proposée en deux autres composées de simples *cosinus*, j'ai mis à la place de chacun de ces *cosinus* son expression exponentielle imaginaire, & j'ai cherché la somme de suites résultantes, par la méthode ordinaire de la sommation des series

géo-

géométriques, en ſuppoſant le dernier terme nul comme on le fait communement lorſque la ſerie va à l' infini. M. d' Alembert m' objecte que cette ſuppoſition n'eſt point exacte, parceque dans la ſuite $e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}}$ *&c.* le dernier terme eſt $e^{\infty\sqrt{-1}}$ quantité qui eſt infinie au lieu d' être zéro.

Or je demande ſi toutes les fois que dans une formule algébrique, il ſe trouvera par exemple une ſerie géométrique infinie, telle que $1 + x + x^2 + x^3 +$ *&c.* on ne ſera pas en droit d' y ſubſtituer $\frac{1}{1-x}$, quoique cette quantité ne ſoit réellement égale à la ſomme de la ſerie propoſée qu'en ſuppoſant le dernier terme x^∞ nul. Il me ſemble qu'on ne ſauroit conteſter l' exactitude d' une telle ſubſtitution ſans renverſer les Principes les plus communs de l' Analiſe.

M. d' Alembert apporte encore un argument particulier pour prouver que la ſomme de la ſuite cof. $x +$ cof. $2x$ $+$ cof. $3x +$ *&c. à l' infini* ne peut pas être $-\frac{1}{2}$ comme je l'ai trouvée par mon calcul. Il ſuppoſe $x = 45°$, & il trouve que cette ſuite devient $\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{2}}, +1$ *&c.* après quoi elle recommence: *or* (dit-il) *la ſomme de cette ſuite finie eſt, ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ſelon qu'on y prendra plus ou moins de termes. Donc la ſomme de la ſuite entière eſt auſſi ou* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ou* 0, *ou* -1, *ou* $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, *ſelon le nombre des termes qu'on y prendra, quel que ſoit d' ailleurs ce nombre de termes fini ou infini, & cette ſomme ne ſera point* $= 0$,

$= 0$, *à moins que* m $\times$ 45° *ne soit* $=$ *à une infinité de fois la circonférence*, *ou* 135° $+$ *une infinité de fois la circonférence*.

Je répons qu'avec un pareil raisonnement on soutiendroit aussi que $\frac{1}{1+x}$ n'est point l'expression générale de la somme de la suite infinie $1 - x + x^2 - x^3 + \&c.$ parcequ'en faisant $x = 1$ on a $1 - 1 + 1 - 1 + \&c$ ce qui est ou 0, ou 1, selon que le nombre des termes qu'on prend est pair, ou impair, tandis que la valeur de $\frac{1}{1+x}$ est $\frac{1}{2}$. Or je ne crois pas qu'aucun Géométre voulût admettre cette conclusion.

I I.

Quand même les objections auxquelles nous venons de répondre seroient fondées, M. d'Alembert ne pourroit pas se dispenser de convenir que les résultâts de ma Théorie sont nécessairement exacts dans les cas où ces résultâts s'accordent avec ceux qu'il a trouvés par la sienne; ce qui arrive quand la corde a une certaine figure au commencement du mouvement. Or toutes les objections que M. d'Alembert m'a faites jusqu'ici sont absolument indépendantes de la figure initiale de la corde; donc, puisque ses objections n'empêchent point ma solution d'être exacte lorsque cette figure a certaines conditions, elles ne l'empêcheront pas non plus d'être exacte en général, quelle que soit la figure initiale de la corde.

Ce raisonnement est simple, & ne peut pas avoir echappé au savant Géometre dont nous parlons; aussi s'est-il attaché dans la suite à combattre seulement la généralité de ma solution, & à la borner comme la sienne aux courbes assujetties à la loi de continuité. Il se fonde sur ce que j'ai

j'ai fait usage de la méthode de M. Bernoulli pour trouver la valeur d'une quantité qui dans certains cas est $\frac{o}{o}$, méthode qui suppose que la quantité proposée soit une fonction algebrique.

Mais je le prie de faire attention, que dans ma solution, la détermination de la figure de la corde à chaque instant dépend uniquement des quantités *Z* & *V*, lesquelles n'entrent point dans l'opération dont il s'agit. Je conviens que la formule à laquelle j'applique la méthode de M. Bernoulli est assujettie à la loi de continuité; mais il ne me paroit pas s'ensuivre, que les quantités *Z* & *V* qui constituent le coéficient de cette formule le soient aussi, comme M. d'Alembert le prétend.

I I I.

Je viens maintenant aux difficultés que M. d'Alembert a faites contre la Théorie de M. Euler, & qui peuvent aussi s'appliquer à la mieme: ce sont celles qui regardent la construction que M. Euler a donnée pour trouver la figure de la corde à chaque instant; construction qui est précisément la même que celle qui résulte de ma Théorie. *Voïés l'Art. XL.*

1.° M. d'Alembert prétend que cette construction ne peut satisfaire à l'équation de la corde vibrante $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ à moins que la courbe initiale *A M B* (*fig. A plan.* 3.) ne soit telle que les fleches $r''\omega$, $r'o'$ de deux arcs consécutifs, & infiniment petits $\rho''R'$, $R'\rho'$, soient égales; où, ce qui est la même chose, que la courbure au point r'' soit la même que le courbure au point r' infiniment proche; ce qui exclut déja toutes le courbes dans lesquelles le rayon

T t oscu-

osculateur change brusquement en quelque point. Voici le raisonnement de M. d' Alembert.

Soit pris (dit-il dans le §. VII. du Mémoire *sur les vibrations de Cordes sonores* imprimé dans le même volume) $AP = x$ (fig. citée) $PT = t$ *sur l'axe* A B; *donc regardant* x *comme constante*, & *faisant* $PT' = PT$, $Tt = t\theta = T't' = t'\theta' = dt$, *on aura* $AT = x + t$, $At = x + t + dt$, $A\theta = x + t + 2\,dt$, $AT' = x - t$, $At' = x - t - dt$, $A\theta' = x - t - 2\,dt$. *Or* y *étant égale, suivant la construction de M. Euler, à la demie ordonnée* T R *qui répond à* $x + t$ *plus à la demie ordonnée* T'R' *qui répond à* $x - t$, *il s' ensuit que* d^2y *en ne faisant varier que* t *est* $\frac{\theta\rho - tr - (tr - TR)}{2} + \frac{\theta'\rho' - t'r' - (t'r' - T'R')}{2}$;

donc $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta\rho + TR - 2\,tr}{2\,T\,t^2} + \frac{\theta'\rho' + T'R' - 2\,t'r'}{2\,1\,t^2} =$ (*en menant les cordes* $R\rho$, $R'\rho'$) $\frac{-ro - r'o'}{1\,t^2}$. *Maintenant faisons* t *constante* & $= PT$, & x *variable*; *prenons* $Pp = p\pi = dx$, & *supposons* $dx = Tt$, *ce qui est évidemment permis*, *nous aurons* 1.° $At = x + t + dx$, $A\theta = x + t + 2\,dx$; 2.° *Faisant* $T't'' = t''\theta'' = Pp = Tt$, *nous aurons* $At'' = x + dx - t$, $A\theta'' = x + 2\,dx - t$; *donc*, *menant la corde* $R'\rho''$, *on trouvera que* d^2y, *en ne faisant varier que* x, *est* $- ro - r''\omega$; *donc* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ro - r''\omega}{Pp^2}$. *Il faut donc*, *pour que* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *soit égal à* $\frac{d^2y}{dt^2}$, *que* $r'o' = r''\omega$.

Je réponds que, dans l'équation générale $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, d^2y (en ne faisant varier que x) est la différence seconde de trois ordonnées consécutives, dont l'une répond à l'abscisse

x

$x - dx$, l'autre à l'abſciſſe x, la troiſiéme à l'abſciſſe $x + dx$, & que d^2y (en ne faiſant varier que t) eſt la différence ſeconde de trois ordonnées répondantes à la même x, la premiére pour le tems $t - dt$, la ſeconde pour le tems t, la derniére pour le tems $t + dt$; comme M. d'Alembert lui même le dit dans le §. X.; qu'ainſi la valeur de d^2y (en ne faiſant varier que t) ſera, ſuivant la conſtruction de M. Euler & la mienne, $\frac{tr - TR - (TR - y\zeta)}{2}$ [en tirant l'ordonnée $y\zeta$ telle que $yT = Tt$] $+ \frac{t'r' - T'R' - (T'R' - t''r'')}{2} = \frac{tr + y\zeta - 2TR}{2} + \frac{t'r' + t''r'' - 2T'R'}{2} =$ (en menant les cordes ζr, $r''r'$) $\frac{-Rx - R'x'}{2}$; & que la valeur de d^2y (en ne faiſant varier que x) ſera $\frac{tr - TR - (TR - \zeta y)}{2} + \frac{t''r'' - T'R' - (T'R' - t'r')}{2} = \frac{-Rx - R'x'}{2}$; donc $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Rx - R'x'}{2Pp^2} =$ (en ſuppoſant $Tt = Pp$) $\frac{-Rx - R'x'}{2Tt^2}$; & l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ devient identique.

2.° M. d'Alembert prétend enſuite que la courbure doit être nulle aux extrémités A & B. *Car ſoit* (dit-il, dans le §. VIII.) PT, *&* PT' = AP, *on a* (*en ne faiſant varier que* t) $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\theta p + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's' - 2L'Q'}{2Tt^2} = \frac{-ro + Q'q'}{Tt^2}$, *& non pas* $\frac{-ro - Q'q'}{T^2t^2}$ *parceque* $l's' - 2Q'L' = -2Q'q'$, *& que* $l's'$ *&* $Q'L'$ *doivent être priſes négativement par leur poſition, & par la conſtruction de M. Euler.*

 Main-

Maintenant, en ne faisant varier que x, *on aura* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-ro-Qq}{T\,dt^2}$; *donc* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *ne sera pas* $= \frac{d^2y}{dt^2}$, *si la courbure n'est pas nulle en* A.

Ce raisonnement est semblable à celui, auquel je viens de répondre, & se refute par conséquent de la même maniére. En effet la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ au point *A* n'est pas $\frac{\theta\rho + TR - 2tr}{2Tt^2} + \frac{l's' - 2L'Q'}{2Tt^2}$, comme le suppose M. d'Alembert, mais $\frac{tr + zy - 2TR}{2Tt^2} + \frac{L'Q' + QL}{2Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, parceque $L'Q'$ étant égale, & de position contraire à QL, suivant la construction de M. Euler & la mienne, on a $L'Q' + LQ = 0$; de même la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est $\frac{tr + zy - 2TR}{2Tt^2} + \frac{LQ + L'Q'}{Tt^2} = \frac{Rx}{2Tt^2}$, & non pas $\frac{-ro-Qq}{Tt^2}$; donc $\frac{d^2y}{dt^2}$ est toujours $= \frac{d^2y}{dx^2}$ quelle que soit la courbure en *A*.

3.° Autre argument de M. d'Alembert pour prouver que la courbure doit être uniforme dans chaque portion infiniment petite de la courbe *AMB*. Il donne à la différence *dt* deux valeurs différentes à volonté, & il trouve que pour que la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$ soit toujours la même & égale à celle de $\frac{d^2y}{dx^2}$, il faut que les fléches *ro*, qui appartiennent à différens arcs infiniment petis *Rrρ* soient toujours proportionelles aux quarrés des portions correspondantes *Tθ* de l'axe; ce qui ne peut avoir lieu, que dans des arcs de courbure uniforme, comme M. d'Alembert le démontre fort au long dans le §. X. de son Mémoire.

A cela je répondrai qu'il n'est nullement nècessaire, pour la généralité de ma solution, que les différences dt demeurent indeterminées & puissent être supposées quelconques ; comme je l'ai déja remarqué plus haut (*n.* 2 *Art. I.*). Il me suffit qu'on prenne toujours $dt = \frac{T}{Ha} dx$, ou, en supposant avec M. d'Alembert $\frac{Ha}{T} = 1$, $dt = dx$; car, comme dx peut être pris aussi petit qu'on voudra, il est évident qu'on n'en trouvera pas moins la figure de corde au bout d'un tems quelconque donné t.

4.° M. d'Alembert apporte de plus une raison métaphysique pour faire voir en général que le mouvement de la corde ne peut être représénté par aucune construction quand la courbure fait un saut en quelque point M de la courbe initiale. *C'est* (dit-il dans le §. *XI.*) *que dans ce cas il y a proprement au point* M *deux rayons osculateurs différens, quoique coincidens quant à la direction, dont l'un appartient à la portion de courbe MR, & l'autre à la portion de courbe* M A. *Or la force accéleratrice en chaque point de la corde étant en raison inverse du rayon osculateur, lequel de deux rayons communs au point* M *doit servir à déterminer la force en ce point* M? *C'est ce qu'il est impossible de fixer, & il l'est par conséquent aussi de résoudre le Probleme dans ce cas-là. En effet supposons que la figure initiale de la corde soit composée de deux différentes courbes ainsi reunies en* M; *je demande quelle est la force acceleratrice du point M, lorsque la corde commence à se mouvoir?*

La réponse est bien simple ; la courbe AMB étant continue, il est clair qu'on peut toujours prendre, à quelque point R que ce soit, trois ordonnées consécutives, & infiniment proches ρy, RT, rt; or les différences de ces trois ordonnées constituent la valeur de d^2y, à laquelle la force accélératrice du point du milieu R est nécessairement pro-

por-

portionelle par la nature du Problême, quel que soit d'ailleurs le rayon osculateur en ce point.

5.° M. d'Alembert fait voir dans le même §., que si la courbure n'etoit pas nulle en *B*, il s'ensuivroit de la construction de M. Euler, & de la mienne qu'il y auroit un saut dans le $\frac{d^2y}{dt^2}$ qui répond a un point quelconque *M* lorsque $t = PT$, savoir que sa force accélératrice passeroit brusquement, & sans dégrés de la valeur qu'elle a en cet instant à une autre valeur, qui différeroit de celle-là d'une quantité du même ordre; ce qui seroit contraire à la nature de la force accélératrice.

Je réponds que cet inconvénient auroit lieu en effet, si les forces accélératrices qui agissent sur chaque point de la corde à chaque instant avoient une valeur finie; mais dans nôtre cas ces forces sont toujours infiniment petites, puisque on suppose dy infiniment petit, par raport à dx; par conséquent l'accroissement de la force du point *M* sera aussi infiniment petit; ce qui n'a plus rien de choquant.

6.° M. d'Alembert ajoute encore une nouvelle considération, pour prouver que le mouvement de la corde ne peut être soumis à aucun calcul analitique quand la courbure est finie en *A*, & *B*. *Qu'on se représente* (dit-il §. XII.) *la corde au commencement de son mouvement; si la courbure n'est pas nulle en* B *le rayon osculateur y sera donc fini; par conséquent la force accélératrice y sera aussi finie, & tendra à donner du mouvement au point* B; *cependant ce point étant fixement arrêté, est incapable de se mouvoir; ainsi d'un côté* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *est finie lorsque* $x = AB$, *& lorsque* $t = 0$, *& de l'autre* $\frac{d^2y}{dt^2}$ *est toujours* $= 0$ *au point* B *quelle que soit la valeur de* t...... *La nature en ce point arrête, pour ainsi dire, brusquement le calcul; on a deux forces accélératrices voisines, & infini-*

infiniment peu différentes ; l'une au point B, l'autre au point infiniment proche de celui-là ; la seconde de ces forces produit un mouvement, la premiére n'en sauroit produire, quoique par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ *elle paroisse devoir en produire un, lorsque* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *n'est pas* $= 0$ *; ainsi la loi du mouvement n'étant pas continue pour tous les points de la courbe ne peut être représentée avec exactitude par l'équation dont il s'agit.*

A cela je réponds 1.° Qu'il ne me paroit nullement exact de dire que la force accélératrice est finie en *B*, & tend à donner du mouvement à ce point. Car il est facile de voir que les points *A* & *B*, par où la corde est attachée, ne sont réellement sollicités par aucune force accélératrice perpendiculaire à l'axe ; mais simplement tirés par la force de tension de la corde, laquelle agit presque dans la direction même de l'axe, & qui doit être détruite par l'hypotése du probléme. 2.° Sans m'embarrasser de la valeur, quelle qu'elle soit, du rayon osculateur en *A* & *B* je considére que le $\frac{d^2y}{dx^2}$ qui répond exactement à ces points est toujours nul de lui même, suivant ma construction, comme on l'a fait voir plus haut. D'où je conclus que le calcul est parfaitement d'accord avec la nature.

Voilà les principales objections de M. d'Alembert sur la construction que M. Euler & moi avons donnée pour le mouvement des cordes vibrantes. Il me paroit d'y avoir pleinement satisfait, & d'avoir montré en même tems que cette construction a toute la généralité dont la question est susceptible.

Quant aux autres difficultés que M. d'Alembert propose dans le même *Mémoire* contre la Théorie de M. Euler, & qui sont tirées de la considération des fonctions algébriques ; il est clair qu'elles ne touchent point à ma solution ; mais ser-

servent seulement à confirmer ce que j'avois déja avancé (*Art. XV.*) sur l'insuffisance de la méthode de ces deux grands Géomètres, pour conduire à une Théorie exacte & complette du mouvement des cordes sonores.

Au reste, quelque générale que soit la solution que j'ai trouvée de cet important Problême, je suis bien éloigné de penser qu'elle puisse donner le vrai mouvement de la corde, quand sa figure initiale est composée de deux, ou plusieurs lignes qui font des angles entr' elles; car il est évident que l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ne sauroit avoir lieu dans ces cas. Mais il est certain d'autre part, & l'on peut même s'en assurer par l'expérience, que la roideur de la corde, & l'action réciproque de toutes ses parties l'obligeront de prendre aussi-tôt une figure courbe continue, à laquelle on pourra par conséquent appliquer notre construction générale de l'*Art. XLV.* Les vibrations qui suivront les premiers instants, & qui sont les seules qu'il nous importe de connoître, seront donc toujours réguliéres & isochrones, & leur durée ne dépendra en aucune maniére de la figure primitive, mais seulement de la tension, de la longueur, & de la grosseur de la corde, comme on l'a démontré (*Art. XLVI.*); ce qui suffit pour expliquer, pourquoi une corde frappée d'une maniére quelconque rend toujours le même son.

ÉCLAIR-

ÉCLAIRCISSEMENS

Pour le Mémoire ſur les quantités imaginaires inſéré dans le premier Volume

PAR MR. DE FONCENEX.

J'Ai donné dans le premier Volume un Ecrit, où je traite aſsès au long des logarithmes des quantités négatives. Cette matiére, qui avoit déja été le ſujet d'une controverſe fort-vive entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli, a été ſavamment approfondie par le célébre Mr. Euler dans le *Mémoires de l'Académie Royale de Pruſſe pour l'année* 1749. Cet habile Géomètre y fait voir par une méthode, dont j'ai taché de donner un précis dans l'écrit dont il s'agit, que les nombre poſitifs ont non ſeulement un logarithme réel, mais encore une infinité d'autres qui ſont imaginaires & ſemblables à ceux qu'il trouve pour les nombres négatifs corréſpondans: c'eſt ainſi que ce grand Géomètre ſatisfait à pluſieurs objections très-fortes que Mr. Bernoulli faiſoit contre le ſentiment de Mr. Leibnitz, & que ce dernier avoit plutôt éludées que réſolues.

Cependant la plus grande preuve de Mr. Bernoulli, tirée de la quadrature de l'hyperbole, étoit encore dans toute ſa force: c'eſt pourquoi, quand j'entrepris de traiter cette matiére, je crus devoir chercher dans l'hyperbole même une formule générale qui donnât tout d'un coup les logarithmes des quantités poſitives & négatives: un calcul aſſès ſimple me la fit découvrir, & elle s'eſt trouvée parfaitement ſemblable à celle de Mr. Euler; mais les concluſions que j'ai tiré de cette formule, & de pluſieurs autres conſidérations que j'ai détaillé dans mon Mémoire, ſont un peu différentes de celles de Mr. Euler. D'abord il me paroiſſoit

Uu prouvé

prouvé que les logarithmes des nombres négatifs pouvoient à la rigueur être considérés comme réels de même que ceux des nombre positifs, & que par conséquent la logarithmique a deux branches, l'une au-dessus, & l'autre au-dessous de l'axe; mais il me sembloit que ces deux branches n'étoient pas liées par la loi de continuité, ou au moins que les raisons qui l'auroient pût faire croire n'étoient pas convaincantes.

J'apprens qu'avant que Mr. Euler eusse publié ses recherches sur cette matiére, elle avoit déja été le sujet d'une dispute par lettres entre Mr. D'Alembert & lui. Dans les Opuscules que ce grand Géomètre vient de donner au Public, on trouve un savant Mémoire, dans lequel il établit sur de nouvelles preuves, que les logarithmes des quantités négatives sont réels, contre le sentiment de Mr. Euler: enfin il m'a fait l'honneur d'examiner dans une Ecrit particulier la théorie que j'avois proposée dans mon Mémoire. Les réflexions de cet illustre Matématicien ont réveillé ma curiosité sur cette matiére que des occupations d'un genre absolument différent, m'avoient empêché de suivre: & je soumets ici au jugement des Géomètres les nouvelles considérations que la briéveté du tems m'a permis de faire sur ce sujet assès délicat par lui-même.

On entend communément par *logarithmes* une suite de nombres en progression arithmétique quelconque, répondant chacun à chacun, à ceux d'une autre suite de nombres qui forment entr' eux une progression géométrique aussi quelconque; mais comme on peut toujours réduire les logaritmes à être les exposans des puissances successives d'un nombre e pris à volonté, en leur ajoûtant seulement une quantité constante, ou en changeant l'origine des x dans la courbe qui exprime le rapport des nombre à leurs log.: il est visible que ce n'est rien lever à la généralité de la définition que nous venons de donner, que de dire simplement que x sera le log. de y quand on aura l'équation $y = e^x$.

Et

Et il paroit d'ailleurs que c'est la seule façon dont on les considére dans le calcul.

Cela posé il est nécessaire de bien distinguer la question Arithmétique de la question Géométrique : car il me paroit évident que l'origine des log. numériques ne permet pas d'en donner aucun aux nombres négatifs, puisqu'à quelle puissance qu'on éleve le nombre e il ne sauroit résulter $= -e$.

Je sais bien qu'en faisant que e^{2m} réprésente un nombre quelconque on trouve $\sqrt{e^{2m}} = \pm e^{m}$, d'où l'on conclud que $2m$ étant le log. de e^{2m}, m doit aussi bien être le log. de $-e^{m}$, que de $+e^{m}$, mais si l'on s'en tient à la premiére origine de e^{2m}, comme nous le supposons ici, & qu'on veuille faire attention à la théorie des quantités négatives que Mr. D'Alembert a fort-bien dévélopé dans son Ecrit sur les logaritmes & dans l'Encyclopédie, on verra aisément que, puisque e^{2m} vient par la génération même des log. de la quantité $+e$ élevée à la puissance $2m$, & non pas de $-e$ élevé à cette puissance, on ne peut pas dire que $-e^{m}$ soit réellement la racine quarré de e^{2m}, mais seulement que $-e^{m}$ élevé au quarré produit une quantité égale au même nombre e^{2m} : ce qui ne suffit pas pour la question arithmétique, où on s'est contenté de raporter tous les nombre à l'indéterminé positif $+e$.

Cette théorie recevra encor un plus grand jour si on considére les logarithmes comme des nombres en progréssion arithmétique répondant à une progréssion géométrique : car après avoir choisi, par exemple la progréssion decuple 1, 10, 100 pour les nombres, & la progréssion naturelle 0, 1, 2, &c. pour leurs log. ; il est visible que la progréssion géométrique prolongée tant qu'on voudra ne nous fera jamais parvenir à des nombres négatifs. Envain diroit-on que les nombre négatifs peuvent entrer en proportion avec les nombres positifs ; car il est évident que la proportion ne sauroit affecter que la seule quantité, & que le signe

 + ou

+ ou − ne lui appartient point, mais signifie seulement la différente position des quantités qui en sont affectées, comme Mr. d'Alembert lui-même l'a remarqué. Les nombres 1, − 1, − 1, 1 ne forment donc pas plus une proportion que ceux-ci − 1, 1, 1, 1, & toute la différence qu'on y voit, c'est que dans la premiére suite le produit des extrémes est égal au produit des moïens, & non pas dans la seconde, ou pour m'exprimer plus exactement, ces produits sont égaux dans toutes les deux, mais affectés de signes contraires dans la seconde, ce qui ne change rien à la quantité, ni par conséquent à la proportionalité, dans les principes de Mr. d'Alembert même. Enfin quand même on voudroit que le produit des extrêmes étant égal au produit des moïens, les quantités formassent une proportion, cela ne serviroit pas encore au cas présent, où le premier terme de la progression doit être positif $= + e$, & le dernier, le nombre négatif dont on cherche le log., puisqu'il est visible qu'alors le quarré du terme moïen n'est pas même égal au produit des extrêmes.

Quant à la preuve qu'on prétend déduire de ce que les deux progréssions peuvent être quelconques, elle ne me paroit pas pouvoir s'appliquer ici, puisqu'il s'agit de déterminer le log. de − 2: les log. de 1, 2, 3, 4, &c. étant déja donnés, c'est-à-dire la progréssion dans laquelle on doit le trouver étant déja déterminée. C'est ainsi, par exemple, qu'on ne peut pas dire qu'à la même ordonnée d'une parabole, il réponde différentes absciſſes x, $x + a$, $x + b$ &c., quoiqu'on puisse toujours les lui rapporter en prenant l'origine de x à volonté.

On voit donc qu'à considérer les logarithmes arithmétiquement, & en les rapportant toujours à un nombre déterminé e, les nombres négatifs ne sauroient en avoir, & je crois devoir remarquer ici que c'est sous ce point de vüe que Mr. Leibnits, & même Mr. Euler les avoient considérés.

Telle

Telle étoit, dans leur premiére origine, la nature des logarithmes; mais les Géomètres ont bien-tôt cherché à transporter ces notions dans la Géométrie : or l'on sait qu'en pareil cas l'expréssion algébrique devient souvent plus générale qu'on ne le veut, & notre question se réduit à examiner s'il en a été ainsi dans la logarithmique.

L'équation de cette courbe est, comme on sait, $dx = \frac{dy}{y}$. Je crois d'avoir assés bien prouvé dans mon Mémoire que cette équation nous fait voir que la logarithmique a deux branches, & qu'elles sont même liées par leur expression transcendante, ce qui s'accorde avec le sentiment de Mrs. Bernoulli & d'Alembert; mais les raisonnemens par lesquels le premier de ces grands Géomètres prétendoit prouver l'entiére continuité de cette courbe, & même les nouvelles raisons que le dernier y a ajouté pour fortifier ce sentiment ne me paroissent pas entiérement concluantes.

En effet l'argument tiré de la quadrature de l'hyperbole que Mr. Bernoulli regardoit comme démonstratif, & sur lequel Mr. d'Alembert se fonde aussi le plus, pourroit servir également à établir une théorie contraire : car si on considére la courbe dont l'équation est $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, il est évident qu'elle ne s'étendra point du côté des x négatives, puisqu' alors $y = \frac{1}{\sqrt{-x}}$: qu'on suppose à présent que cette courbe fasse une révolution sur son axe, elle formera un solide dont l'élément sera $\frac{dx}{x}$, & cette solidité sera par conséquent exprimée par $l.x$; or puisque la courbe n'existe pas quand x est négative, le solide n'existera pas non plus, & par conséquent x négative n'a point de logarithme.

Je suis bien éloigné de vouloir conclure de là, & d'une infinité de raisonnemens semblables, qu'on peut aisément imaginer

giner, que la logarithmique n'a point de branche au-deſſous de l'axe ; mais il me ſemble que, puiſqu'en choiſiſſant à volonté différentes courbes génératrices pour les logarithmes, on peut en déduire des conſéquences directement oppoſées, nous ne devons pas faire beaucoup de fond ſur ces ſortes de raiſonnemens. Cela ſe raporte à ce que j'avois déja obſervé dans mon Mémoire, que l'intégration change toujours un peu l'équation différentielle au moins quant à ſa généralité.

Pour s'aſsûrer donc de la coexiſtance & de l'union des branches de la logarithmique, il eſt abſolument néceſſaire de s'abſtenir de toute intégration, & même des quadratures qui les ſuppoſent toujours ; voici un raiſonnement qui ne me paroit ſujet à aucun inconvénient.

Soit BP (*Fig.* * *pl. IV.*) la logarithmique, AQ ſon axe, $AD = x$, $DP = y$. On trouvera le raion de la dévéloppée qui appartient au point P, $PR = \frac{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{y}$ & par conſéquent $CR = \frac{2y^2 + 1}{y}$, $CD = 1 + y^2$, donc ſi on appelle $CD = u$, $CR = z$ on trouvera l'équation $z^2 = \frac{4u - 4u^2 - 1}{1 - u}$, qui à chaque valeur de $CD = u$ fournit toujours deux valeurs égales, & de ſignes différens pour $z = CR$; il ſuit delà que la dévélopée de la logarithmique a deux branches ſemblables l'une au-deſſus & l'autre au-deſſous de l'axe ; & que par conſéquent, non ſeulement il en eſt de même de la logarithmique, mais encore que ces deux branches forment une courbe continue.

Ce raiſonnement me paroit être démonſtratif, & ne laiſſer plus aucun doute ſur la continuité des deux branches de notre courbe, c'eſt donc inutilement que je cherchois dans mon Ecrit à trouver une différence entre la continuité

dans

des branches de l'hyperbole, & celle de ses aires, puisqu'elles sont aussi bien liées les unes que les autres : il est visible qu'on ne peut pas dire que l'aire qui appartient à l'x négative soit aussi négative, comme le supposoit le raisonnement de *l'Art.* 11.; je l'avois moi même remarqué un peu auparavant, & c'est avec raison que M. d'Alembert me le conteste, mais je ne saurois convenir avec lui que cela posé l'on ne pût en tirer les conséquences que j'en ai déduit : quoiqu'il en soit cette discussion est inutile ici, puisque nous convenons sur le fond de la question.

Mais que deviendra alors la formule $\varphi\sqrt{-1} = l.\ (coss.\ \varphi \pm fin.\ \varphi\sqrt{-1})$ trouvée par l'illustre Bernoulli, & que j'ai déduite dans mon Mémoire du rapport constant du secteur hyperbolique au secteur circulaire?

Je répons 1.° que cette formule peut s'exprimer un peu plus généralement en la changeant en celle-ci $\varphi\sqrt{-1} = l.\ (\pm\ coss.\ \varphi \pm fin.\ \varphi\sqrt{-1})$, & en choisissant les signes convenables pour les cas, auxquels on veut l'appliquer : comme je l'avois déja conclu dans mon Mémoire, de l'origine de cette même formule, aussi bien que de l'intégration directe de l'équation $dx = \frac{dy}{y}$ que j'ai donnée dans le même écrit, & qui est $y = m\,e^x$, où m est absolument arbitraire.

2.° Que si l'on veut dans notre formule conserver toujours les mêmes signes, on trouvera à la vérité des log. imaginaires pour les nombres négatifs, mais pourvû qu'on s'en tienne à l'expression algébrique, & qu'on n'en tire aucune conclusion avant que d'avoir transformé de nouveau la formule, on pourra s'en servir sans crainte d'erreur, comme l'usage continuel qu'on en a fait jusqu'ici le prouve suffisamment.

On peut lire dans mon Mémoire l'origine & le dénoüement de cet espéce de paradoxe; j'y ai remarqué que si on cherchoit une appliquée négative dans la branche supé-

rieure

rieure de la courbe qui appartient à l'équation $y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}$ qui en a évidemment deux égales, on la trouveroit imaginaire : il en est précisément de même dans notre formule $\varphi \sqrt{-1} = l. [x + \sqrt{(x^2 - 1)}]$, qui ne sauroit exprimer généralement tous les nombres en faisant seulement varier l' x, mais dans laquelle il faut tantôt se servir de $x + \sqrt{(x^2 - 1)}$ tantôt de $x - \sqrt{(x^2 - 1)}$.

Voilà je pense la vraie raison pour laquelle notre formule ne fournit que des imaginaires pour les log. des nombres négatifs, & je ne saurois accorder à Mr. d' Alembert qu'elle appartienne à une logarithmique dont la soutengeante est imaginaire, puisque Mrs. Bernoulli, Euler, & moi l'avons tous construite d' après cette supposition que le log. de 1 fût $= 0$, quoique par des procédés fort-différens.

Il est vrai que Mr. d'Alembert attaque le raisonnement géométrique sur lequel j'ai fondé la vérité de cette formule; parceque j'y suppose que les ordonnées du cercle étant toujours aux ordonnées de l'hyperbole comme $1 : \sqrt{-1}$, il en doit être de même de leurs secteurs : il objecte que la constante qu'on doit ajouter à l'une de ces intégrales, change la proportion de leurs élémens; mais il est visible qu'on n'a point à craindre ici un pareil inconvénient, puisque nous exprimons l'arc de cercle simplement par φ, & que l'intégration de l'hyperbole n'exige point de constante.

Un plus grand détail sur cette matiére me paroit inutile, & je me contente de renvoïer à mon Mémoire pour les conséquences qu'on peut déduire de cette théorie. J' ai, si je ne me trompe, prouvé ici suffisamment, que les logarithmes tels que Mrs. Leibnitz & Euler les ont considérés sont imaginaires pour les nombres négatifs : & d' un autre côté que la logarithmique a cependant deux branches, comme l'ont soutenu Mrs. Bernoulli & d'Alembert.

DE

DE L'INFINI ABSOLU

Considéré dans la Grandeur

PAR LE

P. GERDIL BARNABITE.

LE mot *infini* appliqué à la quantité peut être pris en deux ſens: tantôt il ſignifie une propriété eſſentielle à la grandeur, par laquelle on conçoit qu'elle eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution ſans fin; tantôt il exprime l'élévation actuelle d'une grandeur à la derniére période, pour ainſi dire, de l'augmentation, dont elle eſt ſuſceptible, où ſon abaiſſement juſqu'a la derniere période de ſa diminution poſſible. *Une quantité infinie* dit-on communément, *eſt celle qui a reçu tous ſes accroiſſements finis poſſibles: une quantité infiniment petite, celle qui a reçu tous ſes decroiſſements finis poſſibles.*

Locke diſtingue très nettement ces deux ſignifications. Il deſigne la premiere par le mot *d'infinité*, qu'il ſubſtitue à celui d'infini en puiſſance, emploïé par les anciens pour marquer qu'il n'eſt aucun terme qui borne l'augmentation, où la diminution poſſible de la grandeur. Il exprime la ſeconde par le mot ſimple *d'infini*, c'eſt à dire de l'infini abſolu & en acte: & il ajoute que cette ſorte d'infini dans la quantité eſt impoſſible à concevoir, *car*, dit-il, *une repetition à l'infini ne ſauroit jamais repréſenter l'infini.*

La premiere idée eſt très-claire. C'eſt une ſuite de la notion même de la grandeur; quelque augmentation que la grandeur ait reçuë, on conçoit, qu'elle peut être encore augmentée, & l'eſprit ne voit aucune borne à cette ſuite poſſible d'augmentation. Mais pour former la notion de

l'infini abſolu, il faudroit allier ces deux idées, qu'une ſuite d'augmentation ne peut avoir aucune fin, & que pourtant cette augmentation peut parvenir a ſon comble. Auſſi Chambers raiſonnant ſur les principes de Locke n'héſite pas de dire, que l'idée d'un nombre actuel infini eſt une abſurdité. (*a*)

Les anciens Géométres ſcrupuleuſement attachés à la rigueur de la démonſtration, & à la clarté des idées, qui en eſt inſéparable, ont heureuſement emploïé la premiere notion de l'infini dans leurs recherches, & en ont ſévérement écarté l'idée de l'infini abſolu, dont les réſultats paradoxes ſont plus faits pour étonner une imagination avide du merveilleux, que pour ſatisfaire un eſprit ami du vrai.

Cavalleri fut le premier qui oſa introduire dans la Géométrie l'infini ſous une forme nouvelle, en imaginant le continu composé d'un nombre infini de parties, qui ſont comme les derniers termes de la décompoſition qu'on peut en faire, en le partageant en tranches paralelles entr'elles, il conſidera ces derniers termes, comme les éléments du continu, & les appella *indiviſibles*. Mais M. de Montucla dans ſon excellente hiſtoire des Mathématiques obſerve que quoiqu'on ne puiſſe diſconvenir que Cavalleri s'énonce d'une maniere un peu dure pour des oreilles Géométriques, il eſt pourtant facile de reconcilier ſon langage avec la ſaine Géométrie, par l'interprêtation qu'il y donna luy même, lorſqu'il fut attaqué par Guldin, faiſant voir que ſa méthode n'eſt autre choſe, que celle d'exhauſtion des anciens, ſimplifiée. Le ſoin donc qu'il eut de diſſimuler l'infini, dont il faiſoit uſage, & de le maſquer le plus ſouvent ſous

(*a*) Le P. Jacquier dans ſes inſtitutions de Philoſophie parlant de l'infini mathématique dit qu'il eſt évident qu'une grandeur infinie répugne de ſa nature, & implique contradiction. Le P. Boſchovitz dans ſon traité des ſect. Con. p. 465. établit qu'il ne peut éxiſter aucune quantité qui ne ſoit finie.

ſous le nom plus doux en apparence d'indéfini, ne doit pas être regardé comme un ménagement néceſſaire pour introduire l'idée nouvelle de l'infini abſolu, ainſi que M. de Fontenelle voudroit le perſuader, mais plutôſt comme une précaution, dont il reconnut la néceſſité, pour faire ſentir, que ſa méthode pouvoit être aiſément ramenée aux idées exactes de la Géométrie.

On vit encore dans le même ſiécle la notion de l'infinité ſagement emploïée par d' habiles Maîtres ſe dévéloper plus, ou moins en différentes méthodes, dont l'heureuſe application aux recherches les plus difficiles avança extraordinairement les progrès de la Géométrie, & acquit une gloire immortelle à leurs inventeurs.

Enfin parut le calcul de l'infini qui fut en même tems & le point de réunion des Thèories qui l'avoient précédé, & le germe des brillantes découvertes qui l'ont ſuivi. L'infini ſoumis aux regles du calcul donna lieu de penſer aux perſonnes peu verſeés dans ces matiéres, qu'on connoit l'infini, ſelon l'expreſſion de M. Voltaire, comme dix & dix ſont vingt; & quelques Savants regarderent ce calcul comme une preuve convaincante de la réalité de l'infini abſolu, & de l'éxiſtence d'une infinité de différents ordres d'infini.

Cependant M. Dalembert, qui (au mot différentiel de l'Encyclop) a expliqué la métaphyſique de ce calcul avec autant de clarté, que de ſolidité, fait voir que la ſuppoſition qu'on y fait de quantités infiniment petites n'eſt que pour abréger, & ſimplifier les raiſonnements, qu'il ne s'agit point de quantités infiniment petites dans le calcul différentiel, mais uniquement de limites de quantités finies, qu'ainſi la métaphyſique de l'infini, & des quantités infiniment petites, plus grandes, ou plus petites les unes que les autres, eſt totalement inutile au calcul différentiel, où l'on ne ſe ſert du terme d'infiniment petit, que pour abréger les expreſſions.

Il remarque en même tems que si ce calcul a eu des ennemis dans sa naissance, c'est la faute des Géométres ses partisans, dont les uns l'ont mal compris, les autres peu expliqué.

M. Rolle qui fut un des plus ardents à le combattre, ne le rejetta, que parcequ'il ne pouvoit admetre la supposition de grandeurs infiniment petites. Rolle se trompoit en faisant dépendre le calcul de cette supposition, mais il ne se trompoit pas à rejetter la supposition en elle même.

Leibnitz n' ignorant pas sans doute la force des preuves que la Géométrie même pouvoit fournir contre ces sortes, de grandeur, reduisit ses infiniment petits à n'être que des incomparables, dans le même sens qu'un grain de sable seroit incomparable au globe de la Terre. Cette idée ne s'accorde guere à la vérité avec l'exactitude géométrique des calculs, mais elle fait voir du moins que Leibnitz étoit bien éloigné d'admettre cette sorte d'infini.

Newton, dont la Métaphysique sur ce point, dit M. Dalembert, est très-exacte, & très-lumineuse, est parti d'un autre principe, & il n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode de trouver les limites des rapports.

Il paroit donc bien prouvé que ni la synthése rigoureuse des anciens, ni l'analise sublime des modernes ne portent aucunement sur la supposition de quantités infiniment petites, & ne renferment rien qui tende à établir la réalité de l'infini absolu soit dans la quantité discrete, soit dans la quantité continuë.

Envain le célébre Fontenelle a entrepris d'élever, comme on dit, l'édifice de l'infini en établissant les différents ordres d'infinis, & d'infiniment petits. Cet édifice au jugement de M. de Montucla & des plus habiles Maitres, est plus hardi que solide.

J'ai

J'ai déja tâché dans la premiere de mes dissertations imprimées à Paris chez Chaubert de dévoiler le foible de cette Théorie, & je dois répéter ici, pour l'intérêt seul de la vérité, qu'aïant fait communiquer cette partie du manuscrit à un Géométre du premier ordre, il m'écrivit, que les principes que je combattois, étoient en effet très-faux, & tendoient à jetter du doute sur les verités de Géométrie; & au sujet d'une autre dissertation il m'ecrivit que j'avois réfuté avec grande raison les infinis indéterminables de M. de Fontenelle.

Cette recherche peut n'être pas entiérement inutile. Sans parler de la néceffité d'éloigner de la Géométrie des notions confuses, qui sous un appareil savant, couvrent quelque fois des paralogismes capables d'éblouïr, (*b*) je remarque simplement que l'infini dans la grandeur n'est pas seulement l'objet de la Géométrie; il est aussi quoique sous un autre point de vüe, du ressort de la Métaphysique. L'éclaircissement de cette question pourroit donc servir à former, pour ainsi dire, une nouvelle ligne de communication entre ces deux branches des connoissances humaines, l'impossibilité de l'infini absolu démontrée géométriquement fourniroit à la Métaphisique un principe lumineux, pour établir des vérités de la plus grande importance.

L'objet de ce mémoire est de présenter quelques preuves de cette impossibilité. Je les ai tirées 1. de la formation

(*b*) L'éditeur des œuvres de Maclaurin parlant de son traité des fluxions (vie de Maclaurin page XIII.) s'énonce en ces termes: „ on ne peut disconvenir que les termes d'infini, & d'infiniment petits ne soient „ devenus trop familiers aux Mathématiciens, & qu'on n'en ait abusé „ en Géométrie & en Arithmetique, soit en introduisant & palliant „ des absurdités réelles, soit en donnant a ces sciences un certain air „ misterieux, & affecté qu'elles ne doivent point avoir. Pour remédiér „ à ce mal qui alloit tous les jours en croissant, M. Maclaurin trouva „ qu'il étoit nécessaire, en démonstrant les principes des fluxions, de „ rejetter entiérement tous ces termes sujets à disputes, & de ne supposer que des quantités finies déterminables, telles que celles dont „ traite Euclide dans sa Géométrie. &c.

mation de la suite naturelle des nombres. Cette preuve servira aussi de réponse à la seule objection qu'on ait faite contre ma premiere dissertation. 2. de la notion élémentaire des lignes droites paralleles. 3. d'une propriétè de la Logarithmique. 4. des asymptotes de l'hyperbole. 5. des progressions croissantes infinies. 6. des progressions géométriquement decroissantes à l'infini.

Je puis m'être trompé sur le choix des preuves mais le sentiment des Géométres que je viens de citer, m'autorise a croire que je ne me suis pas trompé sur le fond de la question, en regardant l'impossibilité de l'infini actuel dans la quantité, comme une vérité susceptible de démonstration. Cela seul suffit pour remplir l'objet que j'ai en vüe, qui n'est point d'entrer dans des recherches difficiles de Géométrie, mais d'établir une vérité utile, ou du moins de faire naître à quelque habile Géométre la pensée de l'établir. La grace que j'ose demander aux lecteurs qui voudront bien jetter les yeux sur cet écrit, est de ne pas juger de la solidité de mes raisonnements sur l'exposé de chacune des preuves en particulier, au cas qu'ils y trouvent quelque difficulté, mais d'examiner la liaison de toutes les preuves entr'elles. Quelque effort que l'on fasse pour s'enoncer avec clarté, on ne peut empêcher que les expressions dont on est obligé de se servir dans des matiéres un peu abstraites, ne présentent un côté obscur, qui rend la pensée moins intelligible, & ce n'est qu'en tournant ses pensées & en les présentant sous différentes faces qu'on parvient à les caractériser avec assez de précision pour les faire entendre comme on les conçoit.

PRE-

PREMIERE PREUVE

Tirée de la formation de la ſuite naturelle des nombres.

J'Ai déja fait uſage de cette preuve tirée de la formation de la ſuite naturelle des nombres dans la diſſertation que je viens de citer. La ſeule objection qui me ſoit revenuë, c'eſt que n'ayant aucune idée de l'infini abſolu nous ne ſaurions démontrer ſi cet infini répugne où non.

Je ſens la néceſſité d'écarter avant tout cette objection, qui eſt d'autant plus à craindre qu'elle eſt plus vague.

Je dis donc que les preuves principales que j'ai emploïées dans mon eſſai de démonſtr., ne portent point ſur l'idée de l'infini conſidéré en lui même, mais ſur des rapports conſtants entre quantités finies, rapports qui étant eſſentiels à la ſuite naturelle des nombres, & ſubſiſtant invariablement dans tout le cours de cette ſuite, prouvent que tout nombre poſſible eſt néceſſairement fini.

C'eſt ainſi que l'on regarde comme démontrée la proprieté de l'aſymptote de pouvoir être prolongée à l'infini ſans jamais rencontrer la courbe dont elle approche continuellement, *de maniere* (ce ſont les termes de M. Dalembert au mot Aſymptote) *que ſa diſtance à cette courbe ne devient jamais zéro abſolu, mais peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée.*

Cette proprieté ſe déduit non de l'idée même de l'infini, mais d'un rapport conſtant entre des quantités finies, comme dans l'hyperbole entre la puiſſance de cette courbe, & tous les rectangles formés par une portion de l'aſymptote, & une droite tirée de l'aſymptote à l'hyperbole. Or cette propriété étant eſſentielle à l'hyperbole, l'invariabilité de ce rapport fait connoître évidemment que l'hyperbole & l'aſymptote peuvent être prolongées ſans fin, & que cependant elles ne peuvent jamais s'approcher de ſorte

que

que leur distance devienne absolument nulle. L'obscurité de l'idée de l'infini n'a jamais été un prétexte de douter de la solidité d'une démonstration fondée sur l'invariabilité connue d'un rapport qui toujours subsistant & toujours le même dans le prolongement indéfini de ces deux lignes, ne peut que donner toujours le même résultat.

Tel est le procédé que j'ai suivi dans mon essai sur tout pa. 23. & suiv. je vais y ajouter quelques éclaircissements

1. Soit un assemblage quelconque de termes ou d'unités, je dis que la suite naturelle des nombres est applicable à cet assemblage.

2. Et par conséquent tout nombre possible entre dans la suite naturelle & en fait partie.

3. C'est une propriété essentielle à la suite naturelle d'être formée par l'addition continuelle d'unité à unité.

4. En sorte que dans la suite naturelle tout nombre qui suit un autre nombre, ne peut le surpasser que d'une unité.

5. Tout nombre qui a un rapport fini à un nombre fini est nécessairement fini.

6. Sur ces principes je dis 1. que la suite naturelle des nombres peut être augmentée à l'infini par l'addition continuelle d'unités à unités, en sorte que quel que soit le nombre donné, on pourra toujours trouver un nombre plus grand. Cette proposition n'a pas besoin de preuves. C'est un axiome d'Euclide (arith. l. 1. apud Tacq.) *Quolibet numero potest sumi major.* Je dis 2. que dans cette progression tous les nombres possibles par lesquels on conçoit que la suite naturelle augmente à l'infini, auront toujours un rapport fini aux précédents, & qu'il n'est ainsi aucun nombre possible qui ne soit fini.

PREUVE

PREUVE.

COncevons la ſuite naturelle élévée à un nombre quelconque donné, il eſt évident que ce nombre quelque grand qu'on veuille l'imaginer, ſera un nombre fini, & qu'il pourra être encore augmenté. Or le nombre ſuivant ne pourra ſurpaſſer ce dernier nombre que d'une unité. Donc il aura un rapport fini à un nombre fini, donc ce nombre ſuivant ſera un nombre fini. Et comme ce rapport ſubſiſtera ſans fin dans tout le cours de la ſuite naturelle, tout nombre qu'on voudra y ajouter (quelque augmentation qu'on ſuppoſe qu'elle ait déja reçue) ne ſurpaſſera le nombre précédent que d'une unité; ce ſera donc encore un nombre fini. Or il n'eſt aucun nombre poſſible dans la ſuite naturelle, auquel ce raiſonnement ne puiſſe être appliqué. Donc tout nombre poſſible eſt néceſſairement un nombre fini; donc &c.

2. Dans la ſuite naturelle le nombre 2. eſt néceſſairement déterminé à être fini par le rapport qu'il a à l'unité qui le précéde, & par le même rapport il détermine le nombre 3. qui le ſuit à être fini. Ainſi le nombre 2. comme moyen eſt déterminé à être fini par ſon antécédent, & il détermine de même ſon conſéquent. Or dans la progreſſion naturelle tous les nombres poſſibles depuis l'unité ſont autant de termes moyens, qui ſe ſuccédent & ſe déterminent toujours ſelon la même loi. Donc l'unité déterminant le nombre 2. à être fini, & celui-ci ſon conſéquent 3. en vertu du même rapport, cette détermination doit s'étendre, autant que la progreſſion, & par conſéquent tous les termes de cette ſuite, ne peuvent qu'être finis.

3. Si la ſuite naturelle pouvoit s'élever à un nombre qui ne fut pas fini, il y auroit donc un nombre fini poſſible, qui ne ſeroit plus ſuivi d'un autre nombre fini, mais d'un nombre d'un ordre ſuperieur. Or il n'eſt aucun

 nom-

nombre fini possible, dont le conséquent ne doive être fini, puisqu'il ne peut surpasser que d'une unité son antécédent. Donc il n'est aucun nombre fini possible, qui ne soit suivi d'un autre nombre fini. Donc la suite naturelle ne peut jamais sortir du fini. Donc &c.

Réduisons ces raisonnements en deux mots. Tout nombre qui ne s'éléve que d'une unité sur un nombre fini, est un nombre fini. Or par une propriété constante de la suite naturelle, on trouve qu'en continuant le cours de cette suite à l'infini, chaque nombre qu'on y ajoute, ne s'éléve que d'une unité sur le nombre fini qui le précéde, & cela se trouve sans fin. Donc il n'est aucun nombre possible dans la suite naturelle qui ne soit fini.

Cette marche essentielle à la progression des nombres, fait ainsi dans tout le cours de la suite naturelle le même effet que l'égalité de la puissance de l'hyperbole, & des rectangles correspondants fait dans le prolongement indéfini de cette courbe & de son asymptote; de maniére que comme dans ce prolongement indéfini *la distance de l'asymptote à la courbe ne devient jamais nulle*, *ou zéro absolu*, selon l'expression de M. D'Alembert, ainsi dans le cours indéfini de la suite naturelle tout nombre qu'on ajoute aux autres nombres, ne devient jamais infini absolu, & de même que cette distance peut toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée sans jamais devenir zéro absolu, ainsi dans la suite naturelle on peut toujours ajouter un nombre plus grand qu'aucun autre nombre donné, sans pouvoir jamais parvenir à l'infini absolu.

J'ajoute que dans la quantité continuë, zéro absolu & l'infini absolu peuvent être considérés comme les limites du décroissement & de l'augmentation de la grandeur, de maniére cependant que la quantité ne peut jamais atteindre ces limites, ni coincider avec elles. La quantité continuë diminuë sans cesse par la division de ses parties; mais

mais quoique cette division possible n'ait point de bornes, & qu'elle puisse aller à l'infini, il est pourtant impossible que jamais elle réduise la quantité à zéro absolu. D'un autre côté la grandeur peut augmenter par une progression continuelle d'un à deux, de deux à quatre, & ainsi de suite; mais quoique cette progression n'ait point de bornes, & qu'elle puisse continuer à l'infini, elle ne pourra non plus jamais élever la grandeur à l'infini absolu. La marche d'une quantité finie vers zéro absolu, & vers l'infini absolu se trouve ainsi la même dans des directions opposées. Donc l'impossibilité démontrée de réduire une quantité finie à zéro absolu par une progression quelconque de décroissement, semble prouver l'impossibilité de l'élever à l'infini absolu par une progression opposée d'accroissement.

SECONDE PREUVE

Tirée des notions élémentaires de la Géométrie.

Soient les deux droites paralleles (*fig.* 1.) *A B*, *C D*, je dis que ces deux lignes peuvent être prolongées indéfiniment, de maniére pourtant qu'elles ne pourront jamais parvenir à l'infini absolu, ou en acte; je dis qu'on ne pourra jamais parvenir sur ces lignes à un point quelconque, dont la distance du point *A* puisse être supposée absolument infinie, & qu'une telle supposition renverse les principes les plus incontestables de la Géométrie.

1. Il est incontestable qu'on peut supposer en Géométrie deux lignes droites exactement paralleles, & qui étant prolongées à l'infini conservent toujours leurs parallelisme.

2. Il suit de cette supposition qu'aucun point de la ligne *A B*, à quelque distance qu'on le suppose du point *A* ne pourra jamais coincider avec aucun point de la li-

gne *C D*. Car ces deux lignes devant toujours conserver leur parallelisme par la supposition, elles seront toujours & dans tout le cours de leur prolongement à une égale distance l'une de l'autre.

3. Or je dis que de tels principes incontestables en Géométrie sont détruits par la supposition que les lignes *A B*, *C D*, puissent être prolongées jusqu'à l'infini absolu où actuel.

4. Si ces lignes peuvent être prolongées jusqu'à l'infini absolu, donc il y aura dans la ligne *A B*, des points qu'on pourra supposer être à une distance absolument infinie du point A.

5. Cela étant des points *C* & *E* de la ligne *C D* on pourra tirer les deux droites paralleles *C G*, *E B* aux points *G* & *B* supposés à une distance absolument infinie du point *A*, de maniére, qu'on aura un parallelogramme *C G B E* formé de deux droites finies *C E*, *G B*, & de deux infinies *C G*, *E B*.

6. Qu'on éléve maintenant sur le côté *E B* la perpendiculaire *T P* qui mésure la distance des deux côtés *C G*, *E B* où cette distance *T P* pourra être encore diminuée, ou elle sera absolument nulle?

7. Si la distance *T P* peut être encore diminuée, donc les points *G* & *B* peuvent encore être reculés de plus en plus sur la ligne *A B*; donc ces points ne sont pas encore à un éloignement infini du point *A*.

8. Si l'on fait la distance *T P* absolument nulle, donc la ligne *C G* doit coincider sur la ligne *E B*.

9. Or la ligne *C G* ne peut coincider avec la ligne *E B*, que celle ci ne coincide elle même avec la ligne *C D*. Car le point *u* venant à tomber sur le point *E*, il faut que toute la ligne *C G* tombe sur la ligne *C D*, & cela par les axiomes mêmes d'Euclide.

10.

10. Mais la ligne *C G* & la ligne *E B* venant ainsi à tomber & à coincider sur la ligne *C D*, il est évident que les points *G* & *B* de la droite *A B* doivent rencontrer l'autre parallele *C D*. Ce qui détruit la notion des paralleles établies sur les principes les plus incontestables de la Géométrie.

L'expression de quelques Géométres qui disent que deux paralleles concourent à une distance infinie ne contredit aucunement la démonstration que nous venons de donner. Ce n'est là qu'une façon de s'exprimer pour dire que deux lignes qu'on supposeroit ne pouvoir concourir qu'à une distance infinie pourroient être regardées comme paralleles, parceque leur inclinaison étant infiniment petite seroit comptée pour rien. Mais cette supposition ne prouve pas que deux lignes puissent être prolongées à une distance absolument infinie. Elle ne détruit point non plus la possibilité géométrique de deux lignes tellement situées l'une à l'égard de l'autre que l'inclinaison soit absolument nulle, & qui soient par conséquent exactement paralleles. Or il est évident qu'en détérminant ainsi la notion des paralleles, il est impossible qu'elles concourent jamais à quelqu'éloignement que ce soit, & on peut encore le montrer de la maniére suivante.

Qu'on suppose (*fig.* 2.) *A C*, *B D*., tangentes aux deux extrémités du diamêtre *A B* du cercle O, & par conséquent paralleles. Si l'on suppose en même tems que ces deux lignes prolongées à une distance absolument infinie dans la direction *A C*, *B D* doivent enfin concourir à un point infiuiment éloigné du diamêtre *A B*, il faudra supposer par la même raison qu'en les prolongeant dans la direction opposée *A E*, *B F*, elles devront aussi concourir de ce côté à un éloignement infini. Or les deux lignes *A E*, *B F* ne peuvent concourir du côte *X* sans leur supposer une inclinaison infiniment petite de ce même

côté

côté; & elles ne peuvent être inclinées vers *X* qu'elles ne s'écartent d'autant vers *Y*. Mais pour concourir aussi de ce côté selon la supposition elles doivent être inclinées l'une vers l'autre. Donc il faudroit les supposer en même tems convergentes & divergentes; ce qui répugne.

TROISIÉME PREUVE

Tirée d'une proprieté de la Logarithmique.

SOit *A x* l'axe de la logarithmique (*fig.* 3.) *d e p*, *A d* = 1, *b e* = $\frac{1}{2}$. Il est démontré que l'axe étant asymptote à la courbe ne peut la rencontrer qu'à une distance absolument infinie, ce qui dans le langage de la plûpart des Géométres veut dire qu'il ne peut jamais la rencontrer, c'est à dire que l'axe ne peut jamais devenir absolument infini. Proposition qui paroissant susceptible de démonstration, peut confirmer de plus en plus l'impossibilité d'une suite composée d'un nombre de termes absolument infini.

Qu'on suppose l'axe *A x* absolument infini, & partagé en un nombre actuellement infini de parties égales *A b*, *b c* &c. donc au point *x* placé à un éloignement infini du point *A*, l'axe deviendra tangente à la logarithmique. D'autre part il est évident que les ordonnées décroissant dans la progression 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$ &c. l'ordonnée au point *x*, c'est à dire à un éloignement infini du point *A* sera égale à l'unité divisée par 2. élévé à sa puissance infinie, savoir $\frac{1}{2^{\infty}}$

Cela supposé, pour que l'axe puisse devenir tangente à la courbe, il faut que la fraction $\frac{1}{2^{\infty}}$ qui exprime l'ordonnée, soit égale à zéro absolu, où que dumoins ce soit un infiniment petit incapable de recevoir aucun décroissement ul-

ultérieur. Car si l'ordonnée $\frac{1}{\infty}$ pouvoit encore devenir plus petite, la distance de l'axe à la courbe pourroit encore diminuer. Ce ne seroit donc pas encore le point du contact, comme on le suppose.

Or l'une & l'autre supposition est impossible. Car 1. cette ordonné $\frac{1}{\infty}$ loin d'être incapable de recevoir aucun décroissement ultérieur, seroit encore divisible à l'infini. Qu'on conçoive en effet dans un cercle une corde infiniment petite du premier ordre égale à l'ordonnée $\frac{1}{\infty}$, il est évident que l'abscisse correspondante sera un infiniment petit du second ordre, comme le démontre M. D'Alembert (art. différentiel de l'Encyclop.), d'où il conclut que les infiniment petits du premier ordre étant une fois admis, tous les autres en dérivent nécessairement. On sait aussi que les Géométres pour donner une idée de ce que seroit une quantité absolument infinie, si elle étoit possible, disent que c'est une quantité qui aïant reçeu tous les accroissements finis possibles ne peut plus être augmentée par des quantités finies, mais seulement par des quantités infinies; réciproquement une quantité infiniment petite sera encore susceptible de diminution sans fin par le moyen de quantités infinies. De sorte qu'en admettant un infiniment petit du premier ordre tel que la fraction $\frac{1}{\infty}$ il faut nécessairement reconnoitre la possibilité d'un autre terme $\frac{1}{{}^{2}\infty}$ infiniment plus petit que le premier. Donc la fraction $\frac{1}{\infty}$, pouvant encore recevoir une infinité de diminutions, ne sauroit être considerée ni comme zéro absolu, ni comme incapable de recevoir aucun décroissement ultérieur.

2.

2. Si des points A & b du même axe $A x$ l'on éléve les perpendiculaires $A D = A d = 1$, $b E = \frac{1}{2}$ & ainſi de ſuite, on aura une autre logarithmique, dont l'ordonnée infiniment petite correſpondante au point x ſera $\frac{1}{,\infty}$. Or au point x la logarithmique ſupérieure & l'inférieure devant également toucher leur axe commun $A\ x$, il faudroit que l'ordonnée $\frac{1}{,\infty}$, & l'ordonnée $\frac{1}{,\infty}$ fuſſent égales entr'elles, que l'une & l'autre fuſſent égales à zéro abſolu, ce qui & répugne. L'ordonnée $\frac{1}{,\infty}$ étant plus petite que l'ordonnée $\frac{1}{,\infty}$ celle-ci eſt encore ſuſceptible de diminution, donc la diſtance exprimée par cette ordonnée pouvant encore être diminuée, la courbe pourra être prolongée avant que d'arriver au point du contact, où la diſtance entre l'axe & la courbe doit être abſolument nulle. On pourra faire le même raiſonnement ſur l'ordonnée $\frac{1}{,\infty}$ d'où il ſera aiſé de conclure que quelque hipotéſe que l'on faſſe, il eſt impoſſible que l'axe rencontre jamais la logarithmique, mais il devroit la rencontrer s'il pouvoit être abſolument infini; & il feroit infini s'il étoit composé d'un nombre de parties actuellement infini. Donc une ſuite composée d'un nombre actuellement infini de termes eſt impoſſible.

RE-

RÉPONSE À UNE OBJECTION ET

QUATRIÉME PREUVE

Tirée des aſymptotes de l'hyperbole.

ON m'objectera peut être que de très-habiles Géométres conviennent avec M. de l'Hopital (Sect. Con. art. 108.) que *les aſymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les hyperboles dans leurs extrémités*. Ce qui ſemble établir la poſſibilité de l'infini actuel.

Je répons que dans le ſtile des Géométres cette ſuppoſition ne ſignifie autre choſe, ſinon que dans le cours indéfini de l'hyperbole, & de l'aſymptote, celle-ci approchant de plus en plus de l'hyperbole la toucheroit enfin, ſi on pouvoit parvenir au terme de ce prolongement infini, ou pour mieux dire ſi ce prolongement infini pouvoit avoir un terme quelconque. Ce n'eſt qu'à cette condition, qu'ils ſuppoſent que l'aſymptote puiſſe être regardée comme une tangente infinie qui touche l'hyperbole, puiſqu'ils diſent que ce cas ne peut avoir lieu qu'à l'extrémité de l'hyperbole, comme s'énonce M. de l'Hopital.

Mais en même tems ces Géométres ne prétendent point réaliſer cette ſuppoſition, ni en établir la poſſibilité * M. de l'Hopital s'en explique nettement art. 102. par ces mots.

 L'on

* Pour s'en convaincre il n'y a qu'à éxaminer le calcul qu'on fait d'après cette ſuppoſition pour trouver les aſymptotes des lignes courbes. Ce calcul conſiſte à chercher d'abord des formules générales pour la poſition de toutes les tangentes de la courbe donnée, & à rejetter enſuite dans ces formules pluſieurs termes, qui ſont regardés comme nuls par rapport à d'autres termes dont la valeur devient par la ſuppoſition infiniment plus grande: d'où l'on voit que ce calcul n'eſt pas abſolument rigoureux, & qu'il ne peut par conſéquent donner un réſultat exact, à moins qu'on ne regarde comme peu exacte la ſuppoſition ſur laquelle on l'a établi, en ſorte que l'erreur de l'hipotéſe détruiſe tout-à-fait celle qu'on a commis dans le calcul.

L'on voit que l'hyperbole & son asymptote étant prolongées s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini, ou l'on ne peut jamais arriver. C'est à dire que si l'hyperbole & l'asymptote étoient prolongées jusqu'à l'infini absolu, elles se toucheroient; mais comme cette condition est impossible, *& qu'on ne peut jamais arriver à l'infini*, il est de fait qu'elles ne peuvent jamais se rencontrer. C'est ce que M. de la Chapelle explique avec encore plus de netteté, & de précision dans son traité des

A parler exactement l'asymptote est une droite qui s'approche continuellement d'une courbe de maniére que sa distance à la conrbe puisse devenir moindre qu'aucune grandeur donnée, sans qu'elle soit jamais zéro absolu. Or cette condition rend fausse la supposition que l'asymptote soit une véritable tangente; mais on la redresse en suite dans le calcul, en faisant, pour ainsi dire, disparoître le point d'attonchement, en sorte que la tangente cesse d'être tangente, & devienne seulement la limite des tangentes, savoir la limite de la courbe même; ce qui est conforme à la nature de l'asymptote.

Il en est ici comme dans la méthode des infiniment petits, où le calcul redresse aussi de lui même les fausses hipotéses que l'on y fait. On imagine par exemple qu'une courbe soit un poligone d'une infinité de petit côtés, dont chacun étant prolongé devienne une tangente à la courbe. Cette supposition est réellement fausse; car le petit côté prolongé ne peut jamais être autre chose qu'une véritable secante: mais l'erreur est détruite par une autre errenr qu'on introduit dans le calcul en y négligant comme nulles des quantités, qui selon ls supposition ne sont qu'infiniment petites. C'est en quoi consiste, ce me semble, la Métaphysique du calcul des infiniment petits, tel que l's donné M. Leibnitz. La méthode de M. Newton est au contraire tout à fait rigoureuse soit dans les suppositions, soit dans les procédés du calcul. Car il ne conçoit qu'une secante devienne tangente, que lorsque les deux points d'intersection viennent tomber l'un sur l'autre, & slors il rejette de ses formules toutes les qnantités que cette condition rend entiérement nulles. Cette méthode exige absolument qu'on regarde comme évanouissantes, c'est à dire comme nulles, les quantités dont on cherche les premieres, ou derniéres raisons; & c'est ce qui rend souvent les démonstrations longues, & compliquées. La supposition des infiniment petits sert à abréger, & à faciliter ces démonstrations: mais ce n'est qu'après avoir prouvé en général que l'erreur qu'elle fait naitre est toujours corrigée par la maniére dont on manie le calcul, qu'il est permis de regarder les infiniment petits comme des réalités, & de les emploïer comme tels dans la solution des problemes.

NOTE DE M. DE LA GRANGE.

des ſections coniques approuvé par l'Académie Roïale des ſciences de Paris ſur le témoignage de M. Caſſini & D'Alembert. Après avoir établi (n. 89.) que les aſymptotes de l'hyperbole prolongées à une très-grande diſtance, deviennent ſenſiblement tangentes à cette courbe, il ajoute „ ſi l'on objectoit que ceci contredit le num. 46., où „ l'on a démontré que les aſymptotes de l'hyperbole pro„ longées tant que l'on voudra, ne rencontreront jamais „ cette courbe, on obſervera que les aſymptotes ne de„ viennent tangentes, que dans le cas où elles ſeroient „ actuellement prolongées à l'infini ; mais ce cas étant „ impoſſible, c'eſt comme ſi l'on diſoit qu'après un très„ grand prolongement, elles approcheront ſi fort d'être „ tangentes, que leur différence des tangentes réelles ſera „ inſenſible, & non pas plus petite qu'aucune grandeur „ donnée. (*Il faut entendre qu'aucune grandeur donnée poſſible, car il eſt également vrai qu'il n'y a qu'une quantité infiniment petite, ſi elle pouvoit exiſter, qui ſoit plus petite qu'aucune grandeur donnée poſſible; & que quelque petite que ſoit une grandeur actuellement donnée, on en peut toujours trouver une plus petite, qui dès lors deviendra donnée, & ainſi à l'infini. Ce qui fait diſparoitre la contradiction apparente de ces différentes expreſſions*). Car ceci ne pourroit avoir lieu „ que dans l'infini, c'eſt à dire qu'au fond il eſt im„ poſſible qu'il ait lieu. Ainſi, quand pour démontrer „ l'égalité de deux grandeurs, on ſe ſert de ce principe, „ que *deux quantités doivent néceſſairement être égales, ſi* „ *leur différence eſt plus petite qu'aucune grandeur donnée*, „ il faut bien diſtinguer ſi la limite dont les deux quanti„ tés approchent continuellement eſt dans le fini, où dans „ l'infini; dans le premier cas il y aura égalité, parce „ qu'on démontrera l'impoſſibilité d'aſſigner aucune diffé„ rence; mais dans le ſecond cas, il en ira autrement, „ vû que la limite étant ſuppoſée à une diſtance infinie,

 c'eſt

„ c'eſt comme s'il n'y avoit point de limite; donc le „ terme de comparaiſon manquant, le principe n'a plus „ lieu, & ſe fonder deſſus eſt donner dans un paralogiſme „ très certain, qui conduiroit à cette contradiction mani„ feſte, *que les aſymptotes de l'hyperbole ne peuvent jamais* „ *rencontrer cette courbe, & que cependant elles la rencon-* „ *trent*. J'ai inſiſté la deſſus, conclût M. de la Chapelle, „ en faveur des commençants, qui pourroient à cette oc„ caſion ſuſpecter le principe de *l'égalité de deux gran-* „ *deurs, dont la différence eſt démontrée plus petite qu'au-* „ *cune grandeur donnée*; d'autant plus que je ne connois „ aucun Géométre qui ait fait attention à la néceſſité de „ ſauver les apparences de la contradiction alléguée. Telle eſt auſſi, comme on l'a vu, l'idée qu'en donne M. D'Alembert lui même au mot aſymptote de l'Enciclop. & Volf ne s'énonce pas autrement ſur le même ſujet dans ſes éléments de Mathématique.

Il eſt d'ailleurs bien aiſé de faire voir qu'en ſuppoſant comme réel ou poſſible ce prolongement de l'hyperbole à l'infini abſolu, où l'aſymptote devient tangente, on ne peut éviter de tomber en des contradictions manifeſtes.

1. L'aſymptote, comme le dit M. de l'Hopital, ne devient tangente, qu'à l'extrémité de la courbe. Donc pour vérifier cette ſuppoſition, il faut allier ces deux choſes, que l'hyperbole ſoit actuellement infinie, & que pourtant elle ait une extrémité. Or l'idée d'une extrémité quelconque ne détruit-elle pas l'idée de l'infinité? Mais ce n'eſt encore ici qu'un argument métaphyſique.

2. Il eſt démontré que la tangente de l'hyperbole eſt coupée en deux parties égales au point du contact. Donc l'aſymptote devenüe tangente infinie devroit auſſi être partagée au point du contact en deux parties égales. Car cette propriété ſubſiſtant immuablement dans tout le cours indéfini de l'hyperbole, il n'eſt pas poſſible qu'elle man-

que

que tout à coup. Par conséquent si on veut supposer que l'asymptote soit tangente à l'extrémité de l'hyperbole infiniment prolongée, il faut supposer aussi que depuis cette extrémité où l'hyperbole n'arrive qu'après un cours infini, l'asymptote s'étend encore infiniment au delà, afinque la partie qui est au delà du contact, soit égale à celle qui est en deçà. Qu'on ne s'imagine pas que je veuille ici me récrier sur l'idée de l'infini double d'un autre infini. Ce n'est pas là ce qui fait la difficulté. Elle consiste en ce que d'un côte l'asymptote ne peut toucher l'hyberbole qu'à son extrémité, ainsi que le dit M. de l'Hopital, lorsque l'hyperbole a pris tous ses accroissemens finis possibles; & qu'au contraire l'asymptote loin d'être à son extrémité, ne se trouve qu'à la moitié de son cours. Or cela paroit être contre la nature de l'hyperbole. Il suffit de considérer cette courbe dans le cone, pour appercevoir qu'elle doit s'étendre autant que l'asymptote.

3. Pour que l'asymptote touche l'hyperbole, il faut supposer l'hyperbole entre deux extrémités; l'une est le sommet dont elle part; l'autre le point du contact au delà duquel il n'est pas possible que la courbe puisse être continuée; car si elle étoit continuée au delà de ce point, elle devroit couper l'asymptote contre la supposition. On n'évite point cette difficulté en disant avec Fontenelle qu'une quantité infinie ne peut plus augmenter par des quantités finies, mais qu'elle peut être encore augmentée par des quantités infinies. Car en supposant une portion infinie de courbe ajoutée à cette extrémité du contact, il ne seroit pas moins vrai de dire que cette courbe couperoit la tangente au point du contact. Ce qui répugne.

4. Il est démontre, (art. 95., de l'Hopital fig. 40.) que si l'on mene par un point quelconque *N* de l'hyperbole, une ligne droite *L l* terminée par les asymptotes, & qui la rencontre en un autre point *n*, les parties *L N*, *l n* pri-

prises entre les points de l'hyperbole, & la rencontre des asymptotes seront égales entr'elles. Maintenant que du point *N* pris à volonté près du sommet de l'hyperbole, on tire une ligne *L l* qui aille aboutir à l'extrémité, où se fait le contact de l'asymptote infinie, on devra encore trouver *l n* égale a *L N* entre la courbe & l'asymptote. Ce qui répugne à l'idée du contact.

Il paroit qu'on ne peut éviter cette difficulté qu'en disant qu'à cette extrémité la partie *l n* coincide soit avec la courbe, soit avec l'asymptote; mais alors cette partie *l n* étant toute appliquée & sur la courbe & sur l'asymptote, il s'en suivroit que le contact ne se feroit plus en un point, mais dans tout la longueur de la partie *l n*, ce qui n'est pas moins absurde. Je ne crois pas qu'une preuve de cette nature s'éloigne beaucoup d'une rigoureuse démonstration.

Cette partie *l n*, qui déborde toujours doit faire le même effet que dans la conchoide, & empêcher irrevocablement que l'asymptote ne vienne jamais se joindre à l'hyperbole.

CINQUIÉME PREUVE.

Tirée des progressions croissantes infinies.

J'Ai proposé quelques idées sur ce sujet dans mon essai pag. 18. & suiv. Voici quelques autres réflexions que je soumets également au jugement impartial des lecteurs éclairés.

M. l'Abbé de la Caille dans ses leçons de Mathématique si justement estimées, traitant des propriétés de la grandeur considerée dans l'infini, établit d'abord que la grandeur est divisible à l'infini; il le démontre par l'essence même de la grandeur qui est d'être susceptible de plus

&

& de moins, & il ajoute: *par exemple la ſuite naturelle des nombres 1. 2. 3. 4. croit évidemment à l' infini; car à quelque grand nombre qu'on conçoive élévé un terme de cette ſuite, on ne voit pas pour cela que l' on ſoit plus près de la fin, ce qui ne peut convenir à une ſuite dont le nombre des termes ſeroit fini.*

L'expreſſion eſt très-juſte; mais un eſprit peu juſte pourroit en abuſer, & s'imaginer que la ſuite naturelle des nombres ne pourroit croître à l'infini, s'il n'exiſtoit déja comme une infinité actuelle de nombres, dont l'eſprit pût tirer comme d'un reſervoir immenſe tous les nombres qu'il ajoute ſucceſſivement à la ſuite naturelle. Cette idée, diſ-je, ne ſeroit pas aſſès juſte. Pour former la ſuite naturelle & pour l'augmenter à l'infini, l'eſprit n'a pas beſoin d'emprunter des nombres tous faits, comme on tire d'un coffre fort les monnoyes qu'on veut dépenſer. L'eſprit forme la ſuite naturelle par la puiſſance qu'il a de répéter ſes idées, & d'ajouter ainſi unité à unité. Et comme rien ne limite l'exercice ſucceſſif de cette puiſſance, il eſt clair que la ſuite naturelle des nombres, peut croître à l'infini par l'addition d'unité à unité ſans être jamais bornée.

Cette operation eſt analogue à celle, par laquelle l'eſprit peut diviſer à l'infini une portion de quantité continuë. A meſure que l'eſprit pouſſe plus loin la diviſion, le nombre des parties ſe multiplie; & comme cette diviſion peut aller à l'infini, les nombres peuvent croître à l'infini. Telle eſt à peu près l'idée que M. l'Abbé de la Caille donne lui même de la formation des nombres: une quantité, dit il, exprimée par des nombres, eſt une quantité qu'on a conçue partagée en pluſieurs parties égales, dont chacune de ces parties conſiderée ſeule s'appelle l'unité: idée qui ne s'éloigne pas de la notion que Newton donne du nombre en le faiſant dépendre de la maniére dont une quantité eſt contenuë dans un autre quantité. Telle étoit

auſſi

aussi l'idée des anciens, comme je l'ai montré dans ma dissertation sur la notion & la divisibilité de l'étenduë geométrique pour servir de réponse à la lettre que M. Dupuy m'a fait l'honneur de m'addresser dans le Mercure de Paris. Les idées que je propose dans ce mémoire ne sont qu'une suite des principes que j'ai établi dans cet écrit, & forment un seul corps.

Cette idée de la formation de la suite naturelle, idée claire, & simple, parfaitement conforme à la notion qu'en donnent tous les Géométres, semble prouver invinciblement que la suite naturelle ne peut jamais parvenir à l'infini absolu.

Cette suite commence évidemment par des termes finis 1. 2. 3. &c. donc si elle peut parvenir à l'infini absolu, il faut qu'en un point, ou terme quelconque de cette suite, on passe du fini à l'infini; car s'il n'y avoit aucun terme possible où la suite passat du fini à l'infini, il est évident qu'elle demeureroit toujours finie.

Or je dis que ce passage est impossible. 1. Si en augmentant les nombres finis, on pouvoit parvenir à un nombre infini, il faudroit que par cette augmentation successive les nombres finis s'approchassent de plus en plus de l'infini. Car il est évident qu'une quantité ne peut atteindre un terme quelconque, si elle n'approche peu à peu de ce terme. Or selon la remarque de M. l'Abbé de la Caille à quelque grand nombre qu'on conçoive élévé un terme de la suite naturelle, on ne voit pas que l'on soit plus près de la fin. Donc quelque augmentation que l'on suppose dans les termes finis, par lesquels commence la suite naturelle, on ne sera pas plus avancé vers le point du passage du fini à l'infini, qu'on ne l'étoit au commencement même de la suite. Donc la suite est toujours également éloignée de ce point. Donc il est impossible qu'elle y arrive jamais.

2.

2. Reprenons le même raisonnement. Comme la suite naturelle commence par des termes finis, si elle peut arriver à l'infini absolu, il faut de toute nécessité que des nombres finis on passe enfin à un nombre infini, c'est à dire que dans cette suite il y ait un terme quelconque fini, lequel soit suivi d'un nombre infini. Qu'on nomme x ce nombre fini quelconque: par la propriété de la suite naturelle le nombre suivant sera $x + 1$ or x étant fini & $x + 1$ ayant avec ce nombre un rapport fini, ne sera point encore infini, comme on le suppose. Et comme il n'est aucun terme fini possible dans la suite naturelle, auquel ce raisonnement ne puisse être appliqué, il n'y a donc aucun terme fini possible, qui ne soit suivi d'un autre terme fini $x + 1$. Il est donc impossible qu'il s'y trouve aucun terme infini. Donc la suite naturelle ne peut jamais passer du fini à l'infini absolu. Ce raisonnement ne diffère pas pour le fond de quelques autres que j'ai déja proposé; mais dans la matiére dont il s'agit, il n'est peut-être pas inutile de présenter les mêmes idées sous différentes faces.

3. De la il suit que certaines formules concernant les loix de la progression qui sont très-justes dans les nombres finis, semblent manquer de l'exactitude nécessaire, lorsqu'on veut les appliquer à des nombres absolument infinis.

On lit dans des éléments d'ailleurs très-estimés ces propositions avec leurs démonstrations.

La somme des unités prise une infinité de fois est un infini du premier ordre, où est $= \infty$.

Dem. l'unité prise une infinité de fois est une quantité finie qui a reçeu tous ses accroissements finis possibles. Donc &c.

La somme des termes de la progression infinie des nombres naturels 1. 2. 3. 4. .... ∞ *est un infini du second ordre, & est* $= \frac{\infty^2}{2}$.

 Dem.

Dem. cette progreſſion étant infinie, ſon dernier terme eſt ∞ , *le nombre des termes qui précédent le dernier eſt* ∞ − 1. *Si l'on appelle S la ſomme des termes, celle des termes qui précédent le dernier, ſera par conſequent* = *S* − ∞ *&c.*

Arrêtons nous ici, & examinons l'application que l'on fait des loix de la progreſſion à des ſuites ſuppoſées abſolument infinies. D'abord on y reconnoit formellement *un dernier terme* qui eſt = ∞; par conſéquent tous les termes qui le précédent ne peuvent être que des nombres finis; car avant que d'arriver à ce dernier terme la ſuite n'a pas encore reçeu tous ſes accroiſſements finis poſſibles. Elle eſt donc encore dans le genre des quantités finies, & ce n'eſt qu'au moment où elle reçoit tous ſes accroiſſements finis poſſibles qu'elle devient infinie. On établit en ſuite que le nombre des termes qui précédent le dernier eſt ∞ − 1.

Cette maniére d'exprimer les termes d'une ſuite eſt très-juſte, pendant qu'il ne s'agit que de nombres finis. Il eſt clair que ſi l'on fait une progreſſion qui ait un dernier terme = 10, le nombre des termes qui précédent, ſera 10 − 1 = 9 mais cette formule ne peut avoir lieu dans une progreſſion abſolument infinie.

On a vu par l'énoncé même des propoſitions qu'on vient de rapporter, que cette progreſſion a un dernier terme infini, & que le nombre des termes qui précédent le dernier n'aïant pas encore reçeu tous les accroiſſements finis poſſibles, ne peut être infini. Je dis donc que dans cette hipotéſe, on ne peut exprimer le nombre des termes qui précédent le dernier par la formule ∞ − 1. Car ou cette formule exprime un nombre infini, ou elle n'exprime qu'un nombre fini. Si elle exprime un nombre abſolument infini, donc elle n'eſt pas applicable à un nombre de termes qui n'eſt que fini. Si elle n'exprime qu'un nombre fini, donc un nombre infini devient fini par

la

la soustraction d'une seule unité, & réciproquement un nombre fini devient infini par l'addition d'une seule unité, ce qui répugne.

Dans la progression finie dont le dernier terme est 10, la formule 10 — 1 exprime réellement le nombre des termes qui précédent 10, parceque 10 — 1 n'est pas 10, mais qu'il devient 10 par l'addition de l'unité. Donc pour conserver l'analogie, si la formule ∞ — 1 doit exprimer le nombre des termes qui précédent ∞, il faut que ∞ — 1 ne soit pas ∞, comme 10 — 1 n'est pas 10, & que cette quantité ∞ — 1 qui n'est pas infinie devienne ∞ par la seule addition de l'unité comme 10 — 1 devient 10 par l'addition de l'unité. Mais c'est ce qui répugne. Donc &c.

M. l'Abbé Deidié dit qu'on peut évaluer les progressions infinies qui vont en augmentant de la même façon que les décroissantes, & qu'alors on trouve des valeurs infinies dont la connoissance n'est qu'une belle speculation. Mais il ne dévoile pas le defaut des suppositions qui en rendroient les résultats contradictoires, ni de quelle maniére on doit corriger ces suppositions.

Il ne suit pas delà cependant qu'on doive rejetter les calculs par lesquels on parvient à déterminer les rapports finis qu'ont entr'elles les sommes infinies des suites infinies. Tel est le calcul par lequel on trouve que *la somme d'une infinité de quarrés de termes consécutifs est le $\frac{1}{3}$ du produit du dernier quarré multiplié par leur nombre: que la somme d'une infinité de cubes consécutifs est le $\frac{1}{4}$ du produit du dernier cube par leur nombre &c.* Ces calculs ont leur usage, & il suffit d'en dévélopper la Théorie avec netteté pour s'appercevoir qu'ils ne supposent rien qui ne soit conforme aux idées les plus claires, & les plus simples que nous avons de la grandeur.

 Tout

Tout nombre peut être la racine de quelque puiſſance que ce ſoit. 2 eſt racine quarrée de 4 & il eſt auſſi racine cubique de 8. Cent eſt racine quarrée de dix mille, & il eſt racine cubique d'un million. Plus la racine eſt grande, plus auſſi la puiſſance ſupérieure eſt grande par rapport à l'inférieure; ainſi le quarrée de 2. eſt la $\frac{1}{2}$ du cube 8, au lieu que dix mille, quarré de cent n'eſt que la $\frac{1}{100}$ partie d'un million qui en eſt le cube. Qu'on augmente la racine, on parviendra à un nombre tel, que ſon quarré ne ſera que la cent millioniême de la cent millioniême partie de ſon cube. Et comme cette progreſſion n'a aucune borne, la fraction qui exprimera le rapport du quarré au cube pourra toujours être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée quelque petite qu'elle ſoit.

La formule pour ſommer tant de quarrés des termes conſecutifs qu'on voudra eſt celle-ci $\int^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$ où a ſignifie le premier, & ω un dernier terme. Or a, & ω étant de termes déterminés la formule eſt d'une exactitude rigoureuſe. Quand on fait la ſuite infinie, on ſubſtitue ∞ ſigne de l'infini à la place du dernier terme exprimé par ω, & l'on a $\int^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \frac{1}{2}\infty$ &c. & alors la formule ſe réduit à $\int = \frac{1}{3}\infty^3$ à cauſe que tous les autres termes ſont conſidérés comme infiniment petits à l'égard de $\frac{1}{3}\infty^3$.

D'abord il eſt clair que la formule ainſi réduite n'eſt pas d'une exactitude tout a fait rigoureuſe puiſqu'on néglige des termes poſitifs portés par le calcul. Il eſt vrai que ces termes peuvent être conſidérés comme infiniment petits à l'égard du premier, mais il ne ſont pas abſolument

ment

ment nuls, ce ſont des quantités réelles & poſitives & non zéro abſolu.

Cela ſuppoſé pour conſerver à ces formules toute l'exactitude dont elles ſont ſuſceptibles, il n'eſt point néceſſaire d'admettre des cubes, ou des quarrés abſolument infinis repréſentés par ∞^3 ∞^2. Car enfin entend-on ce que l'on dit, quand on nomme un dernier cube, un dernier quarré, & qu'on nomme infini ce dernier cube, ce dernier quarré, comme s'il pouvoit y avoir un dernier terme dans une progreſſion, qui ne peut avoir de fin?

Il faut donc exprimer par ce ſigne ∞ non une quantité abſolument infinie, mais une quantité indéterminée, conçue comme ſurpaſſant en grandeur quelque quantité finie donnée que ce ſoit, quelque grande qu'on l'imagine. Puis que la progreſſion des nombres naturels n'a certainement point de fin, il eſt viſible qu'après avoir aſſigné un terme fini quelque grand qu'il ſoit, on pourra toujours trouver un terme plus grand à l'infini, il y a donc des quantités indéterminées conçues comme plus grandes que quelque quantité finie qu'on puiſſe déterminer. Maintenant qu'on exprime cette ſorte de quantités par ∞, qu'on en faſſe le quarré ∞^2, & le cube ∞^3, cette expreſſion fera connoître que quelque petite que ſoit une fraction qui exprime le rapport d'un quarré à un cube, on pourra toujours trouver entre ces quarrés & ces cubes indéterminés un rapport exprimable par une fraction toujours plus petite à l'infini.

On voit par cette raiſon pourquoi on peut, & j'oſe même dire qu'il faut retrancher de la formule les termes qui ſuivent le premier. Si ∞^3 & ∞^2 ſignifioient un dernier cube, & un dernier quarré au delà deſquels il ne pût plus y avoir ni de cubes, ni de quarrés, la fraction $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$ qui exprimeroit le rapport de ce dernier quarré

à ce

à ce dernier cube ne feroit plus fusceptible de diminution. On pourroit bien ainsi négliger dans la formule les termes suivants $\frac{1}{2}$ ∞^2 &c. parceque ce feroient des quantités infiniment petites à l'égard du premier $\frac{1}{3}$ ∞^3, cependant ces termes n'étant pas absolument nuls, la formule ne feroit pas rigoureusement exacte.

Mais si ∞^3 & ∞^2 représentent non un dernier cube, ni un dernier quarré absolument infinis, mais plutôt une suite indéterminée de cubes & de quarrés, qu'on peut toujours supposer en vertu de leur indéfinie progression plus grands, qu'aucun cube, & qu'aucun quarré donnés, quelques grands qu'on les suppose, alors on verra clairement pourquoi dans la formule il faut retrancher les termes, qui suivent le premier. Ces termes subsistants dans la formule dénotent toujours un rapport quelconque entre le quarré, & le cube, rapport exprimable par une fraction quelque petite qu'elle soit. Cette fraction se trouveroit ainsi fixée par la formule même. Or ∞^3 & ∞^2 exprimant une suite de cubes, & de quarrés indéterminés toujours susceptibles d'une nouvelle augmentation au delà de quelque terme qu'on puisse imaginer, la fraction qui exprime leur rapport ne peut jamais être fixée, mais quelque petite qu'on la suppose, on peut toujours la prendre moindre à l'infini. Or on ne peut mieux exprimer le cours de cette diminution possible au delà de tout terme donné, qu'en retranchant les termes, qui en borneroient le décroissement successif, & c'est ce que l'on fait en quelque sorte en retranchant de la formule ci dessus les termes qui suivent le premier.

Ainsi l'équation de la formule réduite $\int^2 = \frac{1}{3}$ ∞^3 ne doit pas être regardée comme une égalité entre deux termes fixes, & permanents de part, & d'autre, tels que feroient deux termes finis, & déterminés, mais plutôt comme la fluxion de deux termes considérés dans un cours indéfini

d'au-

d'augmentation, où leur disproportion peut toujours être trouvée moindre qu'aucune quantité donnée.

La notion de ce signe ∞ pris non pour l'infini absolu considéré dans un état fixe, & permanent, mais pour une grandeur indéterminée surpassant tout ce que l'imagination peut embrasser, & conçue comme pouvant s'étendre encore indéfiniment au delà, paroit très-conforme à la maniére dont les suites infinies se présentent à notre esprit. Tachons d'en donner une idée claire, en exposant ce qui se passe en nous mêmes, lorsque nous nous attachons à considérer une progression infinie: nous trouverons qu'à cet égard il en est à peu près des operations de l'esprit comme de celles des sens.

Lorsque du haut d'une colline on jette les yeux sur une vaste plaine dont la vüe ne peut embrasser toute l'étendue, on n'a pas de peine à distinguer les premiers objets qui se présentent & à en reconnoitre le nombre & la situation. Mais à mesure qu'ils s'éloignent, on commence à les confondre, nous les perdons de vüe, sans pouvoir discerner quel est le dernier dans cette confuse multiplicité, qui se dérobe à nos regards: nous cessons de voir, sans que rien paroisse terminé, & ces objets qui nous fuïent, ne nous échappent qu'en nous paroissant s'étendre & se perdre à un éloignement, où notre vüe s'égare, & se confond.

C'est à peu près ce qui nous arrive quand nous entreprenons de suivre des yeux de l'esprit une progression infinie. Nous n'avons pas de peine à distinguer nettement les termes représentés par des signes, qui nous sont familiers, & dont nous appercevons tout d'un coup la liaison, & les rapports. Mais aussitôt que l'usage de ces signes commence à devenir trop compliqué; nous n'appercevons plus que d'une vüe confuse cette suite de termes; nous les reculons autant que nos conceptions peuvent s'étendre: &

en

en les conſidérant de ce lointain, nous les voyons ſe dérober à notre vüe, ſans que nous puiſſions fixer aucun dernier terme, qui borne la ſuite que nous enviſageons; nous n'appercevons plus qu'une multiplicité de termes qui faute de ſignes diſtincts ſe confondent à nos yeux, & nous ſentons ſeulement que rien ne peut arrêter leur progreſſion indéfinie.

C'eſt donc une illuſion d'imaginer dans une ſuite infinie un dernier terme quelconque, comme un point fixe placé à un éloignement infini, dont l'eſprit pourroit franchir l'intervalle par des operations multipliées à l'infini. Ce prétendu point fixe n'eſt au contraire qu'un point mobile, qui recule à meſure que l'eſprit avance, & qui ſe trouve toujours à un égal éloignement, ſemblable à ces points lumineux que les raïons du ſoleil réfléchis de deſſus la glace d'un miroir vont tracer ſur les objets éloignés: envain celui qui tient le miroir précipiteroit ſes pas pour en approcher! Autant qu'il avance, d'autant il les recule.

Maintenant il eſt bien aiſé de faire voir la contradiction où l'on s'engage en ſuppoſant ∞^3 & ∞^2 comme le dernier cube, & le dernier quarré de la ſuite naturelle pouſſée à l'infini. S'ils ſont les derniers, on ne peut donc en ſuppoſer des plus grands, c'eſt à dire qu'il ne peut y avoir de plus grand cube que le cube infini repréſenté par ∞^3 ni de plus grand quarrés que le quarré infini repréſenté par ∞^2. Mais ſi l'on peut tirer la racine cubique du terme infini ∞^3, on peut auſſi en tirer la racine quarrée, & quand même ∞^3 ne ſeroit pas un quarré parfait, il eſt évident que la racine du quarré plus approchant, doit être infiniment plus grande que $\sqrt{\infty^2}$, donc le quarré qui réſultera de la racine $\sqrt{\infty^3}$ ſera infiniment plus grand que ∞^2, donc entre ces deux termes, il y aura encore une infinité de quarrés, par con-

ſe-

féquent la fuite naturelle pourra encore fournir une infinité de quarrés après ∞^2. Donc ce n'eft pas le dernier de cette fuite, contre la fuppofition.

Voici enfin une preuve que je crois démonftrative contre la fuppofition de la fuite naturelle pouffée à l'infini abfolu. Les Auteurs expriment cette fuppofition en ces termes, favoir que la fuite naturelle aïant pris tous fes accroiffements finis poffibles devient infinie, & qu'alors fon dernier terme eft ∞. Je dis que cette fuppofition renverfe des propofitions inconteftables touchant les progreffions arithmétiques, entre lefquelles eft la fuite naturelle des nombres. Il eft démontré que dans une progreffion arithmétique la fomme des extrémes eft égale à la fomme des moyens. Dans la fuppofition que nous combattons ici la fomme des extrémes eft $1 + \infty$ nommant donc n un terme moyen, cette fomme fera égale à $n + n + 1$, ou fi l'on veut $1 + \infty = 2n$. Donc $n = \frac{1 + \infty}{2} = \frac{\infty}{2}$. Ce terme moyen fera donc infini, mais la fuite naturelle par la fuppofition, n'eft infinie que quand elle a reçu tous fes accroiffements finis poffibles; & elle ne peut avoir reçu tous fes accroiffements finis poffibles, quand elle n'eft encore qu'à la moitiè de fon cours. Donc &c.

Bornons maintenant la fuite naturelle à ce terme trouvé $\frac{\infty}{2}$. La fomme des extrémes $1 + \frac{\infty}{2}$ fera égale à $2x$ (x fignifiant le nouveau terme moyen) & par conféquent $x = \frac{\infty}{4}$ qui fera encore un terme infini trouvé à la quatriéme partie du cours de la fuite naturelle. Qu'on revienne toujours en arriére, & en remontant vers l'unité de la même façon; on trouvera une infinité de termes infinis pour former les termes décroiffants de la fuite naturelle

relle depuis l'infini jusqu' à l'unité: serie bien différente de celle par laquelle de l'unité on s'éléve vers l'infini. Ce ne sera même qu'aprés une infinité de termes, & qu'aprés avoir épuisé les fractions $\frac{\infty}{4}$ $\frac{\infty}{8}$ &c. toujours en se rapprochant de l'unité, qu'on parviendra à la fraction $\frac{\infty}{\infty} = 1$. C'est a dire qu'en redescendant de l'infini absolu par tous les dégrés de la suite naturelle jusqu'à l'unité, tous les termes se trouveroient infinis à l'exception de l'unité seule.

Il me paroit que cette considération suffit pour faire sentir que le fini, & l'infini dans la grandeur sont, pour ainsi dire, des quantités hétérogénes, qu'il est impossible de jamais rapprocher, en sorte que de l'une on puisse passer à l'autre.

SIXIÉME PREUVE

Tirée des progressions décroissantes à l'infini.

SOit la ligne (*fig.* 4.) $AB = 1$. Si on coupe cette ligne en deux parties égales au point C, & qu'on partage de même la moitié CB au point D, & ainsi de suite, on aura une progression géométriquement décroissante en raison sousdouble, formée par la suite des divisions, & sousdivisions de la ligne AB, progression qu'on exprime de cette sorte $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$ &c.

Ainsi dire que cette progression décroissante peut aller à l'infini, ce n'est dire autre chose, si non que la division de la ligne AB en parties sous doubles peut aller à l'infini.

Mais comme une telle division ne peut jamais être actuellement effectuée en entier, la progression qui en résulte

fulte ne peut non plus jamais parvenir à un dernier terme qui la termine. C'eſt ce que Tacquet démontre rigoureuſement dans ſes remarques ſur la XI propoſition du 6. livre d'Euclide.

Lors donc que pour évaluer la ſomme d'une progreſſion décroiſſante à l'infini, on écrit $1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} \ldots . 0$; ce n'eſt pas que le vuide marqué par les points tracés entre $\frac{1}{8}$ par exemple & zéro, doive être conçu comme rempli par une ſuite actuellement infinie de termes diſtincts, qui ſe ſuccedant l'un à l'autre aboutiſſent enfin à zéro, comme au dernier de tous. Si cela étoit, il faudroit, qu'entre zéro, & le terme qui le précédéroit immédiatement il y eut le même rapport qui ſe trouve entre le conſéquent $\frac{1}{8}$ & ſon antécédent $\frac{1}{4}$. Or il eſt viſiblement abſurde de ſuppoſer un rapport ſous double entre zéro, & une quantité poſitive quelconque.

Ainſi par une progreſſion décroiſſante infinie il faut entendre une ſuite dont le cours ne peut jamais être borné, mais non une ſuite, qui après un cours actuellement infini, ſe trouve complette & compoſée d'une infinité de termes placés ſucceſſivement l'un après l'autre, & rangés par ordre depuis le premier juſqu'à zéro. Ces deux idées ſont très-différentes, & il importe extrémement de ne pas les confondre.

On pourroit objecter que le calcul qu'on emploie pour déterminer la ſomme d'une progreſſion décroiſſante infinie, ſemble ſuppoſer une ſuite de termes diſtincts, qui aillent en diminuant juſqu'à zèro. Telle eſt dans le cas préſent la formule $1 - \frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: 1 - 0 : S$. ou zéro eſt emploié de la même maniére que le feroit un nombre poſitif quelconque, s'il s'agiſſoit d'une progreſſion finie.

On citera même un Géométre, qui après avoir reconnu qu'une progreſſion décroiſſante ne peut avoir aucune borne, non plus que la diviſibilité de la grandeur, ſemble

pourtant reconnoître la néceſſité d'aſſigner un dernier terme à la progreſſion décroiſſante infinie, pour en évaluer la ſomme, en diſant que comme le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond; ainſi le premier terme moins le dernier, *qui eſt prèsqu' égal à zéro* eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent.

Mais la juſteſſe de ce calcul ne dépend aucunement de ces ſuppoſitions peu exactes. Les Géométres qui ont ſuivi la méthode rigoureuſe des anciens, en ont établi les principes d'une maniére auſſi ſolide que lumineuſe ſans recourir à un langage qui a toujours beſoin d'être ramené à la preciſion. C'eſt ce qu'a fait Tacquet Arith. l. 5. c. 4.

Qu'on me permette de propoſer en peu de mots quelques idées relatives à ce ſujet. Quoique la ligne *A B* puiſſe être diviſée à l'infini par une ſuite de diviſions en parties ſousdoubles, il eſt clair cependant que cette ſuite de diviſions a une limite qu'elle ne peut paſſer, & cette limite eſt l'extrémité même de la ligne *A B*. Ce point *B* ſera donc auſſi la limite de la progreſſion qui réſulte de cette ſuite de diviſions.

D'où il ſuit que quand on ſuppoſeroit, que la ligne *A B* eut pû recevoir toutes ſes diviſions poſſibles, cependant l'aſſemblage de cette infinité de parties ne pourroit former que cette même ligne *A B*; & les termes de la progreſſion n'étant autres que ces mêmes parties qui réſultent de la diviſion de la ligne *A B*, il s'en ſuit que la ſomme de tous ces termes, quand on les ſuppoſeroit entiérement dévélopés, ne pourroient non plus former que cette même ligne *A B*.

L'évaluation d'une progreſſion décroiſſante infinie, conſiſte à trouver l'eſpace, ou le chemin qu'elle devroit parcourir pour atteindre à la limite où elle tend, & où elle arriveroit, ſi ſon cours pouvoit jamais être terminé; ou ce qui revient au même à trouver la quantité finie,

qui

qui par une suite de divisions, & de sousdivisions en une raison donnée fournit & détermine à l'infini les termes de cette progression.

Or pour trouver cette quantité par le calcul, il n'est point du tout nécessaire de supposer que la progression ait pris actuellement tous les termes dont elle est susceptible: il suffit de connoître le rapport des deux premiers termes, rapport qui devant regner dans toute la progression, fait connoître la limite, où la suite de ses termes devroit aboutir, quand on pourroit la dévéloper entiérement.

Dans une progression finie comme le premier terme, moins le second est au second, ainsi le premier moins le dernier est à la somme de ceux qui le suivent. Dans une progression infinie il n'y a point réellement de dernier terme. On dira donc, comme le premier terme moins le second est au second, ainsi le premier est à la suite de tous ceux qui le suivent: c'est à dire dans l'exemple précédent comme $AB - CB : CB :: AB$, à la somme de tous les termes qui le suivent. AB représente toute la suite des antécédents, parceque quand on supposeroit cette suite entiérement dévélopée, elle ne pourroit s'étendre au delà du point B qui lui sert de limite, & tous ses termes ne pourroient former que cette même ligne AB dont l'étendüe est donnée. Or AB consideré comme premier terme de la suite doit avoir à la somme de tous ceux qui le suivent le même rapport qu'il y a entre $AB - CB$ & CB. Ce rapport est connu, le premier terme est donné; la quantité qui résulteroit de cette suite infinie de conséquents sera donc connue, sans qu'il faille supposer qu'elle ait jamais pû recevoir tous ses termes possibles.

La position d'un dernier terme quelconque quoique supposé *prèsqu' égal a zéro*, nuiroit à la justesse du calcul. Soit xB (*fig* 5.) ce dernier terme. Donc $AB - xB = Ax$ re-

représentera toute la suite des termes suivants. Donc elle seroit bornée au point x; ce qui est contre la nature de cette progression qui doit passer le point x, & tendre à l'infini vers la limite B.

Tachons d'éclaircir les difficultés qui peuvent rester par l'application de cette Théorie à quelque exemple connu, telle qu'est la solution du fameux probléme de Zénon. Supposons, disoit Zénon, qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une tortüe, si la tortüe à une lieüe d'avance, jamais Achille ne pourra l'atteindre: car tandis qu'Achille parcourra cette lieüe, la tortüe fera la dixiéme de la seconde lieüe, & tandis qu'Achille fera la dixiéme de la seconde lieüe, la tortüe fera la dixiéme de cette dixiéme, & ainsi à l'infini.

Il y a deux maniéres de resoudre cette difficulté, l'une en tirant du rapport des vitesses des deux mobiles une équation, qui fasse connoître le terme où Achille doit atteindre la tortüe. Fesant donc une lieüe $= 1$ & nommant x le chemin que la tortüe aura parcouru lorsqu'Achille la rencontrera, on aura $1 + x$ pour exprimer le chemin de la tortüe, & comme Achille va dix fois plus vite, $10x$ exprimera le chemin parcouru en même tems par Achille, & par conséquent $10x = 1 + x$, & en réduisant $x = \frac{1}{9}$ de lieüe; ce qui fait connoître qu'au bout d'une neuviéme de lieüe, Achille atteindra la tortüe. Ce point sera par conséquent la limite, où la distance des deux mobiles allant avec les vitesses domées doit s'évanoüir, & où l'un doit par conséquent atteindre l'autre.

La seconde maniére consiste à déterminer la somme de la progression décroissante infinie $1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}$, pour voir le chemin que feroit la tortüe en supposant qu'elle parcourut l'une après l'autre toutes ces dixiémes de dixiéme à l'infini, & qu'elle seroit par conséquent la limite de l'espace, que toutes ces dixiemes devroient former par leur

reunion

réunion, en ſuppoſant que cet eſpace pût être diviſé par les pas de la tortüe en une infinité de parties ſous décuples. On fait donc cette proportion : comme le premier terme moins le ſecond, eſt au ſecond ; ainſi le premier terme moins le dernier eſt à la ſomme de ceux qui le ſuivent. Mais une progreſſion infinie ne devant point avoir de dernier terme, & ſa diſtance de la limite où elle tend pouvant diminuer au delà de quelque quantité que ce ſoit, quelque petite qu'on la ſuppoſe, on dira $1 - \frac{1}{10} : \frac{1}{10} :: 1 - 0$, ou ſimplement $1 : ſ$. d'où l'on tire $9 : 1 :: 1 . \frac{1}{9}$. Ce qui redonne préciſement l'eſpace x trouvé par la premiere méthode. Cette formule nous apprend que comme une lieüe, moins un dixiéme de lieüe, éſt à un dixiéme de lieüe, ainſi une lieüe eſt à une portion de lieüe, telle qu'on pourroit la diviſer à l'infini par une ſuite de diviſions, & de diviſions en parties ſous décuples; en ſorte que quand on pourroit dévéloper actuellement toutes ſes parties, & les réunir de nouveau, elles ne formeroient que cette même portion d'eſpace ou cette neuviéme de lieüe.

L'artifice conſiſte donc moins à trouver la ſomme d'une progreſſion par l'addition d'une infinité de termes, qu'à trouver d'un ſeul coup par des rapports connus la quantité finie qui eſt ſuſceptible d'une telle progreſſion.

C'eſt de quoi l'on ſe convaincra de plus en plus en liſant les judicieuſes réflexions, que l'Abbé Deidié ajoute à la ſolution du probléme de Zénon. „ L'argument de „ Zénon, dit-il, ne pouvoit conclure, qu'en ſuppoſant de „ deux choſes l'une, ou qu'Achille devoit emploïer une „ infinité de pas pour faire la premiere lieüe auquel cas „ il ne feroit jamais venu à bout de la faire; ou que les „ pas qu'il faiſoit en parcourant le $\frac{1}{10}$ du dixiéme, de„ venoient encore dix fois plus petits, & ainſi de ſuite, „ auquel cas il eſt ſur qu'il n'auroit jamais pû attein-

„ dre

„ dre la tortüe ...... mais comme l'une & l'autre de „ ces ſuppoſitions ſont auſſi ridicules qu'impoſſibles, n'y „ aïant point d'homme qui ſoit obligé de faire une infi- „ nité de pas pour faire une lieüe, ni dont les pas puiſ- „ ſent devenir de dix fois en dix fois plus petits à l'in- „ fini, il s'en ſuit que le raiſonnement de Zénon n'eſt „ qu'un ſophiſme &c. Mais me dirat-on peut-être, vous „ ſuppoſés que la tortüe puiſſe faire $\frac{1}{9}$ de lieüe, ce qui „ n'eſt pas poſſible, puiſque pour faire ce $\frac{1}{9}$ il faut par- „ courir une progreſſion infinie $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ &c., autre ſophiſme „ auſſi puerile que le premier. Si les pas de la tortüe al- „ loient en diminuant à chaque $\frac{1}{10}$ de la même façon que „ ces $\frac{1}{10}$, à la bonne heure, mais comme cette ſuppoſi- „ tion eſt chimérique, il eſt tout auſſi facile &c.

Ainſi tant s'en faut que la détermination de la ſomme d'une progreſſion décroiſſante infinie, ou ce qui revient au même de l'eſpace que cette progreſſion devroit parcourir en la continuant à l'infini, tant s'en faut, dis-je, que cette détermination dépende du dévéloppement actuel de tous les termes dont elle eſt ſuſceptible, qu'au contraire on n'y arriveroit jamais, s'il falloit y parvenir par la voye de ce dévélopement.

La Théorie des progreſſions n'eſt donc fondée que ſur des principes inconteſtablement vrais, que toute grandeur eſt diviſible à l'infini par une ſuite quelconque de diviſions, & de ſouſdiviſions en parties ſous multiples, que cette ſuite, & la progreſſion qui en réſulte pouvant continuer à l'infini, ne peut être bornée par aucun dernier terme, que dans ſon cours indéfini elle avance continuellement vers la limite où elle tend, ſans pouvoir s'etendre au delà, qu'en ſuppoſant enfin par une ſorte de fiction, que tous les termes dont la progreſſion eſt ſuſceptible, fuſſent actuellement dévélopés, l'aſſemblage de tous ces termes ne formeroit que la quantité même

qu'ils

qu'ils ont divisée, & qui les a produit par la division de ses parties. Mais cette Théorie ne suppose rien qui prouve la nécessité d'admettre la possibilité du dévélopement actuel d'une infinité de termes successifs, ou coexistants placés entre le premier terme de la progression & zéro; en sorte que la suite soit composée d'un nombre de termes actuellement infini.

DERNIERE PREUVE

Tirée des méthodes d'approximation.

J'Ose même dire qu'un probléme dont la solution dépendroit de ce dévélopement actuel, ou de la position d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier terme, & par conséquent infiniment petit, deviendroit par cela même impossible. La méthode des approximations à l'infini de la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré parfait, en fournit un exemple frappant, & sera une nouvelle preuve de l'impossibilité d'une suite composée d'un nombre de termes actuellement infini.

Il est démontré, que si un nombre n'est pas un quarré parfait, on ne sauroit en tirer la racine exacte, en nombres entiers ou rompus. Il est encore démontré que par une suite infinie de fractions, comme $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$ &c. emploïées suivant des méthodes connües, on peut approcher à l'infini de la racine cherchée, de sorte qu'en continuant l'operation, l'on trouvera toujours une valeur si approchante de la racine exacte, que la différence soit moindre qu'aucune quantité donnée, quelque petite qu'elle soit.

Cela ſuppoſé ſi cette ſuite de fractions pouvoit arriver à l'infini abſolu, c'eſt à dire à un terme infiniment éloigné du premier, & dont le dénominateur fut infiniment grand, la différence entre la valeur trouvée par cette approximation infinie, & celle de la racine cherchée deviendroit infiniment petite, & s'évanouiroit enfin. Donc l'on pourroit parvenir à la valeur exacte de la racine cherchée. Or les Géométres démontrent que cette valeur exacte eſt réellement impoſſible, il s'en ſuit que toute ſuppoſition au moyen de laquelle on y arriveroit, doit être cenſée impoſſible. Mais la ſuppoſition d'une ſuite de fractions pouſſée juſqu'à l'infini abſolu, donneroit cette valeur. Donc une telle ſuppoſition répugne. Et par conſéquent l'impoſſibilité abſolüe de trouver une valeur exacte de la racine en queſtion, prouve l'impoſſibilité de toute fraction dont le dénominateur ſeroit infiniment grand.

Ces réflexions me paroiſſent préſenter le dénouement d'un paradoxe apparent. S'agit-il de trouver une grandeur déterminée par l'évaluation d'une progreſſion décroiſſante infinie, le calcul la donne exactement. S'agit-il de trouver une grandeur déterminée par le moyen d'une approximation infinie, le calcul ne la peut donner avec exactitude. C'eſt que dans le premier cas, le calcul ne ſuppoſe point que la progreſſion puiſſe jamais recevoir tous les termes dont elle eſt ſuſceptible. Une grandeur donnée eſt le premier terme de cette progreſſion. Cette grandeur eſt diviſible à l'infini par une ſuite de diviſions & de ſouſdiviſions en une raiſon quelconque donnée; & les parties qui naiſſent de ces diviſions ſont les termes de la progreſſion. Cette même grandeur repréſente ainſi tous les antécédents qu'elle pourroit faire éclorre par une ſuite infinie de diviſions. Mais il n'eſt aucunement néceſſaire de s'embaraſſer dans toute la ſuite de cette

pro-

progreſſion. La grandeur donnée qui repréſente la ſomme de tous les antécédents, fait connoître auſſitôt une autre grandeur déterminée qui par une ſuite de diviſions dans la même raiſon feroit éclorre une ſuite proportionelle de termes conſéquents. Le rapport qui regne dans la progreſſion fait ainſi connoître la grandeur qui repréſente tous les conſéquents par la grandeur qui repréſente tous les antecedents.

Mais la détermination de la valeur exacte d'une racine cherchée par voye d'approximation ſuppoſeroit que le cours de la progreſſion fut épuiſé, & dépendroit de la poſition actuelle d'un terme quelconque infiniment éloigné du premier. Or puiſque la progreſſion pouvant aller à l'infini ſans aucune borne qui la limite, on pourra toujours avancer de plus en plus vers le terme cherché; mais comme elle ne peut jamais être entiérement épuiſée, l'approximation à l'infini ne peut non plus en donner la valeur exacte. On voit ainſi que les réſultats du calcul ſont parfaitement conformes à la nature des choſes.

Il ne feroit peutêtre pas impoſſible de faire l'application de ce principe à la rectification des courbes. Dans la rectification de la Cicloïde, par exemple, l'intégrale qui exprime la valeur de l'arc, préſente un rapport déterminé à la corde correſpondante du cercle générateur; rapport qui fait connoître que la demi cicloïde eſt double du diamêtre. Dans d'autres courbes où l'expreſſion de l'integrale donne un quantité dont la valeur exacte n'eſt pas d'abord déterminée par un rapport fini à une quantité finie, mais qu'on ne peut trouver que par le moyen des ſuites infinies, la rectification devient impoſſible. La détermination exacte d'un arc de courbe ne dépend donc point de la ſomme d'une infinité de différences ajoutées l'une à l'autre. La différentielle de l'arc de la courbe conſiderée comme côté d'un triangle infiniment

pe-

petit, sert à faire connoître en vertu de la ressemblance de ce petit triangle à un triangle donné, le rapport de position qui se trouve en quelque point que ce soit, entre la courbe, & une ligne donnée. De là le calcul intégral tire une valeur de l'arc exprimée par les mêmes signes qui expriment les autres variables. Si l'expression de cette valeur est telle qu'elle renferme un rapport fini à une de ces variables, on a par le moyen de ce rapport la rectification exacte de la courbe. Mais lorsque la détermination de la valeur dépend du dévélopement d'une suite infinie, & qu'on ne peut l'avoir qu'en supposant cette suite parvenüe à un dernier terme; elle devient impossible, & prouve par cela même que dans une suite quelconque le dévélopement actuel ne peut jamais s'étendre autant que le dévélopement possible, que ce qui reste à parcourir va toujours indéfiniment au delà de ce qui a pû étre actuellement parcouru; & qu'ainsi une suite infinie en puissance ne peut jamais recevoir son entier complément, ni parvenir par conséquent à l'infini absolu.

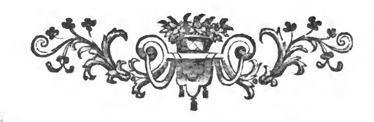
On n'éluderoit point la force des preuves que je viens d'exposer en refusant le nom de nombre à un assemblage absolument infini d'unités. Quelque nom qu'on veuille lui donner, il est clair que dans cet assemblage l'esprit pourra toujours fixer à volonté un premier terme quelconque, & passer sans interruption de l'un à l'autre en suivant la progression naturelle, sans que rien puisse la borner. Donc s'il existe un assemblage de termes absolument infini, il faudra toujours reconnoître qu'il y a un point dans cet assemblage où du fini l'on passe à l'infini. Donc si un tel passage implique contradiction, comme on a tâché de le faire voir, il faut conclure que tout assemblage composé d'une infinité absolüe de termes est réellement impossible, quelque nom qu'on lui donne

ou

qu' on lui refuſe. Donc toute hipotéſe qui tendroit à établir une multiplicité actuellement infinie de termes, ou de parties diſtinctes devra être cenſée par cela même impoſſible. Principe dont les conſéquences peuvent être de de quelque uſage dans la Philoſophie.

Je dois enfin avertir que l'impoſſibilité de l'infini actuel dans la grandeur, ou dans la quantité ſoit diſcrete, ſoit continüe, n'exclût aucunement l'idée de l'infini abſolu, en tant qu'attribut de l'être ſans reſtriction. Les Ecrivains les plus exacts ont toujours eu ſoin de diſtinguer l'infini métaphyſique de l'infini mathématique. M. de Fontenelle lui même reconnoît que l'infini métaphiſique, dont il dit que nous avons naturellement l'idée, ne peut s'appliquer ni aux nombres, ni à l'étendue. C'eſt de l'idée même de cet infini conſidéré de la maniére la plus abſtraite que dérive en quelque ſorte la puiſſance que nous avons d'augmenter par la penſée la grandeur à l'infini, en ajoutant unité à unité; de ſorte qu'il eſt toujours vrai de dire que l'infini en puiſſance ſuppoſe l'infini en acte, ainſi que je l'ay dit ailleurs. Mais ce ſeroit ſortir des bornes de ce mémoire, que d'entrer dans des diſcuſſions purement métaphyſiques.

ALGEBRÆ PHILOSOPHICÆ
IN USUM ARTIS INVENIENDI
SPECIMEN PRIMUM
LUDOVICI RICHERI.



TABULA CHARACTERISTICÆ

Technico-Philoſophice interpretata.

⋒ IMpoſſibile, contradictorium, impoſſibilitas, contradictio.

⋓ Poſſibile, poſſibilitas, mera non contradictio

∪ Aliquid, res, realitas late dicta.

∩ Nihil, negativum, merum, negatio ſtricte dicta

C

S	C	affirmative, poſitive		poſitiva
	Determinatum		Determinatio	
	Ɔ	negative		negativa

CƆ Indeterminatum

CƆ	ĊƆ	poſitive		poſitiva
	Determinabile		Determinabilitas	
	CƆ̣	negative		negativa

C̣Ɔ Indeterminabile

C·Ɔ	C·Ɔ	poſitive	
	Neceſſarium		Neceſſitas
	C·Ɔ	negative	

C· ·Ɔ Contingens Contingentia

Ṡ	Ṡ·	poſitive		poſitiva
	Mutabile		Mutabilitas	
	·Ṡ	negative		negativa

S̤ Immutabile Immutabilitas

§. I.

§. I.

& ⌒ *Impossibile, contradictorium, repugnans*
a non *a*
vel ◡ *Possibile, esse potest, non implicat*

Impossibilitas, contradictio, repugnantia
In abstracto Idem in aliis
Possibilitas, mere non contradictio

& & ⌒
Quod spectatur, ut esse, non esse — Quod est non est
vel vel ◡

§. II.

Non ⌒"⌒ observatione
dari & constat.
Tantum ◡ ◡ experientia
⌒ ◡
Hinc esse non potest
◡ ⌒

§. III.

⌒ nec nec ⌒ *Nihilum, negativum, merum,*
Hinc est, non est (1) confer §. 4. seq.
◡ vel vel ◡ *Aliquid, res, realitas,*

& nihil, impossibile
Quod est non est, est.
vel aliquid, possibile

Nihil

(1) Cl. Rudolph. Goglen Lexic-philosoph. hic.

Nihil & Non
est, non est. datur. ex §. 1.
Quodlibet vel Tantum *

§. IV.

non S *determinatum*, *determinatio*
a non *a* vel viceversa (2)
vel C *indeterminatum*, *non determinatum*

a, C *affirmative*, *positive*
S ad *Determinatum*
Non *a*, *negative*, *negatio late.*

§. V.

S & C
Hinc qua est argum. §. 2, 3
C, C

§. VI.

C, C est, est
Hinc Quod §. 2. Quod
non est, non est.
§. VI.

(2) Cl. Bulfing. in dilucid. Wolf. §. 82. Waller Nic. hic.

* In arte hac philosophandi naturali, simplicissimaque via universalissima & inconcussa scientiarum humanarum fundamenta ex quotidianis, & lucidis observationibus, & experientiis deducta, & nunquam satis expensa ad minima, & irresolubilia elementa reducuntur, & in populares velut, communesque notiores scientificæ cognitionis primitivas, & directrices resolvuntur mira determinationis, & connexionis simplicitate, & fæcunditate illustres. Confer. Christ. Wolf. in Hor. subsec. Marburg. De notionibus directricibus, & genuino usu Philosophiæ; ethices §. 796. & passim Leibnit. præcipue de Philosoph. prim. emend. in actis lipsi. Nicol. Concin. in orat. de Metaphis. Frobes differtat. cl. Jacquier &c.

§. VII.

S
CↃ CↃ, ĊↃ *Determinabile*, ĊↃ
(5)
S, signa vicaria ex CↃ
S
CↃ CↃ, C.Ↄ *Indeterminabile*, C.Ↄ

C, ĊↃ *positive*
ĊↃ ad *Determinabile* ergum §. 4.
Ↄ, CↃ *negative*

§. VIII.

CↃ
Hinc CↃ licet CↃ est tamen ĊↃ vel
CↃ *

§. IX.

---

(5) Carpovius de linguæ perfectione ubi de essentialibus in vicaria mutandis &c.

* In hac, utpote architectonica, velut per calculum qualitatum proprio marte inveniuntur veritates in philosophia non minus pura, quam in aliis scientiis adplicata. Elementis particularium scientiarum instructus, & arte hac inveniendi generali adjutus multa inveniet, quae ex aliorum scriptis non sine tædio, & temporis dispendio alias haurire vix posset, immo omnibus adhuc ignorata deteget. Non enim solum in mathesi, & scientiis naturalibus, sed & in cæteris etiam disciplinis novas, easque illustres veritates inveniendas superesse summis viris probatum, praesertim indefinita, confusa, incerta radicitus determinando, & connectendo. Huc spectant combinatoriae Leibnitii, algebræ philosophica Hookii, de dirigendo intellectu Lokii, medicina mentis Tschirnhausen, Cramer de J. Consulto Inventore cum Wolf. epist. gratulat. Wolf. ethic. §. 360.

§. IX.

non — CƆ *necessarium*, *necessitas* — non
ĊƆ, CƆ vel v[a] — (4) CƆ C Ɔ
vel — CƆ *contingens*, *contingentia* — vel

CƆ vel CƆ/CƆ si ad C/Ɔ ad characteristicæ combinationis præcisionem

§. X.

Hinc CƆ (CƆ CƆ / CƆ S), CƆ ĊƆ art. 55. a. a. a. seu CƆ qua (CƆ CƆ / CƆ CƆ) est

§. XI.

S ad C (ĊƆ / CƆ) Ɔ vel viceversa (Ṡ *mutabile* / Ș *immutabile*)

Hinc (*mutabilitas* / *immutabilitas*) ex C (CƆ / CƆ) Ɔ. S (ĊƆ / CƆ) ȝ

(4) Necessarium unico modo determinabile, unico modo possibile. Unicitas determinabilitatis rationem formalem necessitatis constituit, non vero immutabilitas secundum Scholasticos. Hinc ejus oppositum est impossibile, & aliter se habere non potest. Notiones utique veræ, non vero primitivæ definitiones. Necessitas nullam determinationem supponit, & possibilis ut indeterminati determinabilitatem determinat. Hinc necessarium est determinate determinabile: immutabilitas vero determinationem antecedentem supponit, & an ulterius determinabile sit, nec ne definit. Extra systema veri nominis facile, & circulum committere, & derivationes omittere.

Ṡ positive C
Ṡ vel mutabile si ab ad
Ṡ negative C

§. XII.

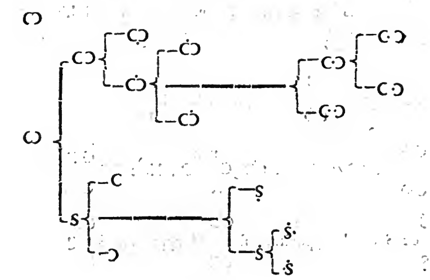
Hinc quae est Ṡ S Ṡ & Ṡ argum. §.§. ad §. 10. cit.
Ṡ

§. XIII.

Hinc est S Ṡ & viceversa &c.

SCIA-

* En perfectæ analyseos exemplum, ex quo intimius scrutanti patebit, quomodo cujuslibet dati principii resolutio, & reductio sit instituenda simplicissima connexionis via, & quomodo methodus naturæ cum methodo mathematicorum dicta perfecte sociari possit: in vera namque, naturali, & non interrupta veritatum concatenatione unum, idemque sunt: subtiliori philosophice pervidendi abstracta in concretis minus attendentes tenuitatis, inutilitatisque caussabuntur speculationum praecipue illarum, quae neque proxime in naturalibus, neque in civilibus usum sint habiturae: tantum tamen abest, ut naturam, subtilitate speculationum, maxime etiam sublimium artificiorum magistri superent, ut in quamplurimis ne adsequantur quidem. Infiniti casus sunt, in quibus nondum eo progressi sumus meditando, quo natura praeivit, & usus sequitur etiam civilis. Liceat ergo haec saltem spei, & voluptatis gratia adjungere.



$\frac{\cap}{\cup}$ ex ſubſequentium $\frac{C}{Ↄ}$ unione primitiva, velut eſſentialia

∪, & ∩ generaliter abſtrahendo, & veluti vicaria τῷ ∪, & ∩

S, & CↃ ex reſolutione τῷ ∪, analogice.

∪, ergo vel $\frac{CↃ}{S}$, S vero vel $\frac{C}{Ↄ}$ reſolvitur ſimplici combinatione

S
ĊↃ CↃ CↃ ĊↃ
vicaria τ ex CↃ sumta. Combinatio cum S; hinc
S
C.Ↄ CↃ CↃ CↃ

ĊↃ C
ĊↃ ergo vel ex analysi ad S vel
CↃ Ↄ

CↃ non C·Ↄ
ex CↃ S seu ex ĊↃ C Ↄ. Hinc C·Ↄ
C·Ↄ vel C·Ↄ

Ṡ ĊↃ CↃ
ex S quod supponitur, si ad oppositum S · ȿ
Ṣ C.Ↄ CↃ

Ṡ; quare vel Ṡ·, si Ṡ C
Ṡ Ↄ

En ergo CↃ, CↃ; CↃ vel CↃ, vel S; S vero vel C, vel Ↄ

Combinando CↃ cum S enascitur ĊↃ & vel ĊↃ, vel ĊↃ

Determinando ĊↃ CↃ oritur C·Ↄ, dein C·Ↄ

Determinatum vero si ad oppositum ĊↃ, Ṡ;

Ṡ· C
si non Ṣ; Ṡ vel ex Ṡ
Ṡ Ↄ

Huc

Huc apprime faciunt, quæ ad §. 51.Ontol. latinæ annotavit Philosophus summus Christ. Wolffius. Conquestus est Leibnitius de tenebris philosophiæ primæ, conqueruntur de iisdem vulgo tantum non omnes; & Leibnitius quidem jam monuit in Philosophia prima (utpote architectonica) magis luce, ac certitudine opus esse, quam in Mathematicis; atque ideo *singularem quandam proponendi rationem* necessariam judicavit, cujus ope non minus, quam euclidea methodo ad *calculi instar* quæstiones resolvantur . . . . Sed singularis illa proponendi ratio nodus est, quem nemo Philosophorum hactenus solvit, nec quomodo solvi debeat Leibnitius innuit, nedum docuit. Nulli tamen dubitamus quod beneficio supradictæ analyseos, & reductionis combinatoriæ nodum istum simplicissima, & universalissima ratione solverimus.

De arte combinandi veterum multi multa dixerunt, & eas explicare, ampliare, supplere tentarunt. Ingeniosi utique multum habent in suis circulis, cistulis, lampadibus combinatoriis, & in variis combinationum artificiis; ast determinationem, & derivationem merito desideres tum in notionibus, tum in signis; hinc eorum characteristica notionibus confusis, & minus determinatis superstructa, & signis non essentialiter derivativis, sed arbitrariis confecta, & tum pantosophicis, tum pantometricis principiis ex intima notionum natura deductis ad combinationes determinandas destituta tanquam inutilis fuit neglecta. Defectum connexionis combinationum confuse agnoverunt nonnulli; ast verae combinatoriae universalis fundamenta ignorarunt, idest notionum maxime universalium analysim, & reductionem ad primitiva, & simplicissima. Igquierdo in sua Pharo in hanc rem notat „ quod non advertunt combinationum ex datis terminis possibilium multas debere rejici tanquam inutiles in ordine ad faciendam scientiam; utpote quorum extrema, neque connexionem inter se, neque oppositionem, neque aliud necessitudinis genus &c. Acutissimus recentiorum Leibnit.fundamentum quod tunc juvenis in sua combinatoria (edita annis 1665., & 1668.) quam perficere non potuerat, neglexit, postea in actis lipsiensibus ad annum 1694. indicavit, quod jam olim pervidit Aristoteles categoriarum combinationem innuens: tametsi enim applausu non vulgari eruditorum fuerit exceptus (ars combinatoria) & novas complures meditationes non pœnitendas, quibus semina artis inveniendi sparguntur, contineat; atque inter cæteras palmariam illam *de analysi cogitationum humanarum in alphabetum quasi quoddam* (non chronologicum, sed genealogicum) *notionum primitivarum*, judicat tamen non satis esse limatum &c. act. erudit. lips. ad an. 1491.; postea vero in iisdem actis ad annum 1694. de philosophiae primae emendatione agens hæc innuit; itaque *peculiaris quaedam* proponendi ratio necessaria est, & tanquam filum in labyrintho, cujus ope non minus quam euclidea methodo *ad calculi instar* quaestiones resolvantur, servata nihilominus claritate, quæ nec popularibus sermonibus quidpiam concedat.

Ex his analysim philosophicam instituenti patebit, quaenam sit veræ algebræ philosophicae notio, dignitas, & usus, tanquam Kuhlmani methodica centralis, a qua cæteræ omnes pendent, & iterum in matrem suam se filiæ resolvunt; est namque haec ars inveniendi quaedam universalissima tum Philosophorum, tum Mathematicorum analysim sub se comprehendens, ut merito Ætiosophia, & Philosophia princeps, & architectonica sit salutanda. Nihil enim aliud sunt cæteræ scientiæ, quam Æthio-

§. XIV.

Ex antecedentibus conſtat de tranſitione.

O qua O/C,Ↄ eſſe S/CↃ & ĊↃ < C, ĊↃ / Ↄ, CↃ̇

ĊↃ vero < C·Ↄ / C·Ↄ Hinc S/Ṡ

S autem < S/Ṡ ſive ſit C/Ↄ

C·Ↄ/C·Ↄ & S/Ṡ eſſe velut per ſe S ex principio O/CↃ, ĊↃ vero < C/Ↄ

Hinc pro veritatibus C·Ↄ quærendum aliud principium (W *connexionis*) *rationis* , *convenientiæ* , *rationis ſufficientis &c.*

ſophia characteriſtica vel immediate, vel mediate adplicata, quod perſpicacioribus, & intellectu ſyſtematico præditis non eſt paradoxum, licet difficillimum; hinc tentandum mutuis auxiliis quid ferant humeri, quid ferre recuſent. Qui vero de his, ſive ex ſenſu proprio præoccupato, ſive ex turba auctoritatum ſtatuere, aut exiſtimare velit, ne id ſe in tranſitu facere poſſe ſperet, ſed ut rem pernoſcat, viam noſtram paullatim tentet, ſubtilitati rerum paullatim aſſueſcat, denique minus rectos, atque alte hærentes mentis habitus tempeſtiva, & quaſi legitima mora corrigat; & tum demum (ſi placuerit) poſtquam in poteſtate ſua eſſe cœperit judicio ſuo utatur. Hiſce fere Verulam.

Analysis enim veritatum C·Ɔ 'S finitur in principio ⊂⊃ & C·Ɔ Ṡ in se velut infinita

Nisi ad ens, O, omnimode S, C, C·Ɔ, Ṣ ipsius principii ⱳ alpha, & omega recurratur. *

§. X V.

ɣ *Ratio Caussa*, unde aliquid latissime est vel intelligitur.
℧ *Rationatum Causatum*, quod ex aliquo latissime est vel intelligitur. **

§. X V I.

Quæ sunt inter se ut ɣ & ℧ ⱳ *connexa*, *ordinata*
Quæ non sunt inter se ut ɣ & ℧ ⊂⊂⊃ *inconnexa*, *confusa*

h

* Hinc acute Leibnitius veritates C·Ɔ numeris rationalibus Mathematicorum, C·Ɔ e contra irrationalibus, surdis comparandas esse affirmabat, in quibus nisi ad simplicem primitivam unitatem recurratur, approximatione licet in respectiva unitate velut in infinitum producta, incommensurabilitas semper manet; cujuslibet enim datæ quantitatis, — sive numeri unitas simplex est mensura adæquata, non vero quælibet alia quantitas, seu numerus loco unitatis assumtus &c.

** Quomodocumque tandem sit. Notiones hæ antiquissimis, & scholasticis communes; dividebant enim caussam in genere in fiendi, essendi, & cognoscendi, & nihil ipsis erat sine ɣ analytica. Ex his derivandæ, & determinandæ innumeræ notiones principii, & principiati; primitivi, & derivativi, originis, fundamenti, adjuncti, dependentis, potentiæ activæ, & passivæ, seu facultatis, receptivitatis &c.

[symbol] cum [symbol] [symbol], [symbol] / [symbol] [symbol], [symbol] > [symbol] *concatenatio*

TA-

Hæc ſpectant quæ de nexu, ordine, harmonia, & muſica latius dicta paſſim apud antiquos licet indeterminate ſatis proponuntur bonum in ſenſum, & uſum convertenda; apprime enim obſervandum neceſſitatem [symbol] inferri non poſſe ex eo quod neceſſario dari debeat aliqua [symbol]. Aliud eſt [symbol] eſſe neceſſarium; aliud eſt neceſſario concipiendam eſſe [symbol] aliquam, quæ cum ſit C·Ͻ, vel C·Ͻ, exinde [symbol] erit C·Ͻ, vel C··Ͻ; hinc vel Ṣ, vel Ṡ

TABULA, ET RATIO CHARACTERISTICÆ *

[symbol] *Ratio* , *Causa*
latissime primitiva ex [symbol]
[symbol] *Rationatum*, *Causatum*

[symbol] *Connexa* derivativa ex [symbol] & [symbol] inversione
[symbol] *Inconnexa*

[symbol] *Connexio causarum*
[symbol] > [symbol] *concatenatio.* Derivata ex [symbol] [symbol]
[symbol] *Connexio causatorum* [symbol]

[symbol] [symbol] [symbol] [symbol] < S / C) < C /) < C·) / C·) < S / S &c.

§. XVII.

Quodlibet & [symbol] / [symbol] est, idest [symbol]

h 2 Hinc

* Sciagraphiam generalem, & combinationes principaliores speciminis ergo indicamus; cæteras iisdem insistens principiis quisquis inveniet, & non sine voluptate simplicissimam fœcunditatem experietur, quemadmodum ex secundo specimine constabit, ubi, Deo dante, algebræ philosophicæ theoriam omnem, & ejus adplicationes tentabimus, & tum demum de arte inveniendi universalissima judicium erit.

Hinc ω cum $\overset{\text{ꝿ}}{\underset{\text{ᴗ}}{}} > ΨΨ$

§. XVIII.

Omnia in mundo esse ω, ΨΨ, ordinata, harmonica, & nullam dari

insulam philosophicam passim apud Philosophos tum veteres, tum recentiores, notione connexionis in latissima significatione sumta. Nota sunt Ciceronis, Sancti Augustini, Scholasticorum verba; cum vero passim a scholasticis maxime in Physicis rationes obtruderentur nihil magis quam inintelligibiles; hinc acutissimus Cartesius dubitationem introduxit ad ꝿ seu rationes rerum intelligibili modo explicabiles introducendas; optime namque intellexerat omnia habere rationem convenientem, sufficientem suo modo saltem analogice, & convenienter. Hinc „ nulla res, inquit, existit, de qua non possit quæri quænam sit „ caussa cur existat; hoc enim de ipso Deo quæri potest, non quod „ indigeat ulla caussa, ut existat, sed quia ipsa ejus naturæ immensitas „ est caussa propter quam (ratio) nulla caussa indigeat ad existendum. Hujus principii distinctum, & adæquatum usum velut de novo proposuit, & introduxit Leibnitius Philosophus summus; rem postea confecit in variis philosophicis scriptis Aristoteles Hallensis magnus Wolff. Dolendum tamen quod eos sequuti novitatem inventionis, & demonstrationem nimium affectaverint in meram logomachiam, & circulum omnia abitura; quare perspicacissimus Leibnitius axiomatis instar assumendum esse contendebat, a Clarkio licet ad demonstrationem provocatus. *Non oportet enim in disciplinabilibus principiis inquirere propter quid . . . . . ex se ipsis enim fidem habent, non vero ex aliis, & ex ipsis alia demonstrantur*. Aristot. Hinc patet quid judicandum sit de novis demonstrationibus principiorum contradictionis, & rationis sufficientis Straheleri in examin. metaph. Wolff., & in dissert. de exist. Dei, & Hagenii in commen. de method. mathem.

Ex analysi §. 14. Duo dari debent, & dantur principia universalia cognoscendi, quibus positis rerum omnium intelligibilitas ponitur, iisdem sublatis tollitur. In universum tamen observandum cautionem in adplicatione adhibendam; præsertim si tum notiones, tum propositiones non satis determinentur, & determinate, ac primitive inter se connectantur &c. Bulffinger. in Dilucid.

§. XVIII.]

ఠ < S / CↃ Hinc & Ⴎ, ꞷ / ĊↃ

< C / Ↄ Ergo Ⴎ C / Ↄ inter & nulla ꞷ C / Ↄ

< C·Ↄ / C·Ↄ Hinc Ṣ / Ṡ

< Ṣ / Ṡ viceverſa. Hinc C·Ↄ / C·Ↄ

Ⴎ < S / CↃ < C / Ↄ < C·Ↄ / C·Ↄ ⁄ Ṣ / Ṡ . Idem de ꞷ C·Ↄ, / C·Ↄ, Ṣ / Ṡ &c.

§. XIX.

⊙ Exiſtentiæ, ſeu actualitatis ſignum

Ɔ ⊙, ὐ *ens* Quod eſſe poteſt exiſtens

CↃ ⋂ *non ens* non poteſt

ὐ

◡ < () / ◡) < S / CƆ < C / Ɔ < CƆ / CƆ < C·Ɔ / C·Ɔ < S / S < ᵕ / ᵕ < ω / m. *

◡ vel (), ◡ () eſt (), ◠ repugnat
◡), ◡ Hinc ◡) interne, & externe

S ſi eſt S quoad ⊙, exiſtit

< CƆ Eſt tamen ĊƆ

C Quod exiſtit & determinatum, & poſitivum eſt
< Ɔ Involvit (), ens fictum

ĊƆ Quodlibet ◡ qua tale eſt ĊƆ
< CƆ Repugnat ut ◡ (), ◡ Ɔ

C·Ɔ / C·Ɔ < Hinc Ṡ / Ṡ Hinc velut in ſe S / CƆ

< Ṡ / Ṡ Quare C·Ɔ / C·Ɔ ſive ſit ſit Ṡ; ſive Ṡ

ᵕ

* En combinationis characteriſticæ exemplum, cujus reſolutio, & ad principaliora reductio ex antecedentium connexa combinatione inſtituenda ſimpliciſſima, breviſſimaque via. Notandum tamen innumeras plurimorum Auctorum definitiones, & propoſitiones nihil aliud eſſe, quam puram putam rerum earundem ſub diverſis nominibus vagam, & ſterilem repetitionem, quod jam magnis Viris obſervatum & authopſi præſertim ex hac arte inveniendi probe patebit.

ɣ Ratio   essentia
    & in SS ن
ʊ Rationatum   accidentia

ω   Ordo   Veritas   Perfectio.
In SS ن.   Hinc   Hinc   Hinc
m   Confusio   Falsitas   Imperfectio.

OB-

OBSERVATIONS

SUR LE COURS DU PÔ

Avec des recherches sur les causes des changemens qu' il a souffert.

PAR M. CARENA

L' Art & la Nature ont également eu part aux changemens qui sont arrivés dans le cours du Pô, je me propose dans ce mémoire de fixer la quantité, & l'époque des plus considérables d' entre eux: j' ose me flatter que ces recherches, pourront paroître intéressantes, & que les réflexions que j' aurai soin de faire sur les causes de ces changemens, seront de quelque utilité à l' avancement de la Géographie Physique.

1. POLYBE compare la Région arrosée par le Pô à un triangle, dont la base est le rivage Adriatique, les Alpes, & les Apennins en sont le deux côtés. La longueur de la Chaîne principale des Alpes depuis le Col de Tende, jusqu' à l' extrémite du Golphe Adriatique est de 625 milles; (*a*) celle d' une partie des Alpes, & des Apennins depuis cette Montagne jusqu'à *Sinigaglia* est de 325; la base enfin, savoir la longueur de la voye Romaine, qui depuis cette Ville conduisoit le long de la Mer Adriatique jusqu' à *Trieste*, est de 375 milles. Elle a donc 1325 milles de

(*a*) Je substitue ces mesures à celles que donne le texte assez fautif de POLYBE au Liv. II.

Dans tout le cours de ce mémoire je fais usage des anciens milles Romains de 756 toises.

de circuit. STRABON donne à cette plaine 2100 ſtades (262 $\frac{1}{2}$ milles) de longueur ſur une largeur à peu près égale entre *Ancone*, & *Trieſte*. Il déduit cette dimenſion de celle des côtés du triangle décrit par POLYBE, dont elle fait la hauteur.

2. C'eſt une loi aſſez conſtamment obſervée par la Nature que les Montagnes qui ſe trouvent plus éloignées de la Mer ſont les plus élevées, & contiennent auſſi la ſource des plus grands fleuves. Celles de la Suiſſe, des Griſons, & du Vallais ſont les plus hautes de l'Europe, & c'eſt auſſi dans leur partie la plus élevée, que le Rhône, le Rhin, & le Téſin prennent leur naiſſance. La Chaine des Alpes qui de là s'étend à l'Eſt juſqu'à la Mer Adriatique, & au Sud juſqu'au Golphe de Lion, & qui va toujours en décroiſſant à meſure qu'elle approche de la Mer (*a*), ne fournit l'origine à aucun autre fleuve, qui ſoit auſſi conſidérable, que ceux dont nous venons de parler, ſi nous en exceptons le Pô; mais il eſt à remarquer que, quoique le Mont *Viſo*, dont il prend ſa ſource ſoit moins haut que celles, qui ſont plus avancées dans la même Chaîne, il l'eſt cependant beaucoup plus que toutes les autres Montagnes, qui lui ſont voiſines (*b*); c'eſt donc là un cas parti-

i culier

(*a*) SCHEUCHZER (*Mem. ſulle Mont. in tom.* IV. *Sagg. Tranſaz. Filoſ.*) a trouvé par des obſervations barométriques exactes, que la plus grande élévation du M. Adula ou de S. Gothard,. & des Montagnes voiſines peut aller à 1400 toiſes environ de hauteur perpendiculaire ſur le niveau de la Mer; & M. NEEDAM a trouvé de même que le partie de M. Tourné ſur laquelle il a pû faire ſes obſervations en a 1633., ſans conſidérer les hauteurs latérales qui ſont plus élevées; Le Mont Iſeran 1282. $\frac{1}{2}$; le Glacier ou le ſommet du Mont Cenis 434. De ces obſervations, & de ce que le M. Tourné eſt ſitué preſqu'au milieu de la Chaine des Alpes, il conclud, que cette montagne doit être la plus haute de l'Europe, & que c'eſt un erreur de croire que le M. Cenis & le M. *Viſo* égalent en hauteur les montagnes qui ſont plus avancées dans la Chaine.

(*b*) Ce qui a fait exprimer PLINE en ces termes: *Padus e gremio montis Veſuli celſiſſimum in cacumen elati viſendo fonte profluens*, L. III. c. XVI.

culier, qui rentre dans la régle générale, à laquelle il sembloit opposé.

3. Pline observe, que le Pô reçoit tout au plus trente riviéres, & Cluvier dit qu'il en reçoit quarante, dont quinze se dechargent sur la gauche, & les autres sur la droite de ce fleuve : tous les deux ont cependant raison ; car Pline ne prend en compte que les plus grandes; & de son temps après le *Réno*, le Pô ne recevoit plus que le *Santerno*: les autres fleuves déchargeoient leurs eaux dans la *Padusa*, marais qui s'étendoit le long de la droite du Pô depuis le *Réno*, jusqu'à *Ravenne*.

4. En général il reçoit plus de riviéres sur sa droite, mais il en reçoit de plus grandes sur la gauche; parce que la Chaîne des Alpes étant plus haute que celle des Apennins, ces Montagnes contiennent dans leur sein plus d'eau: & le lieu le plus incliné de la plaine se trouve plûs près des Apennins que des Alpes; ce qui fait que le cours de ce fleuve est plus éloigné de ces derniéres, & que la partie de la plaine qui est à sa gauche est plus grande que celle qu'est à sa droite (*a*); & les riviéres qui découlent des Apennins ayant moins de trajet à faire que celles qui viennent des Alpes, sont aussi reçues dans le Pô avant qu'elles puissent se reunir plusieurs ensemble.

5. Cinq des riviéres, qui se déchargent à la gauche du Pô, sortent des lacs enclavés dans les Alpes, que la Nature paroit avoir formé pour servir à en modérer la rapidité: car la pente des Alpes étant fort grande (*b*) les fleuves qui s'en précipitent surmonteroient souvent leur bords, & pro-

(*a*) *Universam planitiem ita (Padus) dividit, ut major longe pars ea sit, quæ ad Alpeis, & Hadriaticum sinum porrigitur. Polyb. L.* II.

(*b*) En général la pente des Chaines de Montagnes est beaucoup plus rapide vers le Sud que vers le Nord. Scheuchz. loco cit. Quant aux Alpes cela est confirmé par cette observation: du Mont S. Gothard à l'embouchure du Rhin il y a en ligne droite 450. milles, & de la même Montagne à l'embochure du Pô il n'y en a que 180. Donc la descente des Alpes vers l'Italie est de deux fois, & demie plus rapide

produiroient d'impéteuses inondations dans les plaines, si le courant des eaux n'étoit pas rallenti par ces réceptacles qui lui opposent une grande résistance, & leur permettent en même tems de s'étendre dans un espace horisontal, qu'on observe constamment être d'autant plus grand, que ces riviéres sont plus considérables, & que leurs cours est plus rapide: en effet on voit que le Lac de *Généve* qui est traversé par le Rhone & celui de *Constance*, qui l'est par le Rhin, sont les plus grands Lacs au delà des Alpes, de même que les plus grands en decà, sont le *Lac Majeur*, qui est traversé par le *Tésin*, celui de *Come* par l'*Adda*, & celui de *Garda* par la *Sarca*.

6. Le grand nombre de riviéres, qui vont décharger leurs eaux en assez grande quantité dans le Pò, le rendent non seulement le plus abbondant de l'Italie, mais selon PLINE il n'y en a pas d'autre qui à cours égal reçoive un plus grand accroissement. „ *Nec alius amnium tam „ brevi spatio majoris incrementi est. Urgetur quippe aquarum „ mole, & in profundum agitur, gravis terræ, &c.* Outre cette quantité, qui est à peu prés constante, les neiges dont ces Montagnes sont couvertes concourent encore à le faire grossir considérablement dans la saison des fontes, qui selon PLINE arrivoit au lever de la Canicule: „ *augetur ad canis ortum liquatis nivibus*: POLYBE disoit la même chose deux Siécles avant PLINE; *Fluit autem maximus, pulcherrimusque ad canis ortum, auctus liquatis nivibus in prædictis montibus*. Le lever héliaque de la canicule à Rome, où écrivoient ce deux Auteurs, se faisoit du tems de POLYBE le 29. de Juillet, & de celui de PLINE le premier d'Aoust: c'est en effet sur la fin de Juillet que la fonte des neiges produit cet accroissement dans le Pò; cependant le lever de la Canicule ne peut plus servir à en désigner le tems;

 car

(1) Ou *Sirius*.

car (à cause de la précession des équinoxes), il se fait aujourd' hui seize jours plus tard. Ce fleuve reçoit aussi d' autres accroissemens en automne, & au printems, qui sont produits par les pluyes qui tombent ordinairement dans ces deux saisons de l' année.

7. La longueur de son cours depuis sa source jusqu' à son embouchure est selon PLINE de 300. milles, ce qui est exactement vrai si on ne tient compte que de ses plus grands detours. La distance entre la premiére & la derniére embouchure étoit du tems de cet Ecrivain de 88 milles, & elle répond à celle qu' on trouve entre l' embouchure de la *Fossa Augusta* dans le Port de *Classis*, & celle de la *Fossa Clodia*, par laquelle le Pô mêloit ses eaux avec celles des deux fleuves *Medoaci*, & formoit le Port *Edro*. Il observe aussi que ce fleuve commence à être navigable à *Turin*; POLYBE est d'accord avec lui, en disant que les navires le remontoient par l' embouchure *Olane* l' espace de 250 milles, car cette distance porte entre cette ville & le confluent de la *Duria major*, où le Pô, selon PLINE commence à avoir une plus grande profondité. (*a*) Aujourd'hui on le remonte aussi au dessus de *Turin* jusqu' aux confluens de la *Vraita*, & de la *Maira*, mais le barques à voiles ne passent pas au delà du Pont. (*a*) Je joindrai à ces notions préliminaires sur les cours du Pô en général, deux mots sur les Nations principales qui ont peuplé la Région qu' il arrose, & dont l' industrie où la paresse ont contribué à ses changemens.

8. Les premiers Abitans de l' Italie étant venus par Terre, la Région arrosée par le Pô fut la premiére à être peuplée.

Ils

(*a*) Plin l, III. c. XVI.

(*b*) Les Celtes donnerent au Pô le nom de *Pades* dans la partie supérieure de son cours; Celui de *Bodding* dans l' endroit où il commence à être plus profond: c' est la partie du milieu; & à la méridionale des deux branches, dans lesquelles il se divisoit, celui de *Rédane*, dont j' aurai occasion de parler dans la suite.

Ils étoint Celtes d'origine; dans l'intérieur du Pays ils conserverent le nom d'*Ombri*, & sur les côtés il se donnerent celui de *Lli-gour* (hommes de Mer), Nom que les Latins changerent en *Ligur*, & *Ligures*. Les Tyrrhéniens abordés aux côtés de la Mer Inferieure chasserent ces Peuples de la Région entre le Tybre & la Macra, dix siécles avant l'Are vulgaire; ayant ensuite traversé les Apennins ils les obligerent à se rétirer vers les Alpes, & vers le haut Pô, & ils s'établirent des deux côtés du bas Pô jusqu'à l'*Adige*, ou les *Veneti* s'opposerent, & mirent des bornes à leurs conquêtes. Les Tyrrheniens Peuple industrieux & navigateur comme les Phéniciens, desquels ils tiroient leur origine, desfécherent des grands marais autour du bas Pô, & creuserent des longs canaux, qui ouvrirent au fleuve de novelles embouchures, ce qui rendit leur commerce sur la Mer supérieure très-florissant; mais les Gaulois descendus des Alpes, des l'An 600. avant l'Ere vulgaire, s'étant établis dans la plaine, les contraignirent à abandonner ces Régions.

9. Une grande partie de cette Nation méprisant l'agriculture, & le commerce, menoit une vie pastorale, & ne respiroit que la guerre; le Pô, & les autres riviéres de cette Région abbandonnés à elles mêmes surmontérent bien tôt leurs bords, & submergerent une partie de la plaine, que les Romains, qui les chasférent, & soumirent, ne parvinrent à desfécher en partie, qu'avec de très-grands frais; les soins que ces derniers apporterent pour reussir dans leur entreprise servent à nous donner une idée de l'importance de rendre durables ces ouvrages si utiles; car tandis qu'ils construisirent avec une solidite admirable leurs grands chemins, dont quelque partie en cotoyant les fleuves leur servoit de digue, ils creuserent plusieurs grands canaux, entre lesquels étoit fort avantageux celui, qui de *Ravenne* servoit à ouvrir la comunication entre les bouches du Pô, du *Tartaro*, de l'*Adige*, & des autres riviéres jusqu' à *Al-*

sino dans une longueur de 120 milles. (*a*) Mais les Nations Barbares qui ravagerent l'Italie dès la fin du IV. siécle, & qui s'y établirent dans les suivans, firent presq'un désert de ce Pays si peuplé & si fertile: le reste des abitans opprimés dans l'esclavage ne pût inspirer que fort tard à ses Maîtres farouches le gout de l'agriculture, de la navigation, & des arts utiles; c'est alors que les riviéres, & les canaux comblés du limon qu'ils charioient de ces plaines, déborderent de tous côtés, & en submergerent de nouveau une grande partie: les Peuples s'étant enfin policés, & les Pays repeuplé on vit les Villes de la Lombardie dès le siécle XI. dessécher les marais, batir des nouvelles abitations sur les lieux que les eaux laissoient à découvert, & creuser des canaux qui en ranimerent le commerce, & en arroserent les campagnes.

10. Deux Chaînes de Montagnes, qui du M. *Viso* s'étendent vers la plaine à l'Est dirigent le cours du Pò vers cette plage jusqu'à ce, qu'étant sorti des collines; la pente générale de la plaine déterminée par la courbure des Alpes du Sud au Nord en dirige le cours de ce côté; enfin dans le lieu, où la plaine est le plus retrécié par la continuation des Alpes maritimes (*b*) d'un côté, & des Alpes Grecques, & Pennines (*c*) de l'autre; il est obligé de reprendre sa premiere direction.

11. Ces grandes courbures, toujours dépendentes de celles des Montagnes, en allongeant le cours des fleuves, diminuent la vitesse qu'ils acquereroient nécessairement, s'ils déscendoient directement à la Mer du sommet des Montagnes dont ils tirent leur origine; ce qu'on doit considérer comme une très-grand avantage, car ces fleuves coulant avec une trop grande rapidité, se creuseroient bien tôt des

(*a*) L. III. c. XVI.
(*b*) Les collines du *Monferrat*.
(*c*) Les collines du *Canavez* qui bordent la *Doira Bautia* jusqu'à *Massé*.

des lits profonds au dessous du niveau des terres, & deviendroient par là peu propres à la navigation & à l'arrosement des campagnes. Quant à leurs petits détours dans les montagnes, ceux, qui sont déterminés par leurs angles saillans & rentrans, qui multiplient les réactions, & diminuent l'inclination du plan, font perdre aux eaux une partie de la vîtesse qu'ils ont acquise dans la déscente; & qui produiroit de grands dommages dans les plaines, qu'ils vont parcourir; ceux qu'ils se creusent dans les plaines par l'inegalité & par l'éterogéneité du sol, qui offre plus ou moins de résistance à leur mouvement, ne produisent pas des avantages egaux; car au contraire ils les endommagent souvent par leurs variations. C'est à l'art de perfectionner la nature, où cela est aisé. Mais la théorie n'a pas encore été entiérement établie sur ses vrais principes; & l'on voit souvent faire à la pratique des efforts inutiles.

12. La partie de la plaine qui est plus proche des montagnes a une pente plus rapide que celle qui approche davantage de la mer, & les fleuves au sortir des montagnes ont encore une grande partie de la vîtesse acquise par la déscente; or après qu'ils ont déposé à leur pied les grandes pierres qu'ils en ont détaché & roulé dans les Vallées ils se déchargent des plus petites, jusqu'à ce que le mouvement devenant beaucoup moins rapide, ils déposent le sable: mais comme il est encor trop grand pour que le limon, qu'ils commencent à charier en rongeant les plaines, puisse se séparer & se précipiter au fond de leurs lits, loin d'en être élevés, ils se creusent davantage; il s'ensuit delà que les changemens qu'ils subissent pendant un certain espace ne se font que par corrosion: c'est ce qui arrive à cette prémiere partie du cours du Pô dans le Piémont proprement dit.

13. Concevons les eaux du fleuve parvenues à l'entrée d'une plaine, elles se creuseront un lit dans la partie la plus basse; &

si dans le long espace qui leur reste à parcourir, elles trouvent un sol gras & fertile, elles se chargeront de limon, pour le déposer un peu plus bas, quand leur différens détours & le peu de pente de la plaine, leur auront fait perdre suffisamment de leur vitesse : le fond du fleuve se réhaussera donc insensiblement, & les eaux surmontant leurs bords se creuseront de nouveaux lits sur la partie de la plaine latérale qui est la plus basse ; si la mer est encore beaucoup éloignée, & que par quelque résistance dans le sol, le fleuve ne puisse y porter droit ses eaux, ces nouveaux lits se réünissent à l'ancien : voilà des isles formées par les branches du fleuve, qui quittera encore par la même raison ces nouveaux lits pour rentrer dans les anciens, ou pour s'en creuser d'autres. Cette plaine réhaussée dans les endroits plus bas, facilite encore ces changemens ; puisque le fleuve ne s'écoulant plus dans une vallée, mais sur une plaine assés unie & rendue de niveau par les différentes couches de limon, dont le sol a été couvert à plusieurs reprises, en inonde une grande partie, submerge les Villes, & les campagnes, & y forme des marais & des lacs. Le Fleuve qui au commencement ne debouchoit dans la mer que par une seule embouchure, y ayant déposé beaucoup de limon est ensuite obligé de se diviser, d'où il se forme des isles d'une figure triangulaire dont un côté est baigné par la mer, & les deux autres par les branches des fleuves : le limon successivement déposé fait de nouveau subdiviser le fleuve & il se forme de nouvelles isles ; ces nouvelles branches enfin qui divergent entr'elles, se réünissent aux prémieres, d'où il résulte d'autres divisions. C'est par ces différentes variations, que se font les prolongations du continent : & que s'il se trouve dans la mer des isles, qui soient proches du fleuve, elles sont enclavées & réünies au continent qui s'avance vers elles.

14. Tout

14. Tout ce que nous venons de dire eſt arrivé à notre fleuve ; les faits principaux, que j'ai recuelli à cet effet, en fourniſſent les preuves les plus convaincantes ; je commencerai donc par prouver l'exiſtence de ces isles, que des Auteurs très-anciens nommoient *Eléctrides* , & qu' ils plaçoient à l' embouchure de l' *Eridan*. STRABON & PLINE (*a*) les y cherchoient envain de leur tems ; & l' *electrum*, ou l'ambre n'étoit plus connû ſur les bords de l'*Eridan* ; mais quoiqu' ils euſſent raiſon de trouver abſurde qu'elle pût être produite par les peupliers , qui en bordoient les rives ; il eſt cependant certain qué dans des tems plus reculés on trouvoit cette ſubſtance près de ce fleuve , & que les isles *Eléctrides*, qui en prirent le nom , exiſtoient vis-à-vis de ſon embouchure ; car ARISTOTE (*b*) dans ſon livre *des choſes merveilleuſes* les décrit ſi particuliérement qu'on n' en ſçauroit revoquer en doute l' exiſtence. Il nous apprend qu'il y en avoit deux , & qu'elles étoient ſituées dans le fond du Golphe Adriatique vis-à-vis de l' embouchure de l'*Eridan* ; qu'il y avoit un lac prés de ce fleuve, dont l'eau chaude exhaloit un odeur ſi puante, que les bêtes refuſoient d'en boire , & que les oiſeaux en le traverſant y tomboient morts (*c*) ; ſa circonférence étoit de 200. ſtades (25. milles), ſa largeur de 10. (1. ¼ milles) ; ſa longueur étoit par conſéquent d' environ dix milles (*d*) .

  15. THÉO-

(*a*) STRAB. lib. V. PLIN. lib. XXXVII. cap. II.

(*b*) Ce livre eſt déja cité ſous ſon nom par des Ecrivains de la cour de PTOLOMÉE PHILADELPHE.

(*c*) On peut voir dans PLINE lib. II. c. 93. pluſieurs exemples ſur ces exhalaiſons dans l'Italie. Un lac ſemblable eſt celui d'*Ampſancte*, aujourd'hui *Muffiti* au deſſous de la Ville de *Fricento*.

(*d*) L'Abbréviateur d'Etienne de Bizance, & TZETZE ſur *Lycophron* en parlent auſſi. SOTION, Auteur Grec aſſès ancien, dans les fragmens du livre *de flum. font. ac lac. miraculis*, aſſure que *circa Eridanum eſt lacus prope Electridas Inſulas aquam habens calidam, gravis odoris , quam nullum animal deguſtat*.

15. THÉOPOMPE, qui fit plusieurs ouvrages de (a) Géographie estimés par les Anciens, parloit de ces Isles dans une déscription de la mer Adriatique, qui est citée par le Géographe SCYMNUS de Chio (b). APPOLLONIUS de Rhode Bibliothéquaire de Ptolomée Philadelphe, dans son poëme des Argonautes, dans lequel il fait usage d'anciennes piéces de Géographie assès exactes, dit que l'Isle *Eléctride* étoit la derniere de celles, qui se trouvoient dans le Golphe Adriatique, & qu'elle étoit proche de l'*Eridan*. La fameuse expédition des Argonautes, qu'il y fait parvenir, est de l'an 1353. environ (c). DÉDALE y fit deux Statues, dont une étoit d'étain & l'autre d'airain, on a rapporté à ARISTOTE qu'elles existoient encore dans cette Isle. Il paroit même, qu'on en conservoit le souvenir dans les prémiers siécles de l'Ere vulgaire; car AGNELLUS qui écrivoit les vies des Archevêques de *Ravenne* dans le IX. siécle parle d'un endroit dans le territoire de *Comacchio*, acquis par l'Evêque AURÉLIEN vers le 520., qu'on nommoit le Champ *des Idoles* près de l'Eglise de S. Marie de *Pado veteri*, où l'on bâtit depuis le Monastère de *Pomposa* (*Voiez la Carte.*).

16. L'examen des circonstances de la vie de DÉDALE me donne l'an 55. avant la prise de Troye (d), qu'un savant Chronologiste a fixé à l'an 1284. (e), c'est-à-dire l'an 1339. avant l'Ere vulgaire, pour l'époque de son arrivée dans ces Isles; cette époque est la même que celle de l'arrivée des PESLAGES Théssaliens, qu'ARISTOTE assûre en avoir chassé ce fameux Artiste. Ils y bâtirent une Ville à laquelle ils donnerent le nom de *Spine*; nom qui est tiré de

la

(a) Il vivoit du méme tems qu'ARISTOTE, dans le IV. siécle avant l'Ere vulgaire.
(b) In *Periegesi*.
(c) PAUSANIAS lib. 9.
(d) DIOD. SIC. lib. 4. PLUT. in Theseo.
(e) FRERET Nouv. Observ. Chron. P. I.

la nature du sol de l' Isle, sur laquelle elle fut fondée, & non de celui de l'embouchure du Pô, comme le prétend DÉNYS d'Halicarnasse (*a*); puisqu'au contraire la Ville donna son nom à l'embouchure (*Spinétique*) (*b*). En effet ARISTOTE décrit un sorte de pierre (c'est un espèce de pyrite) qui s'enflammoit lorsqu'on la brisoit, & qu'on nommoit *Spinus* (*c*). Les bains chauds de la *Porretta* sur le bord du *Réno* au midi de *Bologne* (*d*) sont formés par les eaux, qui sortent en grande quantité d'un rocher de même nature. Lorsqu'on frappe ces pierres on en voit sortir des étincelles, dont le nom grec Σπίντηρ dérive par conséquent de celui de Σπινε qu'on doit suppléer dans le *Thesaurus linguæ græcæ* d'HENRI ETIÉNNE: PLINE (*e*) assûre que si on laissoit tomber un charbon allumé dans le territoire *d' Aricia* la terre s'enflammoit, que dans la *Sabine* & dans le territoire de *Tiano* une sorte de pierre prenoit feu lorsqu' on l'oignoit: cette région autour du bas Pô abonde en sources sulphureuses, & sans parler des célébres bains chauds d'*Abano*, dans le territoire de *Comacchio*, il y avoit encore au VI. siécle un endroit, qui s'appelloit *Ignis*, *&* *Bajas*, situé entre l'Eridan & la Volane (*f*).

PLINE assûre que dans les Apennins au Sud de Bologne l'an 91. avant l'Ere vulgaire, à la vûë d'un grand nombre des Chevaliers Romains, deux grands rochers s' entrechoquérent si rudement & avec un si grand bruit que la fumée & la flamme s'en éleva au Ciel, & que dans leur

I 2 chûte

(*a*) Antiq. Rom. lib. I.
(*b*) PLIN. lib. III. C. XVI.
(*c*) Lib. de Mirandis.
(*d*) LE'ANDRE ALBERTI qui les vit en donne cette déscription: *Escono queste acque calde in grande abbondanza, di sapore salso, da un alto sasso di minera di zolfo. Sopra il gran sasso veggonsi in quà e in là uscire alcune fiammette di fuoco, ivi accendendosi la terra; e spento il fuoco vedesi germinar essa terra, e produrre erbe. Mette capo nel Reno quest' acqua, onde non è meraviglia se l'acqua del Reno è tanto sana a beverla.* Pag. 338. Il dit aussi, qu'au Sud de *Bologne*, près de *Pietramala*, on voit un trou, dont il sort continuellement de grande flammes. pag. 323.
(*e*) Lib. II. c. 82. (*f*) AGNELLUS loc. cit.

chûte ils écraſerent pluſieurs Villages (*a*) : **Plutarque** dit que dans le Païs habité jadis par les Celtes, un globe de feu (où un bloc de matiére en feu) lancé en l'air dans une eruption, tomba dans l'Eridan, & s'y éteignit (*b*). **Valerius Flaccus** nous apprend la même choſe par ce vers :

Acer & Eridani trepidum Globus ibat in amnem.
Argon. l. V. v. 430.

Voilà l'explication d'une partie de la fameuſe fable de *Phaëton*. Les bornes de mon ſujet ne me permettent pas d'y inférer ici mes recherches ſur la premiere partie de cette ancienne tradition d'une embraſement qu'éprouva la terre, & ſur ſa cauſe : je les reſerve à une autre lieu. Les Poëtes ayant trop défiguré cette tradition, la rendirent abſurde ; & pour cela **Strabon**, **Pline**, **Diodore** de Sicile la rejettent abſolument ; **Polybe** n'en décide rien ; **Lucien** dans ſon *Dialogue de l'ambre*, avec ſa naïveté ordinaire la tourne en ridicule, mais dans le *Dialogue de l'Aſtrologie* il tâche d'en donner une explication morale. Les ſentimens des Mitologiſtes ſont partagés ſur ce ſujet ; mais c'eſt ſans le moindre fondement que nos Hiſtoriens, trompés par les impoſtures d'**Annius** de Viterbe, ont prétendu trouver dans *Phaëton* le fondateur de Turin.

17. **Apollonius** de Rhode (*c*) dit que l'eau du lac, dans lequel tomba Phaëton à demi brûlée, en fut ſi infeƐté, que les oiſeaux, qui y voloient deſſus, n'en pouvant ſupporter

(*a*) Lib. II. c. 83.
(*b*) **Tzetze**, *Chiliad.* IV. n. 137. après avoir expoſé le Conte des Poëtes ſur Phaëton, dit :

Plutarchus autem ſolvit naturalius :
Globum igneum tetra coltica erupiſſe,
Extinctum autem, cum in fluenta Eridani incidiſſet,
Hiſtoriæ mentionem facit (in libro) : *quantum examen externorum?*
m. lib. V. v. 596. &c.

rer la puanteur, y tomboient morts; & que quand elle débordoit par le souffle du vent impétueux, *tunc* (*electri guttæ*) *in Eridanum provolvuntur frequenter cunctæ, æstuanti fluxu.* Le nom de *Lago-scuro* que conserve un Village entre *Ferrare* & le *Pô grande*, déja nommé *Lacus obscurus* dans des anciens chartres, indique précisément le lieu où étoit l'étang ou lac obscur (κέλαινῆς λιμνης), dont cet Auteur fait mention, & qui fut dans les siécles suivans comblé par le limon du fleuve, surtout depuis que la branche, qu'on appelle *Pô grande*, creusa son lit de ce côté.

18. Dans la campagne sulfureuse entre *Cume* & *Pozzuolo*, appellée par les Anciens *Phlegræus Campus*, l'an 1538, après des grands tremblemens, on vit la terre s'ouvrir & jetter une si grande quantité de pierre enflammées & de cendres, qu'il s'en forma une montagne de 4. milles de circuit, & le lac *Lucrin* en fut presqu'entiérement couvert (*a*). ARISTOTE (*b*) nous apprend comment dans la même campagne s'est formée la *Solfatara*; cet Auteur en parlant des tremblemens de terre, donne la déscription d'une espèce plus particuliére (& qu'on peut à plus juste raison appeller un Volcan), laquelle se fait quand la terre après s'être alternativement gonflée & rassise, s'ouvre enfin & élance une quantité de pierres: *Un de ces tremblemens*, dit-il, *bouleversa le Champ Phlegrée, de même qu'une Région Ligustique.* Ces dernieres paroles regardent l'origine des fameux *Campi Lapidei* qu'on appelle aujourd'hui le *Crau* entre Marseille & le Rhône; les circonstances fabuleuses, dont les Anciens l'enveloperent, racontant (*c*) que Jupiter avoit fait pleuvoir une nuée de pierres sur les Liguriens *Albion* & *Bergion* fils de Neptune, tombent aisément : le nom de *berg* signifioit dans la langue Celtique une montagne, & celui d'*Al-*

(*a*) V. LEAND. ALBERTI *Descriz. Ital. edit. an.* 1581. *p.* 177.
(*b*) METEOR. lib. II. cap. VIII.
(*c*) MELA lib. II. cap. V. APOLLOD. *de Diis* lib. II.

d'*Alben* ou *Alpen*, une montagne fort haute: deux montagnes baignées par la mer s'étant donc ouvertes par la force d'un volcan, élancerent une prodigieuse quantité de pierres, qui retombant, couvrirent une étendue de Pays (*a*), & abîmerent plusieurs peuplades de *Liguriens*, qui l'habitoient.

19. Celle des deux Isles *Eléctrides*, sur laquelle les Théssaliens batirent la Ville de *Spine*, semble être sortie de la mer par la force d'un Volcan. PLINE en dénombre dix dans l'Archipel, qui sortirent de cette maniére, parmi lesquelles celle de *Therasia* aujourd'hui *Santorini*, qui en sortit l'an 237. avant l'Ere vulgaire, porte toutes les marques de l'action du feu; on en vit sortir une autre à côté de celle-ci l'an 1709. Dans les mers d'Italie, *le Vulcanello* (rocher entre l'Isle de *Lipari* & celle de *Vulcano*), l'Isle d'*Ischia*, celle da *Procida*, & une autre qui sortit dans la mer de Toscane, l'an 206. avant l'Ere vulgaire eurent la même origine (*b*). Ces Isles sont toutes hérissées de rochers; or telle étoit selon APOLLONIUS de Rhode l'Isle *Eléctride* (*c*).

20. Le Géographe SCYLAX, qui écrivoit vers l'an 500. avant l'Ere vulgaire (*d*), mais qui s'est servi dans la déscription des côtes de l'Italie de mémoires d'environ un siécle plus anciens, dit que la Ville de *Spine* étoit située près du fleuve de même nom, qu'on remontoit pour y parvenir l'espace de 20. Stades (2. $\frac{1}{2}$ milles). Les Géographes EUDOXE & ARTEMIDORE, au rapport d'ETIENNE de Byzance (*e*) avoient écrit sur cette Ville & sur le fleuve *Spinus*. C'est le fameux *Eridan* des Grecs & des Latins. HÉRODOTE (*f*) révoqua en doute l'existence d'un fleuve de même nom dans les mers septentrionales, soupçonnant que

(*a*) De 12. milles de long. sur 10. de larg.
(*b*) PLIN. lib. II. cap. 87.
(*c*) *In Insulam asperam Electrida ferebantur.* Argon. lib. IV. v. 581.
(*d*) Herod. lib. IV. c. 44.
(*e*) V. Σπίνα.
(*f*) Lib. III. c. 115.

que ce nom, qui lui fembloit Grec, eut été forgé par les Poëtes ; & STRABON nie abfolument qu'il y ait jamais eu de fleuve de ce nom, & de l'ambre à fon embouchure. Cependant quoique PLINE (*a*) foit d'accord avec lui fur ce point, il affûre neanmoins que l'embouchure *Spinétique* étoit autrefois appellée l'*Eridan* (*b*). Les Grecs qui commerçoient à *Spine* connoiffoient cette branche du Pô fous le nom d' H'ειδανὸς, & leurs anciens Poëtes, qui célébrent *Phaëton*, imités par les Latins, l' étendirent à tout le fleuve. Mais ce nom étoit Celtique, & le Celtes ne le donnoient qu'à cette branche, qui fe divifoit à *Codrea* (*c*) fur la droite. Ce lieu dans lequel on trouva quelques Infcriptions qui en confirment l'antiquité étoit encore appellé dans le fiécle XI. *Caput de Reda* (*d*), & PRISCIEN dans fes Antiquités de *Ferrare* affûre que le Pô ne fe divifoit pas à *Ferrare*, mais quelque mille au-deffous, à *Codrea*, qui avoit ce nom parceque la branche du Pô qu'on nommoit *Eridane* prenoit de là fon commencement (*e*). Plufieurs fleuves dans les païs abités par les Celtes avoient un nom femblable, & j'obferve que le long du cours de chacun il y avoit des fources chaudes, & qu'on trouvoit de l'ambre jaune aux embouchures de quelques uns d'entr'eux. Le fleuve *Rérone* qui coule par la Ville de *Vicence* étoit anciennement appellé *Reteno* (*f*) ; dans le fiécle X. il confervoit encore le nom de *Retone* (*g*) & *Retrone* ; les Vicentins & les Padouans, qui creuferent dans leurs territoires plufieurs canaux dans le fiécle XII. & fuivans, en changerent beaucoup l'ancien cours : fe

(*a*) Lib. XXXVII. c. II.
(*b*) L. III. c. 16.
(*c*) V. la Carte.
(*d*) Dipl. an. 1031. apud MURAT. Antich. Eftenfi P. I.
(*e*) V. ALBERTI Défcr. Ital. p. 342. b.
(*f*) VENANT. FORTUN. in Vita S. Martini.
(*g*) Dipl. apud UGHEL. Ital. Sacr. in Epifc. Patav. & Cremon.

se déchargeoit autrefois dans le lac d'*Anguillara*, ou de *Vigazuolo*; ÉLIEN (*a*) décrivant la pêche des anguilles, qui se faisoit dans ce lac, nomme le fleuve Ηρετηνός (*Eretenus*). Or à la gauche de ce fleuve il y a les fameux bains d'*Abano* : le long du *Rhin* & du *Reno* il y a aussi des sources chaudes. Le *Rodaune*, fleuve qui se décharge sur la gauche de la *Vistule* à trois milles de son embouchure, & qui par la variation des dialectes est appellé *Raddune* & *Reddune*, est l'Ηρίδανος, dont on avoit raconté à HERODOTE, qu'il se déchargeoit dans la mer septentrionale (*b*). Il y portoit autrefois ses eaux, & on recueille encore en grande quantité l'ambre jaune, que la mer rejette sur une langue de terre voisine. Après qu'on ne trouva plus cette production près de notre *Eridan*, les Grecs, & les Romains ensuite, la tiroient des peuples de ces païs septentrionaux (*c*). La *Duna*, sur laquelle on la chargeoit pour la transporter dans le *Borysthène*, où les Grecs alloient l'acheter, étoit aussi appellée *Rhudon* (*d*). On a vû ci-dessus les eruptions des Volcans à la droite du *Rhône*, dont l'ancien nom est Celtique; ARISTOTE (*e*) décrit un lac bouillonant dans la *Ligurie* aux environs de *Marseille*; son disciple THÉOPHRASTE assûroit, au rapport de PLINE (*f*), qu'on recueilloit de l'ambre dans la *Ligurie* (*g*), & que les vagues de la mer la rejettoient sur le Cap du *Pirenée*; au Sud de ce Cap opposé aux embouchures du *Rhône*, une Ville portoit un nom semblable (*Rhode*, aujourd'hui *Roses*); & PLINE fait mention d'une Ville de *Rhoda*, qui étoit jadis à la droite de l'embouchure du *Rhône*, qu'il suppose mal à pro-

(*a*) Histor. Animal. l. 14. c. 8.
(*b*) Lib. III. c. 115. CLUVER. Ital. Ant. l. I. c. 34.
(*c*) CLUVER. German. Antiq. l. III. c. 34. &c.
(*d*) MARCIEN HERACL. in Peripl.; V. BAYERI Differt. de Venedis &c. in tom. VII. Acad. Petrop.
(*e*) In lib. de Mirandis.
(*f*) L. XXXVII. c. 2.
(*g*) Ces deux Auteurs nomment *Liguria* le païs que les Ligures abitoient aussi au delà des Alpes.

à propos avoir été bâtie par les Rhodiens (*a*). Si cet Auteur n'ajoutoit pas foi à THÉOPHRASTE & à XENOPHANE sur cette production dans ces lieux, & nioit aussi bien que STRABON & plusieurs autres anciens, qu'il y en eut jamais eû à l'embouchure de notre *Eridan*, c'est parcequ'il jugeoit de ce qui étoit autrefois, sur ce qu'ils voyoit de son tems ; mais de même que le limon porté par le *Rhône*, en formant l'Isle qu'on appelle de *Camargue*, détourna de la mer les sources de l'ambre : celui qui fut porté par l'*Eridan* détourna celles qui étoient le long de son cours. C'est ce qu'on apprendra ensuite de la recherche sur la prolongation du continent.

21. Du tems de STRABON, c'est-à-dire environ l'an 18. de l'Ere vulgaire, la Ville de *Spine*, que cet Auteur reconnoit avoir été maritime, étoit située dans le continent à 90. stades (11. $\frac{1}{4}$ mill.) environ de distance de la mer ; d'où je conclus, que dans les VI siécles, qui s'écoulérent entre le tems des mémoires suivis par SCYLAX (V. n. 20. p.), & celui de STRABON, le fleuve porta à cette embouchure tant de limon, que le continent en fut prolongé de 9. milles, ce qui fait un mille tous les 66. ans. Or en faisant une proportion entre ces tems & les espaces donnés par ces deux Auteurs, il résulte, que l'an 933. cette Ville étoit encore baignée par la mer, & que l'an 1334, vers lequel comme on a vû ci-dessus, on la bâtit, elle étoit éloignée d'environ 9. mille de l'embouchure de l'*Eridan*. En suivant cette proportion je trouve que la distance entre l'emplacement de la Ville de *Spine*, & l'ancienne embouchure de l'*Eridan* étoit de 12. milles au tems de l' embrasement de *Phaëton*, qui arriva dans le siécle XXII. avant l'Ere vulgaire, & en remontant plus haut, je trouve même le lieu de l'ancienne côte aux environs de l'embouchure du Pô au tems du Déluge, dont l'époque, selon le calcul que je fais sur le texte Samaritain, est de l'an 3045. avant l'Ere vulgaire,

(*a*) Lib. III, c. 4.

c'est-à-dire de huit siécles anterieure à l'embrasement de Phaëton : ces huit siécles donnent environ 13. milles pour la prolongation du continent.

22. Ces deux positions dépendent de celles de la Ville de *Spine*, que je vais tâcher d'établir. Les vestiges de cette Ville sont submergés dans le *Marais de Comacchio* ; Spreti (*a*), qui écrivoit au commencement du xvi. siécle, assûre que de très-anciens chartres en faisoient mention, & dit qu'il y avoit encore de son tems un endroit à la gauche du *Primaro*, qui portoit le nom de *Volta di Spina*. Les Marais n'avoient pas encore submergé tant de païs : ils n'avoient que 12. milles de circuit, selon Alberti, qui nous apprend aussi qu'au milieu de ce siécle xvi on voyoit encore quelques restes de cette Ville dans l'endroit, qu'on appelloit *Dorso di Spina* : ce nom fait voir qu'elle avoit été bâtie sur un endroit élevé, & que le limon du fleuve qui l'environnoit, n'avoit pas encore réhaussé le sol au niveau de cette hauteur ; qu'elle par conséquent avoit été un' isle qui s'élevoit en pointe au-dessus des eaux de la mer (*b*) ; que cette isle enfin réünie au rivage voisin, qui ne surpassoit que de peu le niveau de la mer, conservoit sur lui presque toute son élévation. L'attention que ces deux Auteurs ont fait à ce que dit Strabon, qu'elle étoit éloignée de 11. milles de la mer, sert à prouver qu'il en étoit de même de leur tems : car si elle en eut été plus ou moins éloignée, ils n'auroient pas manqué de l'observer, & de nous l'apprendre, vûe l'exactitude avec laquelle ils ont donné la déscription de ces lieux : or les milles dont se servent ces Auteurs sont d'un cinquiéme plus longs que les anciens milles Romains ; donc ces 11. milles sont égaux à 13. $\frac{1}{5}$ milles Romains, qu'on trouve précisément sur la Carte de Magin entre le *Porto di Primaro* & la *Punta di Humana*. La Ville

(*a*) De Orig. & Amplit. Urb. Raven. l. 1.
(*b*) V. les Cartes de la Géogr. Phys. de M. Buache.

Ville de *Spine* étoit donc située près de cet endroit. A 9 mille de là on a le lieu de l'embouchure de l'*Eridan* pour l'an 1334; à 12 milles, celui de l'embouchure au tems de l'embrasement de *Phaëton*, & cette distance porte à *Consandolo*; enfin à 13 milles on a le lieu de la côte après le Déluge à un mille environ au-dessus de *Codrea*.

23. Par tout ce que je viens de dire il est pleinement prouvé que les *Isles Eléctrides* ont réellement existé, & que le limon porté par le fleuve, les joignit au continent, & le prolongea de 45. milles dans 3045. ans qui se sont écoulés depuis le Déluge jusqu'au tems de STRABON: qu'on cessa de trouver de l'ambre sur l'*Eridan* depuis que le même limon eut comblé le lac salé, dans lequel l'acide du sel marin durcissoit cette substances sulfureuse, qui y découloit abondamment des entrailles de la terre: qu'en séparant enfin les circonstances fabuleuses que l'imagination des Poëtes a ajoûté à la tradition de l'eruption d'un Volcan près de l'*Eridan* & de la chûte d'une masse enflammée dans ses eaux, on y découvre un phénomène qui donne des grandes lumiéres à la Géographie physique & à l'Histoire. Je décrirai maintenant en particulier la prolongation formée par toutes les branches du Pô, & les changemens qui sont arrivés soit dans leur cours, soit dans la quantité de l'eau qui y couloit.

24. Du tems de STRABON le Pô étoit divisé en sept branches depuis environ six siécles, & pendannt l'intervalle de tems qui s'est écoulé depuis cet Auteur jusqu'au XII siécle, dans lequel le Pô commença à couler par la branche *Pô grande*, le continent ne fut prolongé que de peu à l'embouchure de l'*Eridan*; mais il étoit déja étendu au delà de l'emplacement du Village de *S. Alberto* (*a*); car au rapport de l'Auteur d'une Chronique de *Ferrare* (*b*), il

(*a*) Voyez la Carte au lieu marqué *Insula Pyreti*.
(*b*) Publiée par MURATORI, *Rer. Italic.* Tom. VIII. p. 474. &c.

y avoit en cet endroit un pont fur le Pô, qui joignoit le grand chemin de *Ravenne* ; & ce grand chemin étoit le même, que celui qu'AUGUSTE fit paver depuis *Rimini* jufqu' à *Ravenne* (a), & qui delà traverfant toutes les embouchures du Pô conduifoit jufqu' à *Altino* ; cet Empereur avoit de même fait creufer le canal, qui portoit fon nom, & qui couloit de la branche *Spinétique* au-deffus du pont (b); & *Ravenne* de ce tems-là étoit encore baignée par la mer, qui y entroit dans le flux par les canaux, qui l'entrecoupoient (c); mais au commencement du VI. fiécle elle en étoit déja éloignée d' $\frac{3}{4}$ de mille (d). Le Roi ODOACER en fit creufer un au nord de cette Ville peu de tems après, qu'il y eut établi fa réfidence en 476; ce canal joignoit celui d' AUGUSTE à une branche du Pô fur laquelle on navigeoit encore dans le fiécle XIV. (*Voyez la Carte*) (e). Plufieurs Auteurs du moyen âge nomment cette branche *Baderinus* (f), ou *Fluvius Padenæ* (g); fon vrai nom étoit *Paderenus* : le même Roi fit bâtir fon palais de *Blacherne* dans l' isle formée par cette branche, ce qui fait voir, que le fôl en étoit affez folide & fpacieux. Le *Paderenus* couloit de l' *Eridan* (h) vers *Ravenne*, & il fe joignoit fous fes murailles au canal d'AUGUSTE, qui avoit traverfé cette Ville (i). L'Auteur de la Chronique de *Ferrare*, qui écrivoit vers la fin du XIV fiécle, affûre que de fon tems il y avoit 7. milles entre cet endroit, & le Port de *Primaro* ; les milles dont fe fert cet Au-

(a) JORNANDES de reb. Gothic. c. 52.
(b) Chron. Ferrar. loc. cit.
(c) STRAB. lib. V.
(d) PROCOP. de Bello Goth. lib. I.
(e) Chron. Rav. Rer. Ital.
(f) PAUL. DIAC. Hift. Lang. lib. 3. c. 19.
(g) Chron. Rav. ibid. & Papyr. du fiécle VIII. à la fuite de l'*Iftoria Dipl.* du *Maffei* n. XV.
(h) Un peu au-deffous du Village de *S. Nicolo*. Chron. Fer. ibid. Voyez la Carte.
(i) AGNEL. loc. c.

Auteur font aux anciens milles Romains comme 7. à 8. ½ Dans les Cartes de l'Italie, que MAGIN a composées au commencement du dernier siécle, il y a environ 9. milles Romains anciens entre ces deux endroits; donc le *Pô de Primaro* n'avoit pas prolongé le continent dans ces deux siécles. (*a*) Mais depuis ce tems la Mer semble avoir regagné dans cet endroit sur le continent; car dans la carte de l'état Ecclesiastique des PP. Boscovich & le Maire on ne voit plus la prolongation formée par le Primaro & dessinée dans la Carte du Magin, ni les deux isles, & les deux bancs de sable vis-à-vis de cette embouchure (*voyés la carte*). Cette discussion sur la longueur du continent confirme la position de la Ville de *Spine* (v. §. 22.).

25. Selon PRISCIEN PELLEGRIN (*b*) le village de *Consandolo* étoit appellé *Caput Sandali*, parce que dans cet endroit il se séparoit de la gauche de l'*Eridan* une branche nommée *Sandalus*, qui couloit vers le village, qui porte le nom de *Sandalo*. Le même Auteur (*c*) décrit ailleurs un ancien canal, appellé *Fossa Bosia*, qui depuis *Consandolo* portoit une partie des eaux du *Primaro* dans le Pò *di Volana* à *Médélane*; (*voyes la carte*) c'étoit l'ancien lit du *Sandalo*, qui prit ce nom d'un certein *Bosius*, qui le fit nettoyer. Il semble (v. §. 22.) que ce fut dans le tems de l'eruption de plusieurs Volcans le long du Pò, qu'il se divisa en ces deux branches. On a vû que la premiére division du Pò se faisoit à *Codrea*, dont la branche à la droite étoit l'*Eridan*; l'autre étoit appellée *Sagis*, selon PLINE, qui nomme son embouchure *Sagis Ostium*. Il dit que la *Olane* étoit la premiére des suivantes, que l'art avoit creusées. (*d*) L'eau ayant

(*a*) RUBEUS (Hist. Rav. lib. 5.) qui écrivoit sur la fin du XVI. siécle compte 18. milles entre Ravenne & l'embouchure de Primaro; ce qui revient au même.
(*b*) Cité par ALBERTI *Descr. Ital.* pag. 392. 6.
(*c*) Rapporté par MURATORI *Piena esposiz. dei diritti Imp. ed Estensi ec.*
(*d*) Lib. III. c. XVI.

ayant abondé dans cette derniére, & presque manqué dans la *Sagis*, le nom d' *Olane* fût donné à la première partie de cette branche, & le nom de *Sagis* ne lui resta que du lieu de sa division d' avec la *Olane* jusqu' à la Mer. Ses vestiges sont marqués dans la Carte de MAGIN avec le nom de *Gorgadello*, & selon CLUVIER (*a*) quelque peu d' eau couloit encore de son tems, c' est à dire au commencement du dernier siécle, de la *Volane* près du lieu de *Marozze*. La Table Théodosienne marque un lieu *Sagis*, dont la position tombe au même endroit, où ces deux branches se divisoient. POLYBE (*b*) ne fait mention d' aucune autre branche du Pò que de la *Padusa*, (c' est le nom qu'il donne à l' *Eridan*, le long duquel s' étendoit au Sud la *Padusa Palus* des anciens), & de l' *Olane* parcequ' elles étoient de son tems les plus considérables. La branche qui se divise à la droite de *Ferrare* n' exista que depuis le commencement du siécle VIII. de l' Ere vulgaire: les Ravenniens la creuserent pour se défendre de leurs ennemis, & la nommérent *Fossa*, & *Padus Fossæ* (*c*); aujourd'hui on l' appelle *Pô di Ferrara*, ou *Pô morto* à cause du peu d' eau qui y coule (*voyez la carte*). Cette premiére division du Pò à une petite distance de l' ancienne côte, confirme l' époque du deluge, & ce que j'ai établi au §. 13.: que le limon porté par le Pò à son ancienne embouchure, devoit en peu de tems l' obbliger à se diviser; le flux de la Mer contribue le plus à ces divisions proches de l' embochure: le fleuve, qui après avoir èlevé son lit rompt ses bords, creuse les autres, qui en sont plus éloignées.

26. De la gauche de l' *Eridan* se divisa aussi dans la suite une branche qu' on appelloit selon ALBERTI, *Vergens fluvius*, aujourd'hui le *Vergenese*, qui est presque sans eaux &

(*a*) Ital. Antiq. lib. 1. c. 35.
(*b*) Lib. II.
(*c*) V. Agnel. *in vita Felicis*, & ALBERTI pag. 343. 6,

& se perd dans les marais de *Comacchio*. Son ancienne embouchure, que PLINE appelle *Caprasiæ ostium*, est la même que celle qu'on appelle Porto di *Magnavacca*. Ces trois branches sont les seules dans lesquelles le Pô se divisoit. Avant que de passer à décrire les autres branches & canaux à la gauche de son cours, je dois rendre compte d'un autre effet considerable produit par ce prolongement de continent, c'est-à-dire de cette suite de marais qu'on appelloit anciennement *Padusa*, & qui desséchés dans quelques lieux; & plus étendus qu'autrefois dans d'autres, ont pris différens noms.

25. *Ravenne* avoit été bâtie sur plusieurs Isles, & au premier siécle de nôtre Ere, elle tenoit déja d'un coté au continent (§. 24.) cinq siécles aprés, selon PROCOPE; elle étoit éloigné de la Mer de 250. pas; les flottes, & les armées de terre n'en pouvoient que difficilement approcher; les premiéres arrêtées par les bancs de sable, qui s'étendoient dans la Mer jusqu'à 30 stades, ou $4.\frac{2}{7}$ milles (*a*); les dernieres par le Pô par les autres fleuves navigables, & par les étangs, dont cette Ville étoit environée. Les eaux de la Mer dans le flux entroient dans les canaux, & se répandoient aussi loin qu'un homme peut marcher dans un jour; (*b*) on proffitoit de ce tems pour la navigation. Cela arrivoit non seulement à *Ravenne*, mais le long de la côte jusqu'à *Aquilée*. Les Romains (*c*) après qu'ils conquirent sur les *Ombriens* la Ville de *Ravenne*, en perfectionnerent le Port, & POMPÉE y établit une flotte (*d*), qui gardoit la Mer supérieure & celles du Levant (*e*). Ce Port étoit si vaste que du tems d'AUGUSTE 250 Galeres y demeu-

(*a*) Sept des stades de PROCOPE, & des Auteurs du bas Empire, font le mille. V. l'*Analyse de l'Italie* de M. d'ANVILLE.

(*b*) Les anciens, selon Vegece l'étendoient pour les troupes jusqu'à 24. milles.

(*c*) PROCOP. de bello Goth. lib. I.

(*d*) Cicer. pro L. Manil.

(*e*) Veget. lib. V. c. I.

meuroient en ſtation (*a*); du nom Latin de flotte on l'appella *Portus Claſſis*. Le grand commerce, qu'on y faiſoit peupla beaucoup la ville *de Ravenne*, & celle de *Claſſis* qu'on bâtit à trois milles au Sud de *Ravenne*. Entre ces deux Villes, ſur la *Via Cæſaris*, qui les jognoit, on bâtit depuis celle de *Cæſarea*. (*b*) Ces trois Villes entouroient ainſi de trois côtés le Port. Vers l'Eſt il y avoit un'Isle ſur laquelle s'élevoit un célébre *Phare* ſemblable à celui d'*Alexandrie*. (*c*) Ce Port fameux avoit déja été tellement comblé par le limon dans le ſiécle VI. qu'un Auteur de ce tems (*d*) dit que les arbres, fruitiers plantés dans des jardins ſpacieux, occupoient la place des arbres des vaiſſeaux, qu'y flottoient autrefois. Dès le IV ſiécle ce Port n'étoit plus fréquenté: car les flottes Impériales relâchoient toujours depuis ce tems au *Portus Eridani* (*e*) formé par l'embouchure du *Paderenus*, (*f*) après avoir reçu le canal qui traverſoit la Ville.

28. Ce canal contenoit au milieu du V ſiécle deux parties de l'eau de la *Foſſa Auguſta*, la troiſiéme couloit dans un autre canal, qu'on en avoit diviſé au moyen d'une grande digue de pierre, (*g*) & qui ſervoit de foſſé à la Ville vers l'Oueſt pour la défendre de ce côté, où les marais laiſſoient un petit paſſage, au rapport de JORNANDES, qui écrivoit au milieu du VI ſiécle. La ville de *Ravenne* ainſi ſituée aux milieu des eaux bravoit la fureur des Barbares; c'eſt pour cela que les Empereurs d'Occident après THÉODOSE I. y firent preſque toujours leur reſidence, de même que le Roi ODOACER, qui y ſoutint un ſiége de trois ans con-

(*a*) DIO apud JORNAND. de reb. Gothic. c. 52.
(*b*) JORNAND ibid.
(*c*) PLIN. l. 36. c. 12.
(*d*) FABIUS apud JORNAND. c. 52.
(*e*) AGNEL paſſim.
(*f*) Au commencement du VI. ſiécle on avoit déja bâti un autre *Phare*, où eſt aujourd'hui *la Rotonda*, qui en prit le nom de *Monaſterium ad Pharum*.
(*g*) Sidon. Apollin. lib. 1. epiſt. 8.

contre le Roi THÉODÉRIC: le premier après qu'il se rendit Maitre de cette Ville en 476, avoit fait creuser le Canal appellé *Fossa Asconis*, qui jognoit le *Padus-Renus* à la *Fossa Augusta*; (*voyés la carte*), & il en fit à cette occasion creuser un autre (l'An 490) depuis la Mer, où étoit le *Pinetum* (*a*) jusqu'au Pont *Marmoreus*. (*b*) L'eau qu'on conduisit dans ce canal étoit celle du fleuve *Bedesis*, qui après avoir coulé entre *Ravenne*, & *Césarée*, débouchoit dans le Port de *Classis*; une autre branche de ce fleuve se déchargeoit dans le même Port, après avoir coulé entre *Césarée*, & *Classis* sous le nom de *Fluvius Pantheon*. Il fournissoit aussi l'eau à *Ravenne* dans un aqueduc que le Roi THÉODÉRIC fit réparer (*c*), d'où on lui donna dans le moyen âge le nom d'*Aquæductus*, changé depuis en celui de *Ronco*; mais dans les Montagnes il conserve celui de *Bédése*. Ce fleuve & le *Montone* appellé anciennement *Utens*, & *Vitis* (*d*) qui se déchargeoit autrefois dans la *Padusa*, & tous ces canaux trop multipliés comblerent de limon le ports de *Ravenne* les uns après les autres, de sorte que les isles & bancs de sable décrits par PROCOPE, & celles qu'on voit dans la carte de la *Romagne* de Magin, furent jointes au continent, & la Mer sur la fin du XVI. siécle étoit déja éloignée de *Ravenne* de 4. milles, (*e*) distance qu'on trouve aussi sur la Carte des PP. BOSCOVIC & le MAIRE.

29. Parce que j'ai prouvé ci devant, que le rivage de la Mer étoit anciennement au dessus de *Codrea*, on voit, que tous les fleuves depuis le *Réno* jusqu'à *Ravenne* se déchargoient autrefois dans la Mer, qui baignoit alors ces Pays, qui sont le long de la droite du *Primaro*. Or tandis

m.

(*a*) Bois du Pin qu'Auguste avoit fait planter pour la flotte. Rub. hist. Rav.
(*b*) Il semble qu'il ait été sur le fleuve *Bédésis*.
(*c*) CASSIODOR. in Chron.
(*d*) LIV. lib. v. PLIN. l. III. c. 15.
(*e*) RUB. Hist. Rav.

dis que le Pô prolongeoit le continent d'un côté, les fleuves le prolongeoient de l'autre, & remplissoient de limon le long Golphe compris entre les bords du Pô ainsi prolongés, & cette ancienne côté, le long de laquelle ils avoient leurs embouchures. Le *Santerno*, qui en est un des plus considérables, parvint à former une langue de terre jusqu'à l'*Eridan*, avec lequel il conflua, en coupant en deux ce Golphe, dont la partie, qui fût enclavée dans le continent, est le lieu le plus bas des marais entre ce fleuve, & le *Réno*, qui empêchent les riviéres de la *Legation de Bologne* de se décharger dans le lit du Pô de *Primaro* élevé de plus en plus sur ces marais par le limon, que le fleuve déposa dans le cours de tant de siécles. L'autre partie du Golphe fût aussi separée de la Mer par le limon des branches *Messanicus*, & *Paderenus*, qui prolongerent le continent jusqu'à *Ravenne*, tandis, que de l'autre côté les isles sur lesquelles cette Ville étoit bâtie y étoient jointes de la maniére qu'on a vû au §. précédent. Le *Messanicus* ayant élevé son lit, répandoit les eaux dans les marais à sa droite, qui en prirent le nom de *Padusa*; AUGUSTE le fit creuser de nouveau pour le rendre navigable jusqu'à *Ravenne*. Le *Paderenus*, dont l'embouchure est celle que PLINE appelle *Vatreni ostium*, parvint à se joindre vers le siécle IV. a ce canal d'AUGUSTE au delà de *Ravenne*. Il s'en détacha dans la suite une branche, qui par la nouveautée de son cours fut appellé *Padus Juveniacus*: des chartres du X. siécle en font déja mention: c'est la partie inférieure du Pô de *Primaro*. Mais enfin les riviéres depuis le *Santerno* jusqu'au *Montone* ayant rempli de limon ces marais, ne trouverent pas de résistence à s'ouvrir plusieurs embochures dans la Mer; car la *Fossa Augusta* comblée de limon n'étoit plus navigable dès le siécle VI., & la voye Romaine, qui lui servoit de digue, étoit peu-à-peu ensevelie sous le sol, qu'il rehaussoit.

30.

30. Les autres soit branches du Pô, soit canaux depuis la branche *Sagis*, furent creusées par les Tyrrhéniens, qui détournerent le gros des eaux du fleuve dans les marais d'*Adria* appellés *Septem Maria* (*voyés la carte*). (*a*) Après la branche *Volane* il y avoit quelques embouchures, que PLINE appelle *Ostia plena*. Le lieu de *Co-di-goro* prit son ancien nom de *Caput Gauri*, d'une branche qui se détachoit de la *Volane* avec le nom de *Gaurus fluvius*; Il semble qu'elle ait été appellée anciennement *Neronia Fossa* (*b*), car la Table Théodosienne à quatre milles de *Sacis* marque *Neroma*: la position de *Corniculani*, qu'elle marque à six milles en deça d'*Ariano* tombe au passage du *Gaurus*. A six milles de *Co-di-goro* il y a le Village de *Mezzo-Goro*, ainsi appellé parceque quand on le bâtit, il étoit à égale distance entre le commencement du *Goro*, & son embouchure. Cette branche à si fort prolongé le continent, qu'elle a aujourd'hui le double de cours. Sur la fin du XVI. siécle le Duc ALPHONSE II. de *Ferrare* fit bâtir au rivage de la Mer la maison de *Plaisance* appellée la *Mésola*: (*c*) aujourd'hui elle en est éloignée de huit milles; mais l'eau a presque manqué dans cette branche. Le Pô d'*Ariano* & les branches suivantes sont nouvelles. Celle que PLINE appelle *Carbonaria*, est la branche qui coule du Village de *Corbola*, où les distances marquées dans la Table Théodosienne portent la mansion ad VII. *Maria*; cette branche avec la *Fossa Philistina*, & le flevue *Tartaro* prolongerent beaucoup le continent, & y enclavérent les Isles formées par une chaîne de collines, & entr'autres celle, où est bâti *Loreo*, *Lauretum*, qu'on trouve dès le VII. siécle dans le nombre des lieux, qui dans les lacunes de *Vénise* avoient échappé à la domination des

m 2 Lan-

(*a*) PLIN. lib. III. c. XVI.
(*b*) Creusée peut être par ordre de l'Empéreur CLAUDIUS NERON qui à son retour de la conquête de la Grande Bretagne s'embarqua sur le Pô. V. DION. CASS. lib. 60. & PLIN. ibid.
(*c*) RUB. Hist. Rav. lib. VI.

Langobards. PLINE parle du célébre Port d' *Atria*, dont les Tyrrhéniens, fondateurs de cette Ville, se servoient pour faire sur la Mer supérieure un commerce si grand, qu'elle en prit son nom d'*Atriatique*, changé depuis en celui d'*Adriatique*. Près de cette Ville, qui vit peu-à-peu s' enlever la Mer & le commerce, il y a vers le Sud un petit marais, isolé, (*a*) qui semble avoir été ce fameux Port comblé par le limon, qui en éloigna la Mer de treize milles.

31. La *Fossa Philistina*, dont le nom indique une des Nations Phéniciennes, qui composoient la Nation connüe par les Grecs sous le nom de *Tyrseni*, fût creusée par ce Peuple, pour enlever, à ce qu' il semble, aux Thessaliens de *Spine*, avec l' eau de trois anciennes branches du Pô, le commerce, & la défense naturelle qu'ils trouvoient au milieu des eaux. Ce qui leur réussit: & les Thessaliens furent contraints de se retirer dans la Grece. (*b*) Ce canal conduisoit l' eau du Pô jusqu' à *Adria*; PRISCIEN en décrit les vestiges depuis *Castelnuovo*, où il se détachoit du Pô, jusqu' à *Cerignano*, & *Mezana*, (*c*) où le fleuve *Tartaro* y mêloit ses eaux pour déboucher dans la Mer (*voyés la carte*). Mais dans le tems des Romains les eaux couloient de nouveau en abbondance dans la *Volana*, & dans l' *Eridan*; soit qu' Ils eussent reglé la distribution entre ce deux branches, & la *Fossa Filistina*, à fin qu' elles fussent toutes navigables; soit que le Pô pour avoir coulé du tems des Tyrrhéniens trois, ou quatre siécles en plus grande abondance dans cette derniére, en eut élevé le lit, & distribué de nouveau une plus grande quantité de ses eaux dans le deux premiéres; car du tems de POLYBE l'embouchure *Olane* formoit un Port des plus surs de la Mer *Adriatique*, & l' embouchure *Spinetique* du tems de PLINE en formoit

(*a*) *V. Carta del Polesine di Rovigo del* BONIFAZIO.
(*b*) DIONYS HALIC lib. I. STRAB. lib. V.
(*c*) V. ALBERTI pag. 352. b.

moit un d'assez grande capacité ; l'Empereur CLAUDE déscendit sur un grand navire dans l'Adriatique par cette branche ; & au IV. siécle les troupes Romaines embarquées à *Ostiglia* déscendoient encore par cette branche & par la *Fossa Augusta* jusqu' à *Ravenne* (*a*). Depuis le tems des Romains l'eau alla en décroissant dans la *Fossa Philistina*, qu'on trouve encore désignée comme le confin de plusieurs campagnes dans quelques chartres avec le nom de *Pelestina*, ou *Pelestrina* ; & elle cessa d'y couler du Pô depuis le XII siécle ; ses vestiges conservent le nom de *Pistrina*.

32. La direction de ces branches du Pô fait voir que la partie de la plaine, où couloient le *Sagis* & l' *Eridan*, & qui en étoit au commencement la plus inclinée, du tems des Tyrrhéniens avoit déja été élevé par le limon au-dessus de cette partie, qui est à la gauche du cours de la prémiere ; ce qui est aussi prouvé par la direction du cours de l'eau dans cette suite de canaux creusez par les Romain, sur lesquels, selon PLINE, on navigeoit de *Ravenne* jusqu'à *Altino* ; l'Itinéraire d' *Antonin* marquoit aux troupes Romaines cette navigation (*b*), que CASSIODORE décrit dans une lettre aux Tribuns de la marine de la Province *Venetia*. Ces canaux étoient fort-importans dans ces tems anterieurs à l'invention de la boussole, dans lesquels on craignoit de perdre de vüe les côtes : dans les mois orageux on navigeoit en grande sûreté sur ces canaux (*c*) ; il auroit été fort dangereux de côtoyer le rivage de la mer aux embouchures du Pô, à cause du courans & des bancs de sable, qui varioient beaucoup, & qu'on ne connoissoit pas trop. Entre *l'Eridan* & la *Volane* (*voyez la Carte*) continuoit la *Fossa Augusta* près d'un lieu de même nom, &

(*a*) Tab. Theod. segm. IV. edit. Vindob. 1753.
(*b*) *Ravenna : Inde navigantur septem maria Altinum usque.*
(*c*) *Cum ventis sævientibus mare fuerit clausum, via vobis panditur per amœnissima fluviorum &c.* CASSIOD. *Var.* lib. XII. ep. 24.

& l'eau y couloit de la *Volane* ; car telle étoit la direction d'un *rivus Baderinus* (*a*). Le lit de cette branche étoit donc alors plus élevé que celui de l'*Eridan*. L'eau de la *Fossa Neronia* couloit de l'autre côté de la *Volane* jusque dans la *Fossa Philistina*, & la pente du sol continuoit même au-delà de l'*Adige* ; car PLINE assûre, que le Pô mêloit ses eaux avec celles de l'*Adige*, du *Togisonus* & des deux *Medoaci* (*b*). Ce qui arrivoit au moyen du canal appellé *Silvus longus* (*c*), qui depuis *Ariano* les conduisot par *Corbola* dans le *Tartaro*, & delà traversoit l'*Adige* à *Caput Aggeris* (*Cavarzere*), & après avoir reçu le fleuve *Togisonus* (*d*), une partie de ses eaux débouchant dans les *Lagunes* de *Venise*, avoit ouvert la langue de terre opposée & formé le Port de *Brondolo* (*e*); l'autre partie continuoit son cours dans la *Fossa Clodia*, à laquelle venoit se joindre un canal, qui conduisoit une partie de l'eau du *Medoacus major* (*la Brenta*), & du *Medoacus minor* (*f*) : ces eaux avoient rompu la même langue, & forme l'ouverture qu'on appelle *Porto di Chioggia*.

33. Le limon déposé par ces branches & canaux, produisit une grande inégalité d'élévation dans le sol, dont s'ensuivirent des grands changemens dans leurs cours. Dans la partie de la plaine comprise entre la *Volane* & la *Fossa Philistina*, qui se trouva par cette raison moins élevée que le lit de ces deux branches, il s'en forma une nouvelle, qui aujourd'hui est la plus abondante de toutes. Environ l'an 1150. les habitans des lieu voisins de *Ruina*, envieux de la prosperité, dont joüissoient les cultivateurs de son territoire

toire

(*a*) Dipl. an. 1013. in Append. *Difesa della S. Sede per Comacchio.*
(*b*) *His se padus miscet, ac per hæc effunditur* : l. cit.
(*c*) Chron. Ferrar. l. c.
(*d*) Ce fleuve, qui avoit sa source dans le territoire de *Padoue* près des bains d'*Abano*, a changé de cours & de nom.
(*e*) PLIN. ibid. V. la Carte du *Padouan* de MAGIN.
(*f*) Les Padouans en ont beaucoup changé le cours; entre *Padoue* & *Pieve di Sacco*, on l'appelle *Fiumicello*. V. MAGIN ibid.

toire très-fertile, couperent au-dessus de cet endroit la rive gauche du Pô, qui submergea cette campagne, & fit des grands ravages en s'ouvrant une issüe dans la mer; enfin les Ferrarois avec bien de travail firent des digues tout le long de son cours, & il se creusa son lit. On appella cette branche *la Rotta di Ficarolo* (*a*). Dès le XIV siécle les eaux y couloient en telle abondance, qu'elles égaloient celles des deux autres branches *Volana*, & *Primaro* (*b*); de nos tems la plus grandes partie des eaux du Pô coule dans la dite branche, qu'on appelle par cette raison le *Pô grande*; elle changea souvent ses embouchures, qui produisirent une telle prolongation de continent, que suivant la Carte des PP. BOSCOVICH & le MAIRE, il y a aujourd'hui 17. milles de distance entre *Ariano* & la partie la plus avancée du rivage voisin. L'*Adige* dans la derniere partie de son cours, c'est-à-dire après s'être dirigé vers l'Est, réhausse de même beaucoup son lit: delà ces changemens de lit, qu' il a fait entre la *Badia* de *Vangadizza* & *Cavarzerè* (*voyez la Carte*), & les fréquentes ruptures qu' il fait à ses rives (*c*). Ce réhaussement de sol a empêché *la Rotta di Ficarolo* de couler dans le lit de ce fleuve, qui est aujourd'hui plus élevé, que la branche du *Pô delle Fornaci* à *Anconetta*; car de cet endroit on remonte à force de chevaux le canal de *Loredo*, qui est assez rapide (*d*); les eaux de l'*Adige* coulent aussi dans le *Tartaro* par le canal qu'on appelle *Scortico*, & celle du *Tartaro* dans le Pô par la *Fossa Polisella* (*e*). Ces canaux, selon PRISCIEN, furent creusés pour décharger au moyen d'une partie de l' eau de l'*Adi-*

(*a*) ALBERTI pag. 345. b.
(*b*) Chron. Ferrar. l. cit.
(*c*) Cette branche qu'on appelle l'*Adigetto* est l'ancien lit de l'*Adige*; qui dans plusieurs Chartres de cette Abbaye est appellé *Adese veclo*, ou *Flumen veclum*.
(*d*) Voyage d'Europe tom. VI. p. 782.
(*e*) On doit observer que ces canaux font presque un angle droit entre les fleuves *Adige*, *Tartaro* & Pô.

l'*Adige* celles des grands marais, qui font dans ces lieux; mais ils font fouvent enflés par les eaux de l'*Adige*, du *Tartaro* & du *Menaco* de telle forte, qu'ils inondent une grande étendue de pays (*a*).

34. Toutes ces branches du Pô, & ces canaux trop multipliés ont fouvent produit des grandes inondations, pour peu que les pluyes ayent été abondantes; celle entr'autres qui arriva l'an 589. fit des terribles ravages (*b*). Le moyen de les empêcher & d'affûrer un lit plus conftant au fleuve eft de faire en forte qu'il fe divife en moins de branche qu'il foit poffible. Cela femble un paradoxe fuivant le préjugé commun, que les eaux doivent baiffer dans les fleuves à proportion de leur diramation; que, par exemple, fi l'on dérive d'un fleuve un canal d'une capacité égale à celle de fon lit, l'eau doive y baiffer de moitié; & au contraire que fi on fait confluer dans le lit d'un fleuve une quantité d'eau égale à celle qui y coule ordinairement, l'eau doive s'y élever du double. Mais ceux qui jugent ainfi, n'obfervent pas que c'eft à la vîteffe qu'on doit faire le plus d'attention dans le cours des fleuves, & qu'elle croit en raifon de la maffe des eaux qu'on y fait confluer. M. GENNETÉ (*c*) a prouvé en dernier lieu par des expériences exactes, que les eaux des fleuves ainfi divifées ne doivent baiffer que de peu, & qu'on peut y en faire confluer une affez grande quantité fans craindre des inondations; car après avoir fait couler dans un canal artificiel une quantité d'eau conftante, & avoir marqué la hauteur qu'elle avoit, *il y* fit confluer dans une autre canal une quantité d'eau égale, & il obferva qu'elle ne s'élevoit que d'$\frac{1}{48}$; il joignit un troifiéme canal, & l'eau ne s'éleva que d'$\frac{1}{24}$, & ainfi de fuite; & au contraire ayant divifé l'éau d'un canal commun

(*a*) ALBERTI pag. 351. b.
(*b*) V. Hift. Mifcel. lib. XVIII.
(*c*) Réflexions fur le cours des fleuves.

mun en deux canaux égaux, il obſerva, que l'eau ne baiſſoit dans ces canaux que d' $\frac{1}{48}$, dans trois d' $\frac{1}{24}$, dans quatre d' $\frac{1}{12}$, & ainſi de ſuite. La viteſſe que les eaux d'un fleuve, qui étoit diviſé, acquierent étant réünies, produit encore cet autre avantage, qu'il ſe fait moins de dépoſition de limon ſur le fond du lit. M. GENNETÉ fait eſpérer un autre ouvrage, dans lequel il donnera entr'autres méthodes celle de nettoyer aiſément les lits des fleuves: il eſt abſolument neceſſaire de le faire, ſi on veut leur aſſûrer un lit conſtant dans la partie de leur cours, où ils commencent à le réhauſſer.

35. Quant aux autres changemens arrivés au cours du Pô, au-deſſus de l'endroit, où il ſe diviſe, je n'en marquerai auſſi que les plus conſidérables. Dans le ſiécle XI. il couloit entre *Luzzara* & *Suzara* vers *S. Benedetto*, où il recevoit le fleuve *Lirone*; & la partie du cours qu'il a aujourd'hui entre *Borgoforte* & *S. Giacomo*, étoit le lit de l'*Oglio*, dans lequel il coula après avoir rompu à la gauche de *Luzzara*. A *Plaiſance*, dont il baigne les murailles, il couloit à un mille & demi vers le Nord; car telle étoit la diſtance du *Portus* ou *Emporium Placentinum*, qu'ANNIBAL manqua de ſurprendre, & qui étoit ſitué près du fleuvee, du même côté que la Ville; la voye Romaine, qui de *Plaiſance* conduiſoit à ce port, ſubſiſtoit encore dans le moyen âge (*a*); le long des murailles de la Ville couloit dans le Pô un fleuve appellé *Fons Anguſti*, & les ſources qui naiſſoient dans ſon lit étoient ſi abondantes qu'on le navigeoit au grand avantage de la Ville; dans le ſiécle XIV. il y couloit quelquefois dedans une partie des eaux du Pô & de la *Trebia* (*b*); & depuis ce tems le Pô ayant élevé ſon ancien lit au-deſſus de celui de ce fleuve, il y tranſporta

n toutes

(*a*) *Secus viam publicam, quæ ab urbe Placentia ad Placentinum Portum ducit.* Dipl. an. 879. publ. par CAMPI *Storia Eccl. di Piac. tom. I.*

(*b*) Chron. Placent. in tom. XVI. Rer. Italic. p. 561.

toutes ses eaux. Près de *Pavie* il couloit autrefois dans cet ancien lit, qu'on appelle *la Rotta*, & qui contient encore une partie de ses eaux; le *Tésin* y confluoit à un demi-mille de *Pavie*; mais le Pô ayant rompu le rivage à sa droite, fit rengorger le *Tésin*, & inonda la campagne voisine; enfin ayant fixé son cours, le *Tésin* y transporta son confluent à 4. milles à l'Est de *Pavie*, & les marais se desfecherent, & laisserent à découvert l'isle appellée *Mezano* (*a*). Entre les confluens de la *Sesia* & de la *Doira Bautia* il a souvent changé de lit. La voye Romaine, qui s'étendoit le long de sa rive gauche entre les Villes de *Quadratæ* & *Rigomagus*, l'empêchoit de se jetter sur la plaine; mais le Pô & les eaux qui couloient au-delà de la voye ayant réhaussé le sol, & couvert cette digue, il se détacha depuis ces tems des collines du *Montferrat*, rompit sa rive gauche, se creusa des nouveaux lits & emporta les ruines de *Rigomagus*, rebâti sur la fin du siécle VI. sous le nom de *Tridinum*, après avoir contraint les abitans à transporter leurs abitations plus loin de son bord, où il bâtirent l'an 1210. la Ville de *Trin* (*b*). Mais ces nouveaux lits ayant été aussi réhaussez, le fleuve reprit son cours dans les anciens; ainsi l'an 1297. il avoit quitté son lit vers *Palazzolo*, & s'étoit jetté vers la colline, où est *la Rocca delle Donne* (*c*). Il l'a souvent changé depuis; & aujourd'hui entre la *Doira* & la *Sesia* il coule presque partout divisé en deux lits. L'an 1610. quantité de pierres ayant éboulé du rocher de *Verruë*, dont il baignoit le pié, il fut contraint de se jetter vers *Crescentin*, où il se creusa le lit dans lequel il coule depuis ce tems; car il ne servit de rien que de lui faire une digue sans en avoir dégagé le lit

(*a*) On donnoit dans le moyen âge à ces sortes d'Isles le nom de *Medianum*. MURATOR. Dissert. XXI.

(*b*) V. IRIC. Dissert. de *Rigomago*, & Hist. *Tridin*. lib. I. p. 14. 64. 65.

(*c*) *Sommario Comm. Fontaneto, e Gabiano* 1745.

lit de ces pierres: il l'emporta à la prémiere inondation (*a*).

36. Ces changemens, comme j'ai obſervé au §. 13, ſont produits par le peu de pente qu'a le lit du fleuve. A *Turin* il n'eſt élevé que de 100. toiſes ſur le niveau de la mer (*b*). Or à cauſe de tous ſes petits détours, le plan de ſon cours depuis cette Ville eſt long d'environ 300. milles. La déſcente de l'eau ne feroit donc que de $\frac{6}{11}$ de toiſe pour chaque mille s'il coulat ſur un plan ; mais elle eſt plus grande que cette quantité vers *Turin*, & moindre vers l'embouchure ; car comme il dépoſe dans la partie inférieure de ſon cours toûjours plus de limon , il réhauſſe de plus en plus , & rend courbe cette ſuperficie ſur laquelle il coule ; on doit donc la conſidérer comme compoſée d'un grand nombre de plans, dont la hauteur va toûjours en diminuant ; & diſtribuer cette déſcente & la vîteſſe de l'eau en raiſon de leur inclinaiſon ; mais déſtitués d'obſervations dans d'autres parties de ſon cours, on ne peut pas la déterminer : les plus importantes ſeroient celles de la hauteur de ſa ſource, & du lieu où ſes eaux reparoiſſent vers ſon entrée dans la plaine. En général depuis ce lieu juſqu'à la colline de *Turin*, la vîteſſe qu'il a, & l'inégale réſiſtance qu'il trouve dans les rives, font qu'il varie beaucoup ſon lit, en les rongeant de côté & d'autre ; le long de cette colline, la qualité des rives, & plus encore la quantité de ſa vîteſſe, qu'on peut appeller moyenne, fait qu'il ne creuſe, ni ne réhauſſe pas ſon lit, qui eſt en ce lieu aſſez conſtant. Mais en ſe dirigeant enſuite vers l'Eſt, il commence à le réhauſſer, ce qui l'oblige ſouvent à tranſporter ſes eaux de côté ou d'autre des isles qu'il forme.

37. Après m'être étendu ſur les changemens du cours du Pô autant que peut permettre le plan de ce Mémoire ;

n 2 il

(*a*) *Alleg. per Creſcentino* 1741.
(*b*) M. NEEDHAM a déterminé la hauteur de la Ville à 101. toiſes. *Obſerv. Baromeır.*

il me reste à ajoûter quelques observations sur sa source, & sur quelques unes des rivières qu'il reçoit; & je finirai par indiquer les effets de la prolongntion du continent à l'embouchure des fleuves. Le Mont *Viso*, appellé par les Anciens *Vesulus Mons*, s'éleve fort en pointe, & est entouré de tous côtez de rochers escarpez. Quelques jeunes hommes, qui grimperent sur son sommet, rapportoient à ALBERTI qu'il y a une petite place (*a*). Vers le milieu de la déscente un petit lac, qui au jugement de CLUVIER est très-agréable, & ne déborde jamais, par des conduits souterrains donne l'origine à trois fontaines, qui au-dessous de ce lac sortent du sein de la montagne (*b*). Celle qui sort plus bas que les autres, & vers le pied de la montagne, est la plus abondante en eaux, & a été proprement appellée *Padus* (*c*). PLINE observe, que *Padi fons mediis diebus æstivis, velut interquiescens, semper aret* (*d*). " Elle est „ au milieu d'un pré, proche des ruines d'un Chateau, que „ le Roi CHARLES VIII. avoit fait bâtir pour la commo„ dité du passage de France en Italie „ (*e*). Ces trois fontaines se réünissent, & le fleuve se précipite des rochers avec un trés-grand bruit, en roulant des grosses pierres, & est si abondant d'eaux, qu'il pourroit faire tourner une meule; sans avoir cependant aucun lit constant dans ce sol pier-

(*a*) Mais il se méprend en disant, que sur ce sommet il y a deux fontaines; dont l'une donne la source à la *Durance* & à la *Doira*, & l'autre plus basse au Pô. Pag. 384. b. 385. Il copie trop à la lettre le texte de STRABON au liv. IV.

(*b*) CLUVER. Ital. Ant. lib. I. c. 35. PLIN. l. c. *Padus e gremio Vesuli montis*

(*c*) MELA l. II. c. 4. CLUVER. ibid.

(*d*) L. II. c. 103.

(*e*) GUICHENON Hist. Généal. de la R. Maison de Savoye. Lib. I. c. 3. C'est le pertuis du M. *Viso*, aujourd'hui comblé de pierres, qui se détacherent de la cave de la montagne. Un Auteur de ce tems le décrit ainsi: " Il y a un nouveau passage bien merveilleux pour entrer au „ pays d'Italie; c'est par un pertuis qu'on a fait à côté du M. *Visol* par „ une montagne qu'on a percé tout outre puis 14. ans ença, & dure en„ viron un get d'arbalestre. „ JACQ. SIGAULT *Totale déscription des passages des Gaules en Italie*, publiée par CAMUZAT Melang. Hist. p. 162.

pierreux. Enfin après un cours de 21. milles Romains (*a*), dans la Vallée, dont la plus grande largeur n'excede pas un mille, à son entrée dans la plaine, il se perd entre *Revel* & *Saluces* absorbé par le gravier qu'il y a porté ; de sorte qu'en Eté on le passe à pieds secs, & dans les autres saisons de l'année il coule avec peu d'eaux (*b*). PLINE ne s'est pas exprimé avec son exactitude ordinaire en supposant qu'il coule par un conduit souterrain (*c*) : *Condensque sese cuniculo, & in Forovibiensium agro iterum exoriens* ; car on sent en passant sur ce gravier le bruit de l'eau dont il est imbibé. Il coule de nouveau vers la fin du territoire de *Revel*, peu loin de l'Abbaye de *Stapharde* ; où il reçoit sur sa droite le torrent *Bronda*, & quatre milles au-dessous, un canal, qui conduit une partie des eaux de la *Vraita*, creusé par ordre du Marquis MAINFROY IV. de Saluces pour arroser la campagne appellée la *Gerbola*, qu'il fit défricher, & ensuite il reçoit cette rivière, & la *Maira*. Les cartes Géographiques marquent un canal de navigation, qui conduit une partie des eaux de la *Stura* dans le Pô peu au-dessus de *Carignan* ; il avoit été projetté dans le siécle dernier par le célébre Marquis de PIANEZZA, & executé dans sa partie entre *Carmagnole* & le Pô (*d*) ; mais sa mort interrompit cet ouvrage, qui auroit été fort avantageux au commerce entre *Nice* & *Turin*, sur tout depuis qu'on fait de si grands travaux au Port de *Nice*. Delà jusqu'au *Tanaro*, le Pô ne reçoit que des torrens. La *Trebia* & les rivières suivantes inondoient une grande étendue de la plaine avant que les Romains eussent fondé leur Colonie de *Plaisance* l'an 218. avant l'Ere vulg. EMILIUS SCAURUS qui fit

(*a*) Ou de 14. milles du Piémont.
(*b*) CHIESA *Cor. Reale*.
(*c*) Cela a lieu dans le *Rhône*, le *Melse* & le *Negro*, qui coulent sous des rochers dont la Chaine traverse leur cours. CÆSAR de bel. Gall. lib. I. GUICHEN. lib. I. c. 3. PLIN. lib. II. c. 103.
(*d*) On l'appelle le *Navilio*.

fit construire la voye *Emilienne* entre *Rimini* & *Plaisance*, fit écouler ces marais dans le Pô, en creusant un grand canal navigable sur le territoire de *Parme* (*e*); dont une partie subsiste encore sous le nom de la *Parmigiana*. Je m'étendrois trop en décrivant les changemens de cours des rivières de la *Lombardie*, & les canaux qu'on a fait en différens tems, surtout dans le *Modenois*, le *Bolonois* & le *Ferrarois*; on peut consulter les ouvrages, qu'ont fait à cette occasion MANFREDI & GUGLIELMINI, & ceux que j'indique dans la note (*b*).

138. Entre les rivières que le Pô reçoit à sa gauche, la petite *Doire* est grossie par le torrent *Cinisella*, qui coule du lac qui est sur la plaine du Mont *Cenis*. Ce lac étoit autrefois beaucoup plus grand (*c*); c'est parcequ'il occupoit toute cette plaine, qui a cinq milles de long, sur un de large, que les Romains ne pratiquerent point une voye sur cette montagne; mais une grande partie de ses eaux ayant écoulé, CHARLEMAGNE y passa avec son armée en 774. (*d*). Elle porte toutes les marques des volcans; car il y a autour du lac des cavités en forme de cones renversés, qu'on ne peut attribuer qu'aux exhalaisons du feu; & il semble qu'elle ait pris son nom (*M. Cenisius*) des cendres. Les volcans & les tremblemens de terre ont produit des grands changemens dans les montagnes; PLINE assûre que les Alpes & les Apennins en avoient souvent éprouvé les secousses (*e*). La configuration de cette montagne indique, que le *Grand* & le *Petit* Mont *Cenis* n'en faisoient qu'une seule; & que la voûte qui les joignoit, & couvroit l'abime d'eau contenu dans son sein, ayant écroulé, laissa à dé-

(*a*) STRAB. lib. V.
(*b*) CORRADI, *Effetti dannosi delle paludi*, ec. Modena 1717. SILVESTRI, *Descr. Paludi Adriatiche.* MURATORI *Antiq. Italic.* Differt. XXI.
(*c*) *Superne in cavis quibusdam locis magnus continetur lacus; duoque fontes &c.* STRAB. lib. IV.
(*d*) V. EGINHART. *in V. Caroli M.*

à découvert ce Lac formé par le bassin de la Montagne, qui retint une partie des eaux. (a)

39. PETRUS AZARIUS, qui écrivoit vers la fin du XIV siécle, donne une curieuse description de l'*Orgo*, & la *Doira Bautia* (b). Il observe que ce deux fleuves, quoique peu éloignés, sont tout-à-fait différens. Le premier rend fort fertiles les terres qu'il arrose; quoiqu'il inonde, il à des guez bons & sablonneux; on trouve dans son lit un grand nombre de poissons excellens, & on y reçueille quantité d'or en des grains si gros, qu'il en vit un de la valeur de seize florins. „ La *Doira* a sa source dans des Montagnes „ couvertes de glaces éternelles: point d'or dans son lit, „ point de poissons, & de guez dans le Canavez; s'il „ coule dans les champs, il les détruit, si dans la prairies „ il en gâte & brûle les herbes. L'Auteur de la Chronique de *Plaisance* fait une observation semblable sur le riviéres *Nura*, & *Trebia*; & dit que le Pô rend fort fertiles les terres qu'il inonde, quoiqu'il cause souvent des grands dommages à ses voisins. (c) PLINE observe aussi que le Pô dans ses inondations, *Agris quamvis torrentior, nil tamen ex rapta sibi vindicans, atque ubi liquit agros, ubertate largior*: ce qu'il faut entendre de la plus grande partie de son cours dans la plaine. Ces differens effets sont produits par les terres, & les sels, ou par l'Ocre, & le sable qu'ils charient dans une partie de leur cours, & déposent dans une autre.

40. La *Doira Bautia* mêloit anciennement ses eaux avec celles d'un Lac, qui étoit formé par le bassin que font les col-

(a) La hauteur de cette Montagne étoit donc plus grande, que celle, qui a été observée à la *Glaciére* (v. §. 2. Nota *a*), & qui seroit trop petite à l'égard de la distance, où elle est du Mont *Tournl*.

(b) *Lib. de Bello Canepic. in princ. Rer. Ital.* tom. XVI.

(c) *Flumen Nuriæ, quod distat a civitate per quatuor milliaria, est optimus Fluvius pro terris impinguandis, & pro pannis laborandis; non est enim terra ita mala, si irrigetur ab aqua ista, quod non efficiatur optima, & est Fluvius satis magnus. Fluminis Treviæ aqua mala est pro terris; nam eas facit macras. Rer. Ital. T. XVI. p. 561.*

collines, qui s'élargissent à *Ivrée*, & se retrécissent de nouveau à *Massé*. Les Lacs de *Viverone*, & de *Candia* en sont des parties, qui ayant une plus grande profondité, ne laisserent point écouler toutes leurs eaux. La partie à la gauche de la riviére étoit plus grande que celle de la droite. AZARIUS, qui le décrit, assure qu'on voyoit dans le Comté de *Mazin*, & près de *Viverone* les murailles des Ports qu'il y avoit sur ce Lac, & les anneaux de fer, auxquels on attachoit les bateaux. L'eau de la *Duria*, qui couloit dans le Pô, ayant élargi le détroit de *Massé*, entraina avec elle la plus grande partie des eaux du Lac. La Table Théodosienne en marque un considérable à la source de cette riviére; PTOLÉMÉE l'appelle le Lac *Poenin*, & dit que la *Doria* avoit sa source à côté de ce Lac. (*a*) Ils ne marquent pas des Lacs si petits que celui de *Ruto*, duquel coule une de ses deux sources. Il semble donc qu'on en puisse conclure que la Vallée de *Courmajeur* dans laquelle coule l'autre source ait été occupée par un Lac dont les eaux se soient de même écoulées. Cette table marque aussi un *Lacus Cusius* à la source d'une riviére sans nom, qui ne peut être autre que la *Sésia*. Il est assez vraisemblable que le Lac, dont coule cette riviére, ait été beaucoup plus grand; un Auteur, qui décrit exactement le Diocése de *Novare* (*b*), assure que les Villages qui sont dans le fond de la Vallée de *Sésia* sont assez nouveaux. Le même Auteur décrit un autre Lac de quelques trois milles de long & de large, qui étoit près de la *Sesia*, entre *Prà*, & *Grinasco*, dont l'eau a écoulé avec celle de cette riviére; & une partie du Lac *Majeur*, qui a été remplie par le limon porté par la riviére Tosa. Quoique les trois grands Lacs (*c*) n'ayent pas été depuis plusieurs siécles retrécis dans leur longueur par les

(*a*) Geogr. l. III. c. 1.
(*b*) CAROL. a BASILICAPETRI, *Novaria*.
(*c*) *Majeur*, *de Come*, & *de Garda*.

les fleuves qui les traversent : les mesures qu' en donnent les anciens, & les modernes étant à peu près égales; (a) cependant les pierres, & le sable qu' ils y portent, & que leur courant roule bien avant dans le Lac, en rehaussent nécéssairement le fond; ce qui fait que l' eau s' y soutient encore à une hauteur à peu près égale à celle qu'ils avoient il y a deux milles ans, quoique il en écoule par les riviéres, qui en sortent, plus qu' il n' y en entre.

Tant de fleuves qui prolongent le continent à leurs embouchures, comme j' ai prouvé à l' égard du Pò, & qui rehaussent de leur limon le fond de la Mer, tandis qu' ils la resserrent de tous côtés, doivent contraindre ses eaux de s' élevér sensiblement, & de submerger les Terres qu' elles baignoient, qui deviennent toujours plus basses que le niveau de la Mer. Quelques Naturalistes, qui ont tâché d'établir le contraire, c'est-à-dire, que la Mer s' éloigne toujours plus des côtes, & que les eaux se retirant continuellement dans les cavités de la Terre, laisseront enfin le fond de la Mer en sec: qu' au commencement la Terre séche ne consistoit que dans un' Isle, dont les bornes s'étendirent jusqu' à former les vastes Continens, qui sont aujord'hui découverts, ont tiré cette conséquence d' observations trop bornées. M. LINNEUS (b) entr' autres, la déduit de celles qu' il à faites dans le Golphe *Bothnique*. Ce Golphe long & étroit, dans lequel se décharge un grand nombre de fleuves, qui y portent beaucoup de pierres, & de limon, deviendra toujours plus retréci; & ces fleuves qui déscendent de Montagnes fort hautes, & qui après un cours peu long, mais d' autant plus rapide, déchargent leurs eaux dans la Mer, se creusent dans plaine qu'ils parcourent des lits toujours plus profonds (c) mais

O il en

(a) POLYB. apud STRAB. lib. IV. in fine, Itin. ANTON., VAGLIANO *le Rive del Verbano*, PAULI JOVII *Larii Lac. descr.*

(b) *Differt. de Tellure habitabili* in vol. II. *Amoenit.*

(c) Les Lacs, qui sont si nécessaires dans ce Pays, y sont fort étendus & en grand nombre.

il en auroit déduit tout le contraire s' il eut observé que même dans la Mer *Baltique* l' Isle de *Rugen* étoit autrefois une partie du continent; que la Mer a beaucoup gagné sur les côtés Occidentales du *Dannemark*, & sur celles de la *Frise*; que dans les *Pays-Bas* l' eau du *Rhin* ayant cessé de couler par l' embouchure du Lac *Flevo* la Mer y entra, & submergea une grande étendüe de Pays (*a*); &, sans chercher plus loin des exemples, qu' elle entra de même par l' embouchure du Pô *Vergenese*, y forma un Lac, qui n' avoit encore dans le XVI siécle que 12 milles de circuit, mais qui submergeant de plus en plus les terres voisines, en a aujourd'hui 60.; qu'on voit le long des côtes de la Méditerranée les ruines de plusieurs Villes au milieu de ses eaux &c. La surface de la Terre doit enfin plus perdre que gagner (*b*); & si la Révélation ne nous enseignoit pas qu'elle ne doit plus éprouver un déluge (*c*), mais un embrasement (*d*), on en devroit conclure que dans la suite d' un grand nombre de siécles elle seroit toute couverte par les eaux.

(*a*) Occupé aujourd'hui par le Golphe appellé *Zuider zée*.
(*b*) *Mons cadens defluit, & saxum transfertur de loco suo. Lapides excavant aquæ, & alluvione paullatim terra consumitur*, JOB. XIV. 18. 19.
(*c*) Genes. IX. *v.* 11. ec.
(*d*) PETR. epist. II. *v.* 7. 10. 12.

Fautes à corriger.

Pag. 28. *ligne* 7 quarrée, *lisés* quarré.
Pag. 8. *ligne* 22. démontrent, *lisés* démontrant.

Pag. 47. *linea* 3. CↃ < ĊↃ / CↃ *lege* CↃ < ĊↃ / CↃ

Pag. 51. *linea* 6. *in nota* subtiliori *supple* acumini.
Pag. 53. Post Sciagraphiam *adde* titulum progressus gradualis combinatorius.
Pag. 54. *linea* 25. Isquierdo, *lege* Izquierdo
57. *linea* 2. ⊙, ... (⊙).
61. *linea* 1.
S & ♉, ω ... Hinc ... CↃ CↃ *lege* Hinc & ♉, ω S S CↃ ()

linea 2. < ergo ♉ inter & nulla ω, *lege* (C Ↄ, C Ↄ, C Ↄ)
< ergo ♉ inter & nulla ω. (C Ↄ, C C Ↄ Ↄ, Ↄ C)

Observandum indiscriminatim a Typothetis appositum fuisse το < pro &, & *vel*.

Loco Ṡ < Ṡ / ·S *lege* Ṡ < S / S ubicumque recurrit.

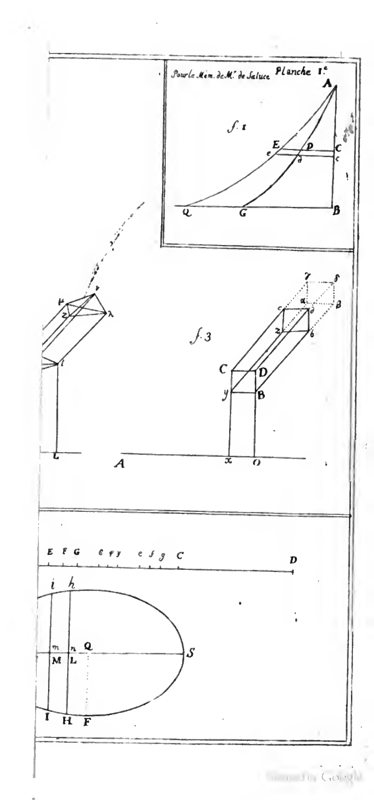
το a, το non *a* cursivis litteris pingendum erat.

Pag. 69.	*lign.* 7.	Are . .	Ere
72.	26.	des fleuves	du fleuve
78.	15.	da . . .	de
90.	1.	les fleuves	ces fleuves
91.	30.	ce . . .	de
92.	11.	tous . .	ſous
100.	8.	place . .	plaine
102.	*Note* (*e*)		(*e*) Plin. lib. II. c. 80.

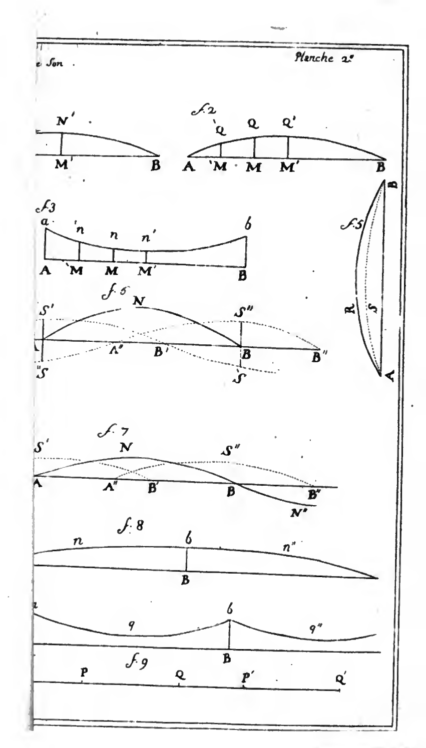
Imprimatur. PISELLI Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa

GALLI per la Gran Cancellería.



Pour le Mém. de M.r de Saluce
Planche 1.e
f. 1
A
E
D
C
e
c
Q
G
B
f. 3
C
D
y
B
A
x
O
z
E F G
C
D
i h
m n Q
M L
S
I H F



e Son
Planche 2e
N'
M'
B
f. 2
Q
Q
Q'
A
M
M
M'
B
f. 3
a
n
n
n'
b
A
M
M
M'
B
f. 5
B
R
S
A
f. 6
N
S'
S''
A'
B'
B
B''
S
S
f. 7
S'
N
S''
A
A''
B'
B
B''
N''
f. 8
n
b
n''
B
b
q
q''
B
f. 9
P
Q
P'
Q'

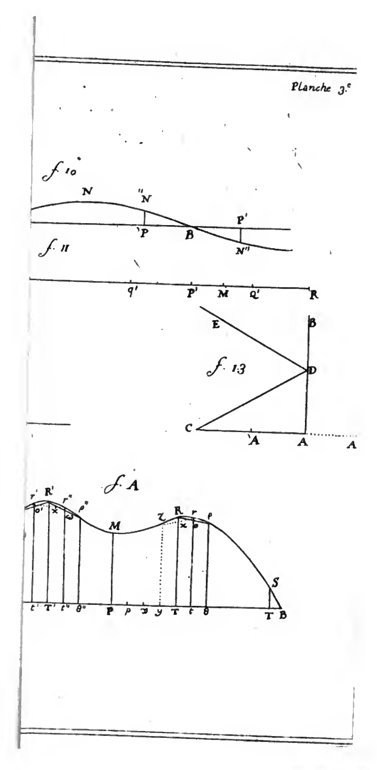
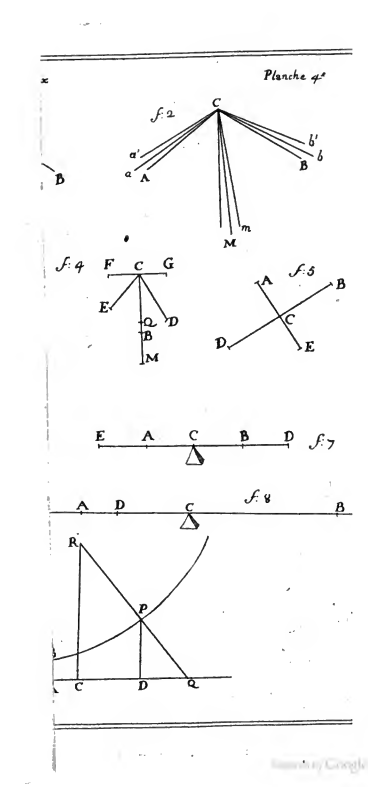
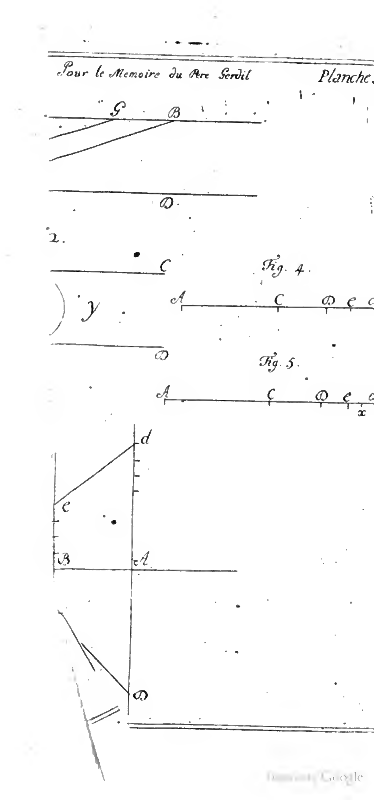

Planche 3.e
f 10
N
N
P
B
P'
N''
f. 11
q'
P'
M
Q'
R
E
B
f. 13
D
C
A
A
A
f. A
r'
R'
r''
ρ''
M
Z
R
r
ρ
S
t'
T'
t''
θ''
P
p
x
y
T
t
θ
T
B

Planche 4^e




G
B
D
2.
C
y
D
Fig. 4.
A
C
D
e
Fig. 5.
A
C
D
e
x
d
e
B
A
D

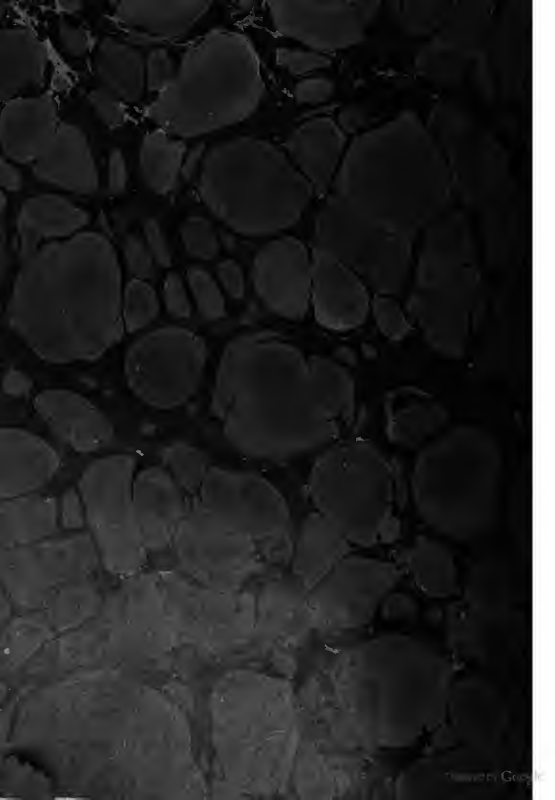
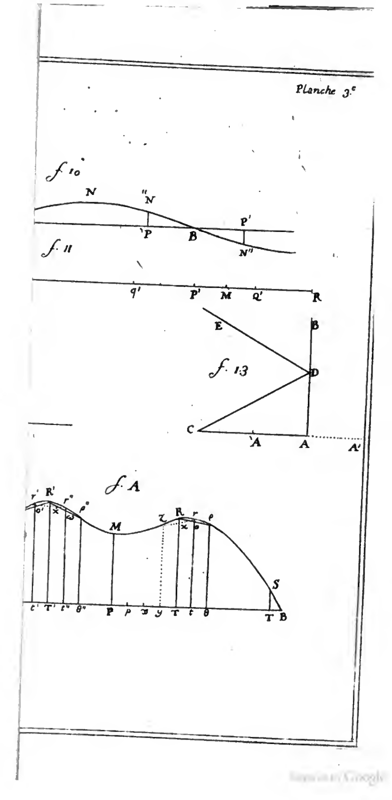


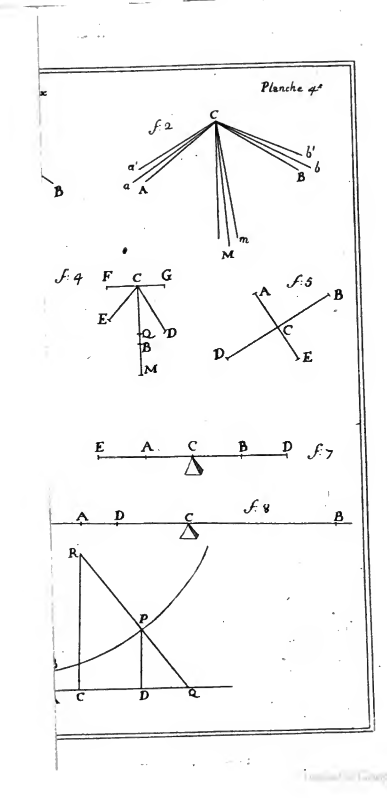


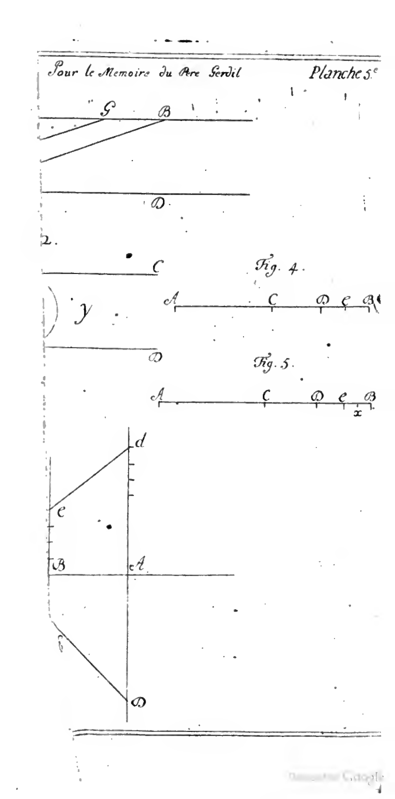
Planche 3.e



f. 10
N
"N
'P
B
P'
N"
f. 11
q'
P'
M
Q'
R
E
B
f. 13
D
C
'A
A
A'
f. A
r'
R'
r"
ρ"
M
Z
R
r
ρ
S
t'
T'
t"
θ"
P
p
T
t
θ
T
B


Digitized by Google


Planche 4e
f. 2
C
a'
a
A
b'
b
B
m
M
f. 4
F
C
G
E
Q
D
B
M
f. 5
A
B
C
D
E
E
A
C
B
D
f. 7
f. 8
A
D
C
B
R
P
C
D
Q


G
B
D
2.
C
y
D
Fig. 4.
A
C
D
e
B
Fig. 5.
A
C
D
e
B
x
d
e
B
A
b
D

